前　　言

计算力学是工程力学本科专业的一门重要的必修课。它是学生在学习弹性力学、结构力学等课程的基础上，进一步研究解决复杂的弹性问题以及简单塑性问题的重要方法，对研究解决复杂的工程问题具有重要价值。计算力学涉及的内容十分丰富，本教程仅分析其中的几种主要的数值方法。

就研究对象而言，计算力学主要研究二维平面问题和三维空间问题之类的实体结构，一维杆件系统较简单，可以由材料力学和结构力学解决。就研究对象的性质而言，弹性力学问题是最简单也是最重要的，很多工程问题仅考虑线弹性阶段就可以了，可能不需要考虑非线弹性阶段及塑性变形阶段，但有些问题可能需要考虑非线性问题。因此，本教程以线弹性平面问题为重点，同时考虑线弹性空间问题、材料非线性小变形问题、材料非线性大变形问题。以连续介质为重点，同时介绍了非连续介质问题的研究方法。

在数值分析方法上，重点介绍了有限元方法，同时简单介绍了边界元法和离散元法，以及有限元与边界元耦合方法。

在介绍各种数值方法时，着重分析其基本原理和计算思路，没有涉及具体的编程问题。主要考虑编程难度较大，且在学习具体编程语言如FORTRAN等课程时已有所了解，许多大型工程软件已相当完善，一般不需要自己编制计算程序。但实践证明，要想很好地学习和利用这些大型工程软件分析具体问题，则必须具备一定的计算力学知识，了解其基本原理和计算思路，这正是本教程的目的和任务所在。

因此，本教程有以下几个特点：

(1) 主要研究平面问题，简单介绍空间问题。

(2) 主要研究线弹性问题，简单介绍非线性问题。

(3) 主要研究小变形问题，简单介绍大变形问题。

(4) 主要研究有限元方法，简单介绍边界元法和离散元法。

(5) 主要介绍计算力学的基本原理，没有涉及具体的编程问题。

此外，本教程对繁复的公式推导过程进行了简化，有时甚至直接给出结论。因此，本教程定义为简明教程，以便于初学者学习掌握计算力学的基本方法和原理为主要教学目的。

本教程是在参考了大量相关文献后编写而成的，其中主要的参考文献已经列在书后，很多部分是直接引用编撰的，在此特别予以说明，并对原书作者表示深深的感谢。由于我们能力有限，时间仓促，编写过程中可能会存在不少问题，恳请专家学者及广大读者批评指正。

编 者

2008 年 1 月

目　　次

本章主要对计算力学的地位与特点进行介绍，并对几种常见的计算方法进行简单的分析与比较，最后介绍了本教材的主要内容。

第一章　绪　　论

第一节　计算力学的地位与特点

众所周知，在技术工程领域中存在着许多力学问题，而这些问题最终均可归结为在一定的边界条件下求解微分方程、积分方程或代数方程的问题。

对各种具体问题，可采用理论解析方法、实验研究方法和数值计算方法来解决。理论解析方法解决问题的能力和范围通常很有限，对于复杂的问题，常需引用简化假定，使描述问题的基本方程和边界条件能够用解析方法求解。但在很多情况下，由于过多的简化将会导致不正确甚至错误的结果，因此这种方法并不总是可行的。实验研究方法可以解决理论上解决不了的问题，但周期较长、代价较高，并且存在一定的局限性。

数值计算方法通常要涉及到庞大的计算工作量，随着电子计算机技术的突飞猛进和广泛普及，复杂的数字运算不再成为不可逾越的障碍，在数值计算与计算机图形、图像技术和可视化技术相结合以后，使计算机的模拟水平不断提高，利用计算机进行模拟分析，不仅省工省时，还可以进行重复试验。现在，数值计算法已成为解决工程技术领域力学问题最强有力的工具，并形成了现代力学的一个重要分支——计算力学。

