第五章　矢量代数与空间解析几何

第一节　空间直角坐标系与矢量

1·1　直角坐标系

空间解析几何与平面解析几何一样，也是用代数方法来研究几何图形．把几何与代数之间沟通起来的是在空间引进坐标，使空间的点与数对应起来，这样就可以用方程来表示图形．

在空间取三条相交于一点 O 且两两垂直的直线，分别称它们为 x 轴、y 轴与 z 轴．先取一单位，在每一轴上都由 O 量起．那边为正，那边为负原可任意，但为明确起见，按右手法则排列：即当 x 轴正向按右手握拳方向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时，拇指的指向就是 z 轴的正向(图 5·1)．

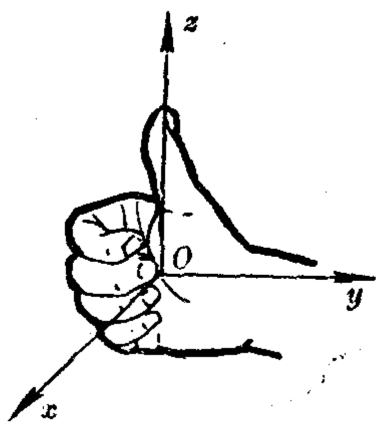

图　5·1

过空间任一点 P 作三个平面，分别垂直于 x 轴，y 轴与 z 轴．设垂足对应的三个实数分别是 a, b, c．于是 P 点决定了一个三实数组 (a, b, c)．反之，如果有一三实数组 (a, b, c)，过 x, y, z 轴上的点 a, b, c 作三张平面，分别垂直于 x, y, z 轴，这三张平面相交于空间一点 P．因此，三实数组 (a, b, c) 与空间的点一一对应，称 (a, b, c) 为点 P 的坐标(图 5·2)．这种坐标系叫做直角坐标系．

