# 前　言

本书是按教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标的规格》以及三年制高等职业教育工科类专业的特点和实际需要精心编写的。

本书分上、下两册。上册包括函数、极限、一元函数微积分学，下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、微分方程。各章配有习题，书末附有习题答案。教学时数为120～140学时。

本书总的编写原则是注重实际应用，强化实践能力的培养，突出教学模型的建立及数学工具的使用。本书编排是按照由浅入深、由易到难。由具体到抽象，循序渐进的原则进行的，并做到了结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，通俗易懂。本书在知识的处理上，符合学生的认识规律，着重培养学生的数学素养和综合能力，具有可读性，同时兼顾了各省专接本对高等数学考试内容的要求。

本书第一册由李叙主编(三、四、五章)，盛伟副主编(一、二章)。第二册由邹丽红主编(八、九、十章)，齐艳敏副主编(六、七章)。全套书由何永生主审。

齐齐哈尔铁路工程学校数学教研室的全体教师审阅了全书稿，提出了许多宝贵意见，在此我们一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限和时间仓促，书中难免存在一些缺点和错误，敬请广大师生、读者批评指正。

编者

2007年5月

需要全本请访问 www.ertongbook.com

# 目　录


第一章　函数与极限…… 1
第一节　函数…… 1
习题 1-1…… 9
第二节　极限的概念…… 11
习题 1-2…… 20
第三节　无穷小与无穷大…… 21
习题 1-3…… 24
第四节　极限运算法则…… 24
习题 1-4…… 29
第五节　极限存在定理　两个重要极限…… 30
习题 1-5…… 34
第六节　无穷小的比较…… 35
习题 1-6…… 37
第七节　函数的连续性与间断点…… 37
习题 1-7…… 42
第八节　连续函数的基本性质与闭区间上连续函数的性质…… 43
习题 1-8…… 47
第九节　双曲函数…… 48
习题 1-9…… 50
总习题一…… 50
第二章　导数与微分…… 53
第一节　导数概念…… 53
习题 2-1…… 60
第二节　函数的求导法则…… 61
习题 2-2…… 66
第三节　高阶导数…… 68
习题 2-3…… 71
第四节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数…… 71
习题 2-4…… 76
第五节　函数的微分…… 77
习题 2-5…… 85
总习题二…… 86
第三章　微分中值定理与导数的应用…… 89
第一节　微分中值定理…… 89
习题 3-1…… 93
第二节　洛必达法则…… 94
习题 3-2…… 97
第三节　函数的单调性与曲线的凹凸性…… 98
习题 3-3…… 106
第四节　函数的极值与最大值最小值…… 107

习题 3-4…… 113
第五节 函数图形的描绘…… 115
习题 3-5…… 117
第六节 曲率…… 117
习题 3-6…… 123
总习题三…… 123
**第四章 不定积分**…… 125
第一节 不定积分的概念与性质…… 125
习题 4-1…… 132
第二节 换元积分法…… 133
习题 4-2…… 143
第三节 分部积分法…… 144
习题 4-3…… 148
第四节 有理函数及三角函数有理式的积分…… 149
习题 4-4…… 154
第五节 积分表的使用…… 154
习题 4-5…… 157
总习题四…… 157
**第五章 定积分及其应用**…… 159
第一节 定积分的概念与性质…… 159
习题 5-1…… 167
第二节 微积分基本公式…… 168
习题 5-2…… 172
第三节 定积分的换元法和分部积分法…… 173
习题 5-3…… 178
第四节 广义积分…… 179
习题 5-4…… 183
第五节 定积分的应用…… 184
习题 5-5…… 198
总习题五…… 200
**附录 积分表**…… 202
**习题答案与提示**…… 213

# 第一章　函数与极限

函数是近代数学的基本概念之一。高等数学就是以函数为主要研究对象的一门数学课程。极限是贯穿高等数学始终的一个重要概念，它是这门课程的基本推理工具。连续则是函数的一个重要性态，连续函数是高等数学研究的主要对象。本章将介绍函数、极限与连续的基本知识，为以后的学习奠定必要的基础。

## 第一节　函数

### 一、函数的概念

读者在中学里已经学过有关函数的基本知识，但为了以后更好地学习高等数学，我们把有关的内容系统地复习一下。

**定义**　设 $D$ 是非空实数集，若存在一个对应法则 $f$，对于每一个 $x \in D$，总有唯一确定的值 $y$ 与之对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数。记为

$$y = f(x),\quad x \in D$$

其中 $x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量，$D$ 称为定义域，记作 $D_f$，即 $D_f = D$。

函数定义中，对每个 $x \in D$，按对应法则 $f$，总有唯一确定的值 $y$ 与之对应，这个值称为函数 $f$ 在 $x$ 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y = f(x)$。因变量 $y$ 与自变量 $x$ 之间的这种依赖关系，通常称为函数关系。函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的值域，记作 $f(D)$ 或 $R_f$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}。$$

需要指出，按照上述定义，记号 $f$ 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 $x$ 和因变量 $y$ 之间的对应法则，而后者表示与自变量 $x$ 对应的函数值。但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x),\ x \in D$”或“$y = f(x),\ x \in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 $f$。

表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 $f$ 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如“g”、“F”、“$\varphi$”等。相应地，函数可记作 $y = g(x)$，$y = F(x)$，$y = \varphi(x)$ 等。有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y = y(x)$。但在同一个问题中，讨论到几个不同的函数时，为了表示区别，需用不同的记号来表示它们。