计算力学是根据力学理论，利用现代电子计算机和各种数值方法，解决力学中实际问题的一门新兴学科。其研究内容和应用范围极为广泛，已渗透至力学的各个分支，在固体力学、岩土力学、水力学、流体力学、生物力学等领域发挥着重要作用，并促进了这些学科的进一步发展。

第二节　几种数值计算方法的比较

一、数值计算方法概述

数值计算方法是计算力学的核心内容。数值计算方法有很多种，其中具有代表性的方

法包括：有限差分法、变分法、有限元法以及加权残量法、边界元法、离散元法等。这些方法的实质绝大多数是将偏微分方程的边值问题转换成代数方程问题，然后用计算机求出有限个点上基本未知量的函数值[1]。

有限差分法是依据有限差分技术，将问题的基本微分方程和边界条件化为差分方程，从而将求解微分方程的问题变换成求解代数方程组的问题，解算后能在一系列的离散点上给出问题的近似解。虽然有限差分法能处理某些相当困难的问题，但当求解域的几何形状复杂时，应用该法求解精度会受到限制，甚至在数学处理上会发生困难。现有的商业软件FLAC系列，就属于有限差分方法。

有限元法的基本思想是将连续的结构离散成有限个单元，并在每一单元中设定有限个结点，将连续体看作只在结点处相连结的一组单元的集合体，同时选定场函数的结点值作为基本未知量，并在每一单元中假设一近似插值函数以表示单元中场函数的分布规律，进而利用力学中的变分原理去建立用以求解结点未知量的有限单元法方程，从而将一个连续域中的无限自由度问题化为离散域中的有限自由度问题。一经求解就可利用解得的结点值和设定的插值函数确定单元以至整个域内的场函数。由于单元可设计成不同的几何形状，各单元可以有不同的力学性质与力学参数，因而可灵活地模拟和逼近复杂的求解域以及复杂的非均质、非线性或各向异性问题。而且只要插值函数满足一定要求，随着单元数目的增加，解的精度会不断提高且最终收敛于问题的精确解。

边界元法是在有限元法之后发展起来的一种数值计算方法。其基本思想是将问题的控制方程转换成边界上的积分方程，然后引入位于边界上的有限个单元，将积分方程离散求解。与有限元法、有限差分法这类区域性方法不同，边界元法只在边界上进行离散划分单元，离散化后的方程组只含有沿边界上的节点未知量，实质上降低了问题的维数，使求解方程的阶数降低，因而数据准备方便，计算时间缩短。另外，它引用了问题的基本解，具备解析与离散相结合的特点，因而计算精度较高，目前在各领域获得了越来越广泛的应用。

近20年来，离散元法有了长足的发展，已成为解决岩土力学问题的一个重要的数值方法，越来越受到人们的重视。通常工程中所见到的岩体形态常呈非连续结构，所以很难用解决连续介质力学问题的有限元法或边界元法等数值方法来进行求解，而离散元法充分考虑了岩体结构的不连续性，较适合于解决节理裂隙岩体的力学问题。

离散元法也像有限元法一样将区域划分成单元，但单元结点可以分离，即一个单元与其邻近单元可以接触，也可以分开。单元之间相互作用的力可以根据力和位移的关系求出，而单元的运动则完全根据该单元所受的不平衡力和不平衡力矩的大小按牛顿运动定律确定。

离散元法是一种显式求解的数值方法。用显式法计算时，所有方程式一侧的量都是已知的，而另一侧的量只要用简单的代入法就可求得。这与隐式法不同，隐式法必须求解联

立方程组。在用显式法时，假定在每一迭代时步内，每个块体单元仅对其相邻的块体单元产生力的影响，这时时步就需要取得足够小，以使显式稳定。由于用显式法时不需要形成矩阵，因此可以考虑大的位移和非线性，而不必花费额外的计算时间。