过 x 轴与 y 轴，y 轴与 z 轴及 z 轴与 x 轴的平面分别称为 xy 平面，yz 平面及 zx 平面，这三张平面两两垂直且将空间分成八个

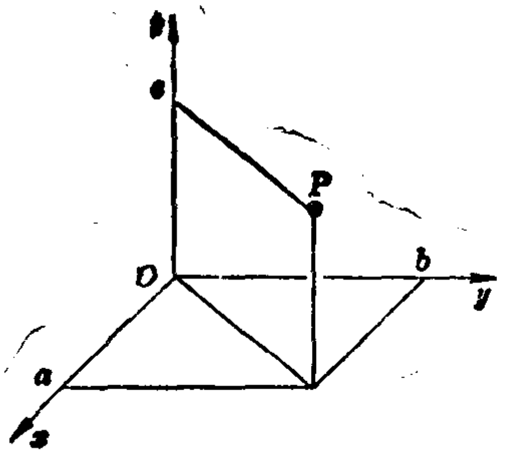

图 5·2

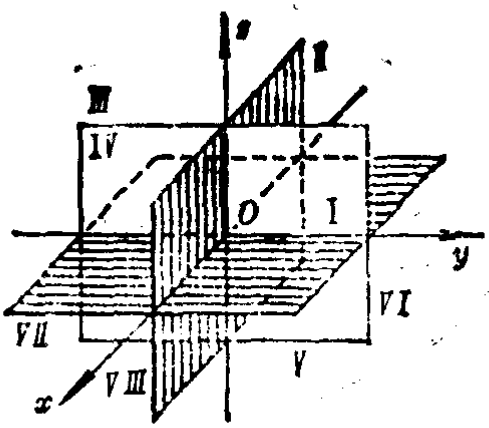

图 5·3

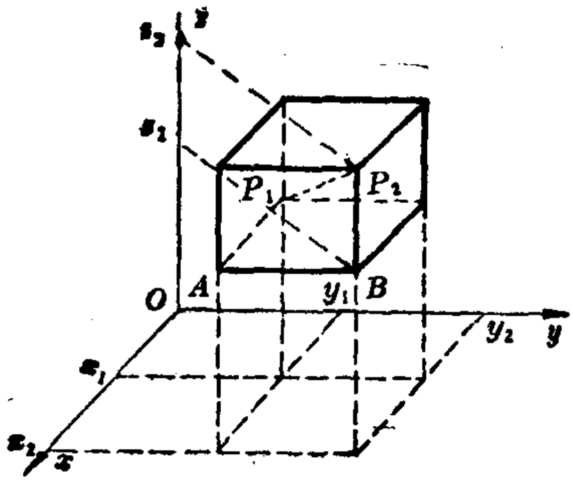

图 5·4

卦限(图 5·3)，这三张平面称为坐标面.

若 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两点. 过 P_1，P_2 分别作平行于坐标面的平面，组成一个长方体，它的棱与坐标轴平行(图 5·4). 由于

$$P_1A=x_2-x_1,\ AB=y_2-y_1,\ BP_2=z_2-z_1$$

就得到空间任两点的距离公式

$$P_1P_2=\sqrt{\overline{P_1B}^2+\overline{BP_2}^2}=\sqrt{\overline{P_1A}^2+\overline{AB}^2+\overline{BP_2}^2}$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

点 $P(x, y, z)$ 和原点 $O(0, 0, 0)$ 之间的距离为 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

例 1 求到两定点 $A(1, -2, 1)$ 与 $B(2, 1, -2)$ 等距离的点 $M(x, y, z)$ 的轨迹.

解 由于 $AM=BM$, 所以

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}$$
$$=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2}$$

化简得到点 M 的轨迹为

$$2x+6y-6z-3=0$$

在第三节中可以看到这是一个平面方程.

1·2 矢量的加法与数乘

把代数运算引到几何中来的另一途径是矢量代数. 矢量是既有大小又有方向的量, 可以用一个有方向的线段来表示. 线段的长度表示矢量的大小, 线段的方向表示矢量的方向, 若线段的起点为 $P(x_0, y_0, z_0)$, 终点为 $Q(x_0+a_1, y_0+a_2, z_0+a_3)$, 则这个矢量就完全确定了, 记作 $\overrightarrow{PQ}$ (图 5·5).

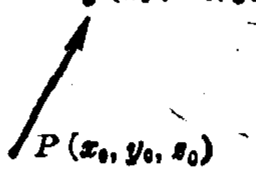

图 5·5

通常所研究的矢量有以下两种:

一种是不管起点如何, 所有同方向、等长度的矢量都算相同, 这样的矢量称为自由矢量. 将 P 移到原点, 则 Q 成为 (a_1, a_2, a_3), 因此可以用 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 来表示矢量 $\overrightarrow{PQ}$.

另一种是在同一直线上不管起点如何, 所有同方向、等长度的矢量都算相同, 这样的矢量称为滑动矢量.

以下所讨论的矢量仅指自由矢量. 显然, 一个自由矢量

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$$

的长度为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

方向由

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}$$

决定. a_1, a_2, a_3 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 x, y, z 轴上的投影. α, β, γ 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 x, y, z 轴所成的角度. 称 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 而

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

在实际问题中,矢量早已遇到过,如位移、速度、加速度、力等都是不仅有大小而且有方向的量.

二矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 的和定义为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

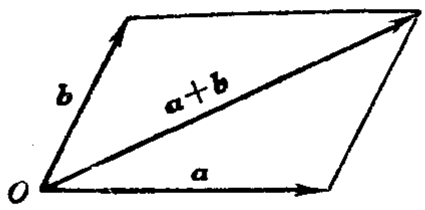

图 5·6

把矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的起点都移到原点,以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为边作平行四边形, 由原点作出的对角线就表示矢量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (图 5·6). 这种矢量的加法,也早已见过,如力的合成,速度的合成都是用的这种加法.

零矢量定义为 $\mathbf{0}(0, 0, 0)$. $\boldsymbol{a}$ 的反向矢量定义为

$$-\boldsymbol{a}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$$

反向矢量也是以前遇到过的,如作用力与反作用力是大小相等、方向相反的二个矢量,作用力为 $\boldsymbol{a}$, 则反作用力为 $-\boldsymbol{a}$.