二、几种数值计算方法的比较

1. 有限元法与边界元法比较

有限元法和边界元法属离散化数值解法，都是建立在坚实理论基础上的近似方法，它们有各自的优缺点和局限性。

有限元法和边界元法都要以一个试探解函数来实现对求解区域的离散，这两种方法在选择这些函数时采用了不同的准则。有限元法采用的试探解函数首先满足边值问题的主要边界条件，而在域内和边界上不满足控制微分方程，然后在整个求解区域上采用变分原理来寻求控制微分方程的近似满足。边界元法需要试探函数首先满足控制微分方程，而不必满足边界条件，然后通过伽辽金法、配置法或者最小二乘法把问题定义在求解区域的边界上，在某种平均的意义上来寻求边界条件的近似满足。

边界元法的缺点之一是用边界元法求解边值问题需要找到控制微分方程的一个基本解或控制微分方程在求解区域上的格林函数，这对于某些问题是十分困难的。为了保证边界元法求解的控制方程为常系数偏微分方程，一般还要求求解区域是均匀介质。因此，边界元法比较难于求解控制微分方程为非线性的问题和含有非均匀介质的问题，而有限元法则可适用于求解复杂的非线性方程和含有非均匀介质的问题。

有限元法的主要缺点之一是不太适合求解无限边界问题，而只能求解有界问题，因为用有限个单元离散无限域显然是不可能的。而边界元法采用的基本解自然满足在场域无限远处的条件，因此边界元法可用于求解无限场域的边值问题。

用有限元法难于处理的另一类问题是域内具有应力奇异的问题。在固体力学问题中，这类应力奇异通常发生在不规则的凹角或孔洞附近。由于应力奇异可能引起断裂扩展，因此在奇异点附近能否得到一个较为精确的解答，有时就显得十分重要。但是在奇异点处，理论上应力为无限大，用有限元法可能产生毫无意义的分析结果。类似的情况也可能发生在有集中载荷处。在这些情况下，不论单元划分得多么细小，用有限元法得到的结果通常不可能反映出它们在奇异点附近的迅速变化。而用边界元法就比较容易处理上述问题，边界元法在理论上能够计算任意点处的解答，不论这些点非常遥远或是在距离可能的奇异点为任意小的距离处，因为边界元法实际上摆脱了在有限元法中存在的这样一个约束，即必须在一个给定的网格点上寻求问题的解答。

除了对于狭长形状的解域外，边界元法的求解精度一般高于有限元法。边界元法对两种不同类型的变量（如应力分析中的位移和应力）一般都能获得较好的结果。有限元法一般只是对于控制微分方程中所考虑的变量（如位移）的求解精度比较高，但对于这些

变量的导数所得结果（如应力）就不很精确，而且通常使得它们在单元之间成为不连续。如果在介质中存在应力集中区域，这个问题将更加突出。

由于边界元法的离散处理仅涉及边界，整个域内不再出现待求参数，因此其待求参数的数目可以比有限元法（需同时将全域和边界离散）所用的少很多，使方程组规模缩小，故边界元法可以用较少数量的未知数分析同样的问题。边界元法的这个特性使得它在三维问题中特别具有吸引力，因为在三维问题中求解区域的外表面对体积的比值是很小的。由于边界元法能使问题降一维，并且分析同样一个问题比有限元法简化了输入数据的准备工作，因此边界元法一般能节省计算机内存、机时和人的数据准备工作量，使解题较为经济。

边界元法在得出边界近似解之后，虽得不到解析显式，但可以逐点计算域内点的近似解，而有限元法则必须同时对所有域内结点联立求解。因此，当只需对个别点求解时，边界元法较简便。

边界元法中的每个待求参数会影响每个边界结点，因此最终得到的系数矩阵是一个满阵，而且往往是不对称的，这一性质对方程组的求解不利。有限元法采用分片多项式基函数，它所得到的系数矩阵是带状的、对称的，因此具有较好的数学性态。

近年来已有人将边界元法与有限元法结合起来，用于求解流体力学、电磁场、热传导、流体与结构互相作用等问题，这样可使不同的方法在不同的区域上发挥各自的长处。这种结合的求解方法，将会更多地用于其他领域里的一些问题，是解决工程问题很有前途的一种方法。

2. 离散单元法与有限元法、边界元法的比较

有限单元法的理论基础是基于最小势能的变分原理，边界元法的理论基础是 Betti 互等定理，离散单元法的理论基础是结合不同本构关系的牛顿第二定律。

离散单元法是专门用于解决非连续介质大变形问题而提出的。离散元法同有限元法一样，也是对整个区域进行离散化，即将所研究的区域划分成若干多边形块体单元。离散单元法最大特点是单元之间不再必须保持位移协调的条件，单元间可视为角－角接触、角－边接触或边－边接触，而且随着单元的平移和转动，允许调整各个单元之间的接触关系。最终，块体单元可能达到平衡状态，也可能一直运动下去。

离散单元法除了用于边坡、采场和巷道的稳定性研究以及颗粒介质微观结构的分析外，已扩展到研究地震、爆炸等动力过程和地下水渗流、热传导等物理过程。

离散元法与其他数值方法（如有限元法、边界元法等）耦合更能发挥各自的优点。例如用边界元法考虑远场应力的影响模拟弹性的性质，用有限元法作为中间过渡考虑塑性变形，再用离散元法考虑近场不连续变形的情况，从而极大地扩展了数值方法的解题范围。

一维问题或二维均质、线弹性、连续问题，一般可以利用解析方法解决。计算力学的

主要优势在于求解复杂的二维问题和三维问题，特别是二维非线性及三维非线性问题，而且问题越复杂，越能体现计算力学的特长和优势。例如，层状岩体中的地下工程一般属于二维或三维问题，并且具有非均质、非线弹、非连续等特性。因此，本教材的主要目的是介绍此类较复杂问题的计算力学方法。但复杂问题的计算力学方法往往是以简单的线弹性问题的计算力学方法为基础的，例如非线性问题的求解，是通过线弹性方法的多次迭代来实现的，因而简单的线弹性问题的计算力学方法也是本教材的重点之一。只有深入掌握了简单的线弹性问题的计算力学方法，才能学习和掌握复杂问题的计算力学方法。

本教材第二章首先介绍了线弹性平面问题常应力单元有限元方法，作为本教材的基础；第三章在第二章基础上介绍线弹性平面问题的复杂单元有限元方法；第四章介绍了线弹性三维问题有限元方法；第五章介绍非线性的平面问题有限元方法；第六章简单介绍边界元方法、离散元方法，以及边界元与有限元耦合方法。

本章详细介绍弹性平面问题三角形三结点单元有限元法的原理、方法和步骤，并作为本书第三、四、五章更复杂单元分析的基础。包括弹性力学平面问题的矩阵表示、单元位移模式、形函数的概念及性质、单元应变矩阵与单元应力矩阵、单元劲度矩阵、单元等效结点荷载列阵、整体平衡方程的建立、解答的收敛性。最后给出了常应变单元的解题示例。

第二章 弹性力学平面问题常应变单元法

在用有限元法分析弹性平面问题时，三角形三结点单元是最常用的一种单元。由于该单元假设位移模式是线性的，单元内的应力和应变都为常量，所以又被称为常应变单元。本章就以这种最简单的单元为例，详细介绍弹性平面问题有限元法的原理、方法和步骤，并作为本书第三、四、五章更复杂单元分析的基础。

第一节 常应变单元有限元法分析过程简述

有限元法分析过程主要包括结构体单元划分、单元分析和整体分析三部分。平面问题常应变单元的分析过程最为简单，主要包括建立由三角形单元组成的离散化模型、确定单元位移模式、计算等效结点荷载、计算劲度矩阵、建立支配方程并求解结点位移、计算单元应力及成果整理。