对任一实数 λ, 定义

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3)$$

称为矢量的数乘. 例如将速度或力增大二倍, 就是速度或力的方向不变, 只是数值增大二倍,这就是一个矢量的数乘. 显然, 如果 $\lambda>0$, 则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向, 如 $\lambda<0$, 则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反,特别取

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

则 $$\lambda\boldsymbol{a}=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right)$$

显然，$\boldsymbol{a}^0=\lambda\boldsymbol{a}$ 的长度为一，称为单位矢量. $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$.

取 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$，则 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 都是单位矢量，且任意矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 可分解为:

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

此外，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意矢量，λ,μ 为任意实数，则

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ （交换律）

(2) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ （结合律）

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ （数乘分配律）

(4) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ （数乘结合律）

(5) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件为存在实数 $\lambda\neq0$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

(6) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件为存在实数 λ 和 μ 不全为零，使

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$$

(7) 由三角形二边之和大于第三边，得到

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

例 2 证明对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证 由于 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

所以 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$

即 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

(图 5·7). 这就是 AD 与 BC 相等且平行，因此，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

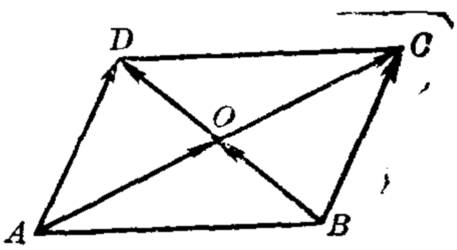

图 5·7

例 3 已知两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，点 M 将线段 $\overline{M_1M_2}$ 分成定比为 λ 的两段，求 M 点的坐标.

解 设点 M 的坐标为 (x,y,z)，

$$\overrightarrow{OM}_1=\boldsymbol{r}_1,\ \overrightarrow{OM}_2=\boldsymbol{r}_2,\ \overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$$

于是 $\overrightarrow{M_1M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1$，$\overrightarrow{MM_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}$(图 5·8). 由于

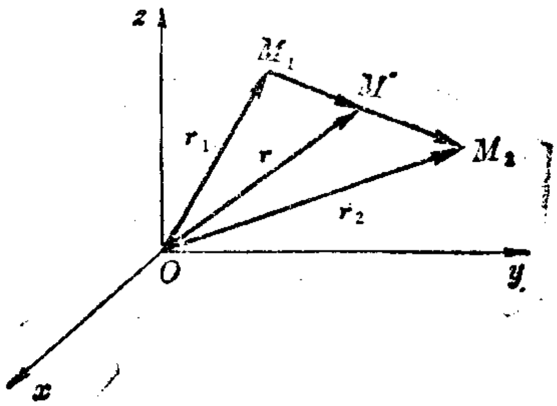

图　5·8

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$$

所以
$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=\lambda(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r})$$

即
$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{r}_2}{1+\lambda}$$

而
$$\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z),\ \boldsymbol{r}_1=(x_1,\ y_1,\ z_1),\ \boldsymbol{r}_2=(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

因此，M 点的坐标为：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

若 $\lambda=1$，就得到线段中点的坐标为：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

习　　题

1．(1) 求点 $M(4,\ -3,\ 5)$到原点及到各坐标轴的距离．

(2) 已给 $A(4,\ -7,\ 1)$，求点 $B(6,\ 2,\ z)$，使 A, B 的距离为 11．

(3) 已给 $A(2,\ 3,\ 4)$，求点 $B(x,\ -2,\ 4)$，使 A, B 的距离为 5．

2．在 yz 平面上求与点$A(3,\ 1,\ 2)$, $B(4,\ -2,\ -2)$，及 $C(0,\ 5,\ 1)$等距离的点．

3．给定矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，作出如下矢量：

(1) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;　(2) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$;　(3) $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;　(4) $3\boldsymbol{a}$;　(5) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$;

(6) $2\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$;　(7) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

4．已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，并且 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=12$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

5．已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\alpha=60°$，并且 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=8$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

6．已知：力 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 的夹角 $\varphi=120°$，并且 $|\boldsymbol{P}|=4$ 公斤，$|\boldsymbol{Q}|=5$ 公斤，求合力 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$ 的大小和方向.

7．已知 $|\boldsymbol{a}|=13$, $|\boldsymbol{b}|=19$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=24$，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

8．说明下列各式的几何意义：

(1) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$.

9．设 $ABCD$ 为平行四边形，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 来表示矢量 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点.

10．设 M 是三角形 ABC 的重心. 证明对任意一点 O,

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

11．设 A, B, C, D 是一个四面体的顶点，M, N 分别是边 AB, CD 的中点. 证明

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

12．已知两点 $P_1(a_1, b_1, c_1)$, $P_2(a_2, b_2, c_2)$，求矢量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标、模和方向余弦.

13．设矢量的方向余弦分别满足下列条件：

(1) $\cos\alpha=0$;

(2) $\cos\beta=1$;

(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$.

这些矢量与坐标轴或坐标面之间有什么关系？

14．设矢量与 x 轴，y 轴的夹角相等，而与 z 轴的夹角是前者的两倍，求这矢量的方向余弦.

15．从点 $A(2, -1, 7)$ 沿矢量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 的方向取一线段 AB，长为 34，求 B 点的坐标.

16．已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量 $\boldsymbol{a}^0$ 的坐标.

17．已知 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴和 y 轴的夹角为 $\alpha=60°$, $\beta=120°$ 且 $|\boldsymbol{a}|=2$，求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

18. 给定两点 $M_1(2, 5, -3)$, $M_2(3, -2, 5)$, 在线段 M_1M_2 上取一点 M, 使 $\overrightarrow{M_1M}=3\overrightarrow{MM_2}$, 求 M 点的坐标.

19. 已知三个矢量 $\boldsymbol{p}=(3, -2, 1)$, $\boldsymbol{q}=(-1, 1, -2)$, $\boldsymbol{r}=(2, 1, -3)$, 求矢量 $\boldsymbol{a}=(11, -6, 5)$按 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ 的分解式,即决定数 α, β, γ 使得

$$\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{q}+\gamma\boldsymbol{r}$$

20. 已知三角形的三顶点为 $A(2, 5, 0)$, $B(11, 3, 8)$ 和 $C(5, 11, 12)$, 求各边和各中线之长.

第二节　矢量的乘积

2·1　矢量的内积

二矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 的内积(数量积)定义为:

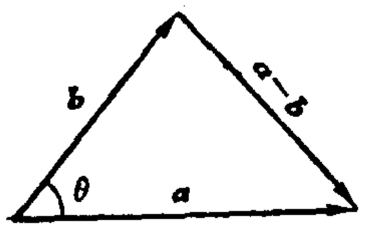

图　5·9

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为任意矢量, λ, μ 为任意实数,则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\quad\text{(交换律)}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\quad\text{(分配律)}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\quad\text{(数乘结合律)}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$$

若 θ 为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 两矢量的夹角,由余弦定律知道(图 5·9),

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

另一方面,

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$
$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

因此，内积也可以看成为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的长度乘以矢量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影（图 5·10）.

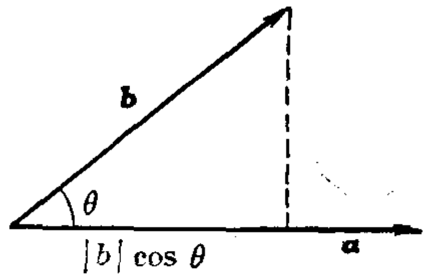

图 5·10

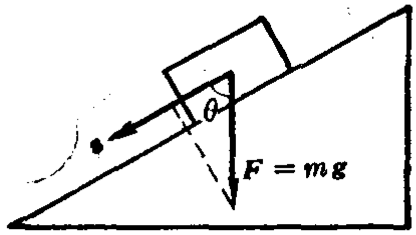

图 5·11

内积是数学中的一个重要概念，在以前曾遇到过. 例如物体受重力 $\boldsymbol{F}$（这是一个矢量）作用，沿斜面下滑（图 5·11），重力的方向是垂直向下的，而物体位移 $\boldsymbol{s}$（这也是一个矢量）的方向和斜面平行，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 正向间的夹角为 θ. 于是重力所作的功为

$$w=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$$

从内积的定义得到：矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，又显然

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

例 1 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$，求矢量 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角 φ.