（1）建立由三角形单元组成的离散化模型，也就是将连续体划分为有限个互不重叠、互不分离的三角形单元，同时按顺序进行单元编号和结点编号，并按计算程序的要求输入各种信息。如单元信息，即单元结点的整体编码、单元厚度和单元材料类型等；结点信息，即结点坐标；材料信息，即材料的弹性常数；荷载信息，即外部荷载作用位置及大小等；约束信息，即根据连续结构体的位移约束情况，给出单元节点不同方向上的约束支承情况。

（2）确定单元位移模式。即给出单元内部任一点位移分量与坐标的函数关系，按此关系，单元内各点的位移可由结点的位移通过插值来获得。

(3) 计算等效结点荷载。就是把作用在单元内部的体积力、集中力及作用在单元边界上的面力荷载，按照虚功原理转换成结点荷载$\{R\}^e$。先计算每个单元的等效结点荷载，然后将该结点相连的单元上的荷载对该结点的贡献进行叠加，形成整体结构的结点荷载列阵$\{R\}$。

(4) 计算劲度矩阵。首先计算每个单元的劲度矩阵$[k]$，然后集合形成整体结构的劲度矩阵$[K]$。

(5) 建立支配方程，求解结点位移。在求出$\{R\}$和$[K]$之后，便可列出其整体平衡方程组$[K]\{\delta\}=\{R\}$，又称支配方程。解此方程，即可求出整体结点位移列阵$\{\delta\}$。

(6) 计算单元应力。先由整体结点位移列阵$\{\delta\}$求出各单元的结点位移列阵$\{\delta\}^e$，然后利用公式$\{\sigma\}=[S]\{\delta\}^e$逐个计算每个单元的应力。

(7) 成果整理。根据工程需要，对位移和应力成果绘制必要的图表，并提出分析性的意见和结论。

在以上步骤中，第（2）至第（6）步工作量较大，可由计算机来完成，第（1）步和第（7）步以往大多由人工进行，随着有限元应用水平的不断提高和计算机图形、图像处理技术的发展，已开发出许多有限元前后处理的应用软件，如 ANSA、MSC、Patran 等，这两步的大部分工作也主要由计算机完成。尽管如此，对于一些复杂的工程问题，在很多方面还需人工进行处理，其效果往往对计算结果的好坏起着决定性作用。因此，要能准确、成功地应用有限元分析软件分析具体工程问题，就必须对有限元的原理与计算过程有清晰的了解和掌握。

第二节　弹性力学平面问题的矩阵表示

在有限单元法中，为了便于运算和编制程序，许多公式常采用矩阵表示和矩阵运算，矩阵表示是有限元法的特征之一。

本节主要介绍弹性平面问题的基本方程，如平衡方程、几何方程与物理方程，以及边界条件的矩阵表示。

一、平衡方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+F_{bx}=0\\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+F_{by}=0\end{aligned}\right\}$$

用矩阵表示为

$$[A]^T\{\sigma\}+\{F_b\}=0 \tag{2-1}$$

其中

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix},\quad \{F_b\}=\begin{Bmatrix}F_{bx}\\ F_{by}\end{Bmatrix},\quad [A]=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$\{\sigma\}$、$\{F_b\}$ 和 $[A]^T$ 分别称为应力列阵、体力列阵和微分算子矩阵。

二、几何方程

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

用矩阵表示为

$$\{\varepsilon\}=[A]\{f\} \tag{2-2}$$

其中，$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x\quad \varepsilon_y\quad \gamma_{xy}]^T$，$\{f\}=[u\quad v]^T$

$\{\varepsilon\}$ 和 $\{f\}$ 分别称为应变列阵和位移列阵。

三、物理方程

平面应力问题的物理方程

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy}&=G\gamma_{xy}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\}$$

用矩阵表示为

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{2-3}$$

其中 $$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2}\end{bmatrix} \tag{2-3a}$$