解 由于 $\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{d}|}$，而

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=6|\boldsymbol{a}|^2+7\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2=6\cdot2^2+7\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{3}-3\cdot1^2=28$$

同样，
$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=37$$

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}=(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=31$$

所以 $$\cos\varphi=\frac{28}{\sqrt{37}\sqrt{31}}=0.8268\cdots,\ \varphi\doteq 34°14'$$

例 2 求与 $\boldsymbol{a}=(1,\ -3,\ 1)$, $\boldsymbol{b}=(2,\ -1,\ 3)$都垂直的单位矢量.

解 设所求的单位矢量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, 则

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=0,\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}=0,\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=1$$

于是得到如下的方程组:

$$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \end{cases}$$

解方程组, 得到

$$x_1=\pm\frac{8}{3\sqrt{10}},\quad x_2=\pm\frac{1}{3\sqrt{10}},\quad x_3=\mp\frac{5}{3\sqrt{10}}$$

所以 $$\boldsymbol{x}=\pm\frac{1}{3\sqrt{10}}(8,\ 1,\ -5)$$

例 3 证明不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

证 令 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$. 由内积定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

而 $$|\cos\theta|\leqslant 1$$

所以 $$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$$

此即要证的不等式.

2·2 矢量的外积

二矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 的外积(矢量积)定义为:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

或可写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为任意矢量, λ, μ 为任意实数, 则

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \qquad \text{(分配律)}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \qquad \text{(数乘结合律)}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \qquad \text{(交换律不满足)}$$

特别有 $\qquad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$

所以 $\qquad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

反之, 如果 $\qquad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

则 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线.

矢量积的几何意义是:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 即垂直于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 所成的平面.

这是因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)\\&\quad+a_3(a_1b_2-a_2b_1)\\&=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0\end{aligned}$$

同样 $\qquad \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的长度等于以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积, 且

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$

这是因为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\end{aligned}$$

这就是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta)$$
$$=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta$$

(3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 组成一个右手法则系统，即 $\boldsymbol{a}$ 以右手握拳方向转向 $\boldsymbol{b}$ 时，拇指所指为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向(图 5·12).

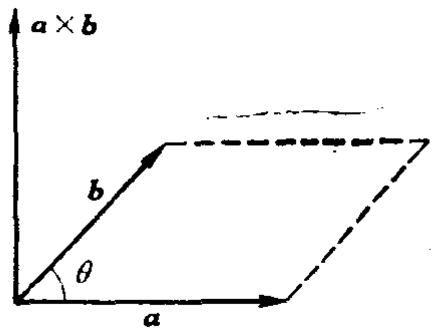

图 5·12

为了说明这一点，取 $\boldsymbol{a}$ 的底线为 x 轴，$\boldsymbol{a}$ 的方向就是 x 轴的正向. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 所在的平面为 xy 平面. 假定由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的角度为 θ, $|\theta|\leqslant\pi$, 则

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|(1,\ 0,\ 0),\ \boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$$

因此
$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|(0,\ 0,\ \sin\theta)$$

即 $\boldsymbol{c}$ 的底线与 z 轴相同，但方向视 θ 的正负而定. 如 $\theta>0$, $\boldsymbol{c}$ 的指向与 z 轴正向相同,不然与 z 轴负向相同,故成右手系统.

特别有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$$

与内积一样,外积也是数学中的一个重要概念,在第七章中介绍外微分形式时还要见到.

例 4 三角形的顶点坐标为 $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(3,\ 4,\ 5)$, $C(-1,\ -2,\ 7)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 三角形的面积 S 为 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$, 而

$$\overrightarrow{AB}=(2,\ 2,\ 2),\ \overrightarrow{AC}=(-2,\ -4,\ 4)$$

所以
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 2\\ -2 & -4 & 4\end{vmatrix}=16\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$$

因此，$$S=\frac{1}{2}\sqrt{16^2+(-12)^2+(-4)^2}=2\sqrt{26}$$

2·3 矢量的混合积

若 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，$\mathbf{c}=(c_x, c_y, c_z)$为三矢量，称$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{c}$ 为三矢量的混合积. 由于

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

所以 $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

另一方面，从图 5·13 可知

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\mathbf{c}|\cos\varphi=\pm|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|h=\pm V$$

其中 V 为以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathbf{c}$ 为邻边的平行六面体的体积. 当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathbf{c}$ 组成右手系统时，φ 为锐角取正号，否则取负号. 因此，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{c}&=(\boldsymbol{b}\times\mathbf{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\mathbf{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\\&=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\mathbf{c}=-(\mathbf{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}\\&=-(\boldsymbol{a}\times\mathbf{c})\cdot\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

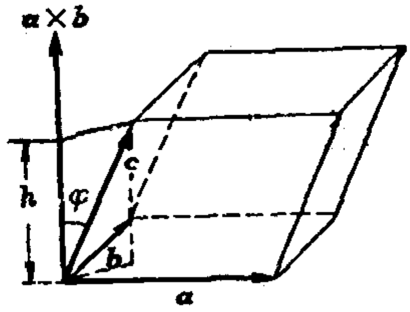

图 5·13

矢量混合积的绝对值表示以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathbf{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 当三矢量共面时，所成的平行六面体体积为零. 即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{c}=0$$

或 $$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

还可以验证：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\mathbf{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{c})\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

因此，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

一般不成立．即结合律不成立．对于外积来说，不但交换律不成立，结合律也不成立．

例 5 求由点 $A(1, 1, 1)$，$B(3, 4, 4)$，$C(3, 5, 5)$，$D(2, 4, 7)$组成的四面体 $ABCD$ 的体积．

解 以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 为邻边的平行六面体的体积是所求四面体体积 V 的 6 倍．即

$$V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$$

而

$$\overrightarrow{AB}=(2, 3, 3),\ \overrightarrow{AC}=(2, 4, 4),\ \overrightarrow{AD}=(1, 3, 6)$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}2 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix}=6$$

因此

$$V=\frac{1}{6}\cdot 6=1$$

例 6 证明点 $A(1, 1, 1)$，$B(4, 5, 6)$，$C(2, 3, 3)$，$D(10, 15, 17)$共面．

解 只须证明由 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 所组成的平行六面体的体积为零．而

$$\overrightarrow{AB}=(3, 4, 5),\ \overrightarrow{AC}=(1, 2, 2),\ \overrightarrow{AD}=(9, 14, 16)$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 2\\ 9 & 14 & 16\end{vmatrix}=0$$

因此 A，B，C，D 四点共面．

习　题

1．已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\varphi=\frac{2}{3}\pi$，且 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$ 计算

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　　(2) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$。

2．已知 $\boldsymbol{a}=(4, -2, 4)$，$\boldsymbol{b}=(6, -3, 2)$，计算：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　　(2) $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$；

(3) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$。

3．求矢量 $\boldsymbol{a}=(4, -3, 4)$ 在矢量 $\boldsymbol{b}=(2, 3, 1)$ 上的投影。

4．已知三角形两边的矢量为 $\overrightarrow{AB}=(2, 1, -2)$，$\overrightarrow{BC}=(3, 2, 6)$，求这三角形的三内角。

5．若 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 的长度。

6．若矢量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于矢量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，矢量 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于矢量 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。

7．设 $\boldsymbol{a}=(2, -3, 1)$，$\boldsymbol{b}=(1, -1, 3)$，$\boldsymbol{c}=(1, -2, 0)$，求

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$；　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；　　(4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$。

8．已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，计算：

(1) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$；　　(2) $|(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$。

9．已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\varphi=\frac{2}{3}\pi$，又 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，计算