只与弹性常数 E 和 μ 有关，称为平面应力问题的弹性矩阵。

平面应变问题的物理方程也可以表示成式（2-3），但须将［D］中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$，μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$。

四、边界条件

应力边界条件

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{xy} = F_{sx} \\ m\sigma_y + l\tau_{xy} = F_{sy} \end{cases} \quad \text{在 } s_\sigma \text{ 上}$$

用矩阵表示为

$$[n]\{\sigma\}_s = \{F_s\} \tag{2-4}$$

其中，$[n] = \begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix}$，$\{F_s\} = \begin{Bmatrix} F_{sx} \\ F_{sy} \end{Bmatrix}$

$[n]$ 和 $\{F_s\}$ 称为边界外法线方向余弦矩阵和给定边界面力列阵。

位移边界条件

$$u_s = \bar{u}, \quad v_s = \bar{v} \qquad \text{在 } s_u \text{ 上}$$

用矩阵表示为

$$\{f\}_s = \{\bar{f}\} \tag{2-5}$$

其中，$\{f\}_s = [u_s \quad v_s]^T$ 和 $\{\bar{f}\} = [\bar{u} \quad \bar{v}]^T$ 称为位移函数在边界上的值和已知边界的给定位移列阵。

第三节　单元位移模式

由本章第一节可知，在建立实际结构的离散化模型之后，首先要选定单元位移模式，在有限元法中，单元内任一点的位移是按照一定位移模式，通过插值的方法用单元结点位移去近似计算的。因此，位移模式选择是否合理，直接决定了单元位移能否收敛于真实位移，是单元分析最关键的一步。

一、位移模式的选择

在选择位移模式时，最简单的做法是采用多项式位移模式。即将位移分量看作是坐标的多项式函数。对于平面问题，可以表示为

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \cdots$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \cdots$$

一般而言，多项式的项数越多，结果也就越精确，但项数多少要受单元形式的限制。图 2-1 所示的三结点三角形单元（简称为 T_3 单元）总共有 6 个自由度，所以多项式中应含有 6 个待定系数，为此应采用如下的位移模式。

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

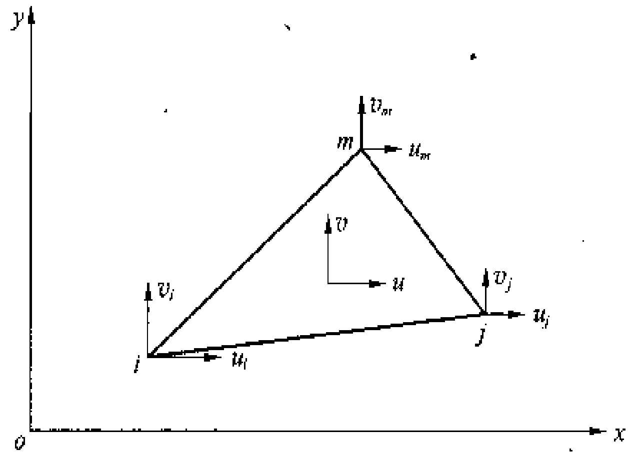

图2-1　三结点三角形单元

$$v=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y \tag{2-6}$$

式中　α_1、α_2、α_3 和 β_1、β_2、β_3 为待定系数，可以由单元的6个结点位移分量来确定。

由此可见，一旦待定系数确定了，单元内位移变化规律就可完全确定，对于三角形三结点单元，位移函数是 x、y 的线性函数。

二、待定系数的确定　形函数

设图2-1中结点 i、j、m 的坐标分别为 $(x_i,\ y_i)$、$(x_j,\ y_j)$、$(x_m,\ y_m)$，将它们代入式（2-6），得到

$$\begin{aligned}
u_i&=\alpha_1+\alpha_2x_i+\alpha_3y_i \qquad & v_i&=\beta_1+\beta_2x_i+\beta_3y_i\\
u_j&=\alpha_1+\alpha_2x_j+\alpha_3y_j \qquad & v_j&=\beta_1+\beta_2x_j+\beta_3y_j\\
u_m&=\alpha_1+\alpha_2x_m+\alpha_3y_m \qquad & v_m&=\beta_1+\beta_2x_m+\beta_3y_m
\end{aligned}$$