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2$；　　(2) $[(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]^2$。

10．已知三角形三顶点是 $A(3, 4, -1)$，$B(2, 0, 3)$，$C(-3, 5, 4)$，求它的面积。

11．一平行四边形以矢量 $\boldsymbol{a}=(2, 1, -1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1, -2, 1)$ 为边，求这平行四边形两对角线夹角的正弦。

12．计算顶点为 $A(2, -1, 1)$，$B(5, 5, 4)$，$C(3, 2, -1)$，$D(4, 1, 3)$ 的四面体的体积。

13．判断下列二组矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是否共面？

(1) $\boldsymbol{a}=(2, 3, 1)$，$\boldsymbol{b}=(1, -1, 3)$，$\boldsymbol{c}=(1, 9, -11)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(3, -2, 1)$，$\boldsymbol{b}=(2, 1, 2)$，$\boldsymbol{c}=(3, -1, -2)$。

14．已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$|\boldsymbol{c}|=7$，求 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 间的夹角 θ。

15．已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 证明

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$$

16．证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

17．证明 $|a\times b|^2=|a|^2|b^2|-(a\cdot b)^2$, 更一般地证明

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

18．证明

$$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$$

19．若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

20．证明三角形三条中线的长度的平方和等于三边长度的平方和的 $\frac{3}{4}$.

21．用矢量方法证明：(1) 平面三角中的余弦定理；(2) 平面上半圆内的圆周角为直角；(3) 对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

22．若矢量 $\boldsymbol{x}$ 同时满足下列两个方程：

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=\alpha, \quad \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是给定的矢量, 且 $a\cdot b\neq0$, α 为给定的数量, 求 $\boldsymbol{x}$.

23．如果存在矢量 $\boldsymbol{x}$ 同时满足 $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$, 证明：

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_1=0$$

第三节　平面与直线

3·1 平 面 方 程

用矢量来写平面与直线的方程就很简单.

(1) 已给空间一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 一个方向 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$, 求过 M_0 这一点及与 $\boldsymbol{n}$ 相垂直的平面方程.

若平面上的任一点为 $M(x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 相垂直（图 5·14）. 记 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$, $\overrightarrow{OM}_0=\boldsymbol{r}_0$, 则

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0$$

这就是平面方程. $\boldsymbol{n}$ 称为平面的法矢量. 这个方程可写成

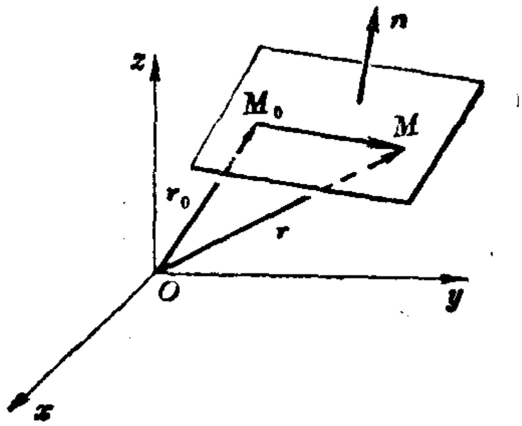

图 5·14

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

也可写成

$$Ax+By+Cz+D=0$$

而 $$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$$

反之，已给方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

只要 A, B, C 不同时为零，则满足这个方程的点组成一张平面.

这是显然的，因为 A, B, C 不同时为零，所以总可以找到 x_0, y_0, z_0, 满足

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

于是 $$D=-Ax_0-By_0-Cz_0$$

如果记满足 $$Ax+By+Cz+D=0$$

的点 (x, y, z) 为 M, (x_0, y_0, z_0) 为 M_0, 以及

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r},\ \overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$$

则 $$Ax+By+Cz+D=0$$

就是 $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

而此即 $$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0$$

也就是 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 永远与 $\boldsymbol{n}$ 相垂直. 所以 M 在过 M_0 点，且与 $\boldsymbol{n}$ 相垂直的平面上. 反之，在这平面上的点都满足此方程. 因之，