联立解上面左边3个方程，可得

$$\alpha_1=\frac{1}{2A}\begin{vmatrix}u_i & x_i & y_i\\ u_j & x_j & y_j\\ u_m & x_m & y_m\end{vmatrix},\quad \alpha_2=\frac{1}{2A}\begin{vmatrix}1 & u_i & y_i\\ 1 & u_j & y_j\\ 1 & u_m & y_m\end{vmatrix},\quad \alpha_3=\frac{1}{2A}\begin{vmatrix}1 & x_i & u_i\\ 1 & x_j & u_j\\ 1 & x_m & u_m\end{vmatrix}$$

其中

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix}$$

为三角形 ijm 的面积，为了使求出的面积不为负值，结点 i、j、m 的次序必须是逆时针转向，如图2-1所示。

将求得的 α_1、α_2、α_3 代入式（2-6）中的第一式，经整理后得到

$$u=\frac{1}{2A}[(a_i+b_ix+c_iy)u_i+(a_j+b_jx+c_jy)u_j+(a_m+b_mx+c_my)u_m] \tag{a}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= -\begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix} = y_j - y_m \\ c_i &= \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} = -(x_j - x_m) \end{aligned}\right\} \quad (i,j,m) \tag{2-7}$$

同理可得

$$v = \frac{1}{2A}[(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m] \tag{b}$$

如果令

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (i,j,m) \tag{2-8}$$

位移模式（a）和式（b）可改写为

$$\left.\begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

用矩阵表示为

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e \tag{2-10}$$

其中，$\{f\} = [u,\ v]^T$ 为单元位移函数列阵，$\{\delta\}^e = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^T$ 为单元结点位移分量列阵，而

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \tag{2-11}$$

式（2-9）或式（2-10）即为三结点三角形单元（T_3 单元）的位移模式，其中 N_i、N_j、N_m 是坐标的线性函数［式（2-8）］，反映了单元的位移形态，因而称为位移形态函数，简称为形函数，则矩阵［N］称为形函数矩阵。

三、形函数的性质

为便于讨论形函数的性质，将式（2-8）改写为

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) = \frac{1}{2A}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \quad (i,j,m)$$

由式（2-7）可以看出，a_i、b_i、c_i、a_j、b_j、c_j 和 a_m、b_m、c_m 分别为行列式 $2A$ 的第一行、第二行和第三行各元素的代数余子式。

根据行列式的运算法则，可以得到形函数的性质如下。

1. 形函数 N_i 在 i 点的数值为 1，在 j 点及 m 点的数值为零，即

$$
\begin{aligned}
N_i(x_i,y_i) &= \frac{1}{2A}(a_i+b_ix_i+c_iy_i)=1 \\
N_i(x_j,y_j) &= \frac{1}{2A}(a_j+b_jx_j+c_jy_j)=0 \\
N_i(x_m,y_m) &= \frac{1}{2A}(a_i+b_ix_m+c_iy_m)=0
\end{aligned} \tag{2-12}
$$

同理：$N_j(x_i,y_i)=0$，$N_j(x_j,y_j)=1$，$N_j(x_m,y_m)=0$，$N_m(x_i,y_i)=0$，$N_m(x_j,y_j)=0$，$N_m(x_m,y_m)=1$。

此外，从式(2-9)中可以看出：当 $u_i=1$、$u_j=u_m=0$ 时，得到 $u=N_i$；当 $v_i=1$、$v_j=v_m=0$ 时，得到 $v=N_i$。所以，函数 N_i 表示仅仅在结点 i 发生单位位移时，在单元内部产生的位移的分布形态，其他两个形函数也具有同样的性质。

2. 在单元任一点上，三个形函数之和等于 1

$$
N_i(x,y)+N_j(x,y)+N_m(x,y)=1 \tag{2-13}
$$

证明如下：

$$
\begin{aligned}
& N_i(x,y)+N_j(x,y)+N_m(x,y) \\
&= \frac{1}{2A}(a_i+b_ix+c_iy+a_j+b_jx+c_jy+a_m+b_mx+c_my) \\
&= \frac{1}{2A}[(a_i+a_j+a_m)+(b_i+b_j+b_m)x+(c_i+c_j+c_m)y]
\end{aligned}
$$

由式（2-7）得：$a_i+a_j+a_m=2A$，$b_i+b_j+b_m=0$，$c_i+c_j+c_m=0$，所以有 $N_i(x,y)+N_j(x,y)+N_m(x,y)=1$

由此可见，三个形函数中只有两个是独立的。

根据形函数的上述性质，并注意到位移分量都是三个形函数的线性组合，可见单元内位移分量 u 和 v 的变化规律如图 2-2 中的斜截三棱柱所示，是坐标的线性函数。

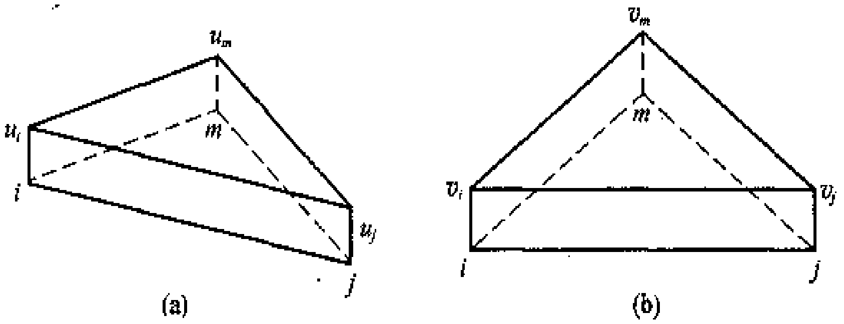

图 2-2 单元内位移分布规律

第四节　单元应变矩阵与单元应力矩阵

本节将利用选定的位移模式，通过几何方程、物理方程建立用结点位移表示单元的应力公式和应变公式。

一、单元应变矩阵

将单元位移模式（2-10）代入式（2-2），得到以结点位移表示单元应变的矩阵方程

$$\{\varepsilon\}=[A][N]\{\delta\}^e=[B]\{\delta\}^e \tag{2-14}$$

其中

$$[B]=[A][N]=[B_i \quad B_j \quad B_m] \tag{2-15}$$

$$[B_i]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix}\quad(i,j,m) \tag{2-16}$$

矩阵［B］称为单元应变矩阵，［B_i］称为其子矩阵。

对 T_3 单元，将由式（2-8）给出的形函数 N_i 代入式（2-16），得到

$$[B_i]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_i & 0\\ 0 & c_i\\ c_i & b_i\end{bmatrix}\quad(i,j,m) \tag{2-17}$$

对于同一单元，A 以及 b_i、c_i（i，j，m）仅是与三角形单元的几何尺寸有关的常量，故［B_i］及［B］中元素均为常量，从而 T_3 单元内的应变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy} 也是常量。因此，T_3 单元也称为平面问题的常应变单元。

二、单元应力矩阵

由本章第二节知，平面问题的物理方程为

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{2-18}$$

将式（2-14）代入上式，得到用结点位移表示单元应力的表达式

$$\{\sigma\}=[D][B]\{\delta\}^e=[S]\{\delta\}^e \tag{2-19}$$

式中　$[S]=[D][B]=[S_i \quad S_j \quad S_m]$称为单元应力转换矩阵。其中，$[S_i]=[D][B_i]$（$i$，$j$，$m$）。