构成函数的要素是:定义域$D_f$及对应法则$f$。如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的。

函数的定义域通常按以下两种情形来确定:一种是对有实际背景的函数,根据实际背景中变量的实际意义确定。例如,在自由落体运动中,设物体下落的时间为$t$,下落的距离为$s$,开始下落的时刻$t=0$,落地的时刻$t=T$,则$s$与$t$之间的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in[0,T]。$$

这个函数的定义域就是区间$[0,T]$;另一种是对抽象地用算式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域。在这种约定之下,一般的用算式表达的函数可用"$y=f(x)$"表达,而不必再表出$D_f$。例如,函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是闭区间$[-1,1]$,函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是开区间$(-1,1)$。

有时会遇到给定$x$值,对应的$y$值有多个的情形,为了叙述方便称之为多值函数。而符合上述定义的函数称为单值函数。对于多值的情形,我们可以限制$y$的值域使之成为单值再进行研究。例如,设变量$x$和$y$之间的对应法则由方程$x^2+y^2=r^2$给出。显然,对每个$x\in[-r,r]$,由方程可确定出对应的$y$值,当$x=r$或$-r$时,对应$y=0$一个值;当$x$取$(-r,r)$内任一个值时,对应的$y$有两个值。所以这方程确定了一个多值函数。若附加"$y\geq 0$"的条件,就可得到一个单值分支$y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$;附加"$y\leq 0$"的条件,就可得到另一个单值分支$y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$。

**例1** 确定函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

的定义域。

解 显然,其定义域为满足不等式

$$x^2-2x-3>0$$

的$x$值的集合,解此不等式,则得其定义域为:

$$\{x|x>3\text{或}x<-1\},$$

即

$$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)。$$

**例2** 确定函数



需要全本请访问 www.ertongbook.com

$$f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$$

的定义域。

解　该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}3+2x-x^2\geq 0\\ x-2>0\end{cases}$$

的 $x$ 值的全体，解此不等式，得其定义域

$$\{x|2<x\leq 3\}。$$

例 3　设函数 $f(x)=x^3-2x+3$，求 $f(1)$，$f(-\frac{1}{a})$，$f(t^2)$（其中 $a\neq 0$）。

解　$f(1)=1^3-2\times 1+3=2$；

$$f(-\frac{1}{a})=(-\frac{1}{a})^3-2(-\frac{1}{a})+3=-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a}+3=\frac{3a^3+2a^2-1}{a^3}；$$

$$f(t^2)=(t^2)^3-2(t^2)+3=t^6-2t^2+3。$$

注意，函数 $y=C$（$C$ 为常数）的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，这时不论自变量取何值，对应的函数值均为 $C$。

二、函数的表示法

函数 $f(x)$ 的具体表达方式是不尽相同的，这就产生了函数的不同表示法，函数的表示法通常有三种：公式法、表格法、图示法。

1。以数学式子表示函数的方法叫做函数的公式表示法，上述例子中的函数都是以公式表示的，公式法的优点是便于理论推导和计算。

2。以表格形式表示函数的方法叫做函数的表格表示法，它是将自变量的值与对应的函数值列为表格，如三角函数表、对数表等等。表格法的优点是所求的函数值容易查得。

3。以图形表示函数的方法叫做函数的图示法。这种方法在工程技术上应用较普遍，图示法的优点是直观形象，且可看到函数的变化趋势。

三、分段函数

有些函数虽然也是以数学式子表示，但是它们在定义域的不同范围具有不同的表达式。这样的函数叫做分段函数，分段函数在数学上和工程技术中以及日常生活中都会经常遇到。

例 4　旅客乘坐火车可免费携带不超过 20 公斤的物品，超过 20 公斤而不超过 50 公斤的部分每公斤交费 0.20 元，超过 50 公斤的部分每公斤交费 0.30 元。求运费与携带物品重量的函数关系。

解　设物品重量为 $x$ 公斤，应交运费为 $y$ 元。由题意可知这时应考虑三种情况：

第一种情况是重量不超过 20 公斤，这时

$$y=0,\ x\in[0,20]。$$

第二种情况是重量大于 20 公斤但不超过 50 公斤，这时

$$y=(x-20)\times 0.2,\ x\in(20,50]。$$

最后是重量超过50公斤，这时

$$y=(50-20)\times 0.2+(x-50)\times 0.3,\ x>50\ 。$$

因此，所求的函数是一个分段函数

$$y=\begin{cases}0, & 0\le x\le 20,\\ 0.2(x-20), & 20<x\le 50,\\ 0.2(50-20)+0.3(x-50), & x>50。\end{cases}$$

在求分段函数的函数值时，应先确定自变量取值的所在范围，再按相应的式子进行计算。

例5　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，如图 1-1 所示。

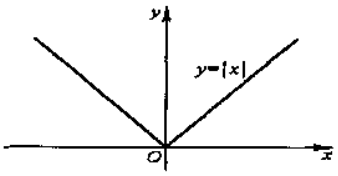


图　1-1

例6　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,1,0\}$，如图 1-2 所示。对于任何实数 $x$，下列关系式成立：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot x\ 。$$

例7　设 $x$ 为任一实数。不超过 $x$ 的最大整数称为 $x$ 的整数部分，记作 $[x]$。取整函数

$$y=[x]$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=Z$，如图 1-3 所示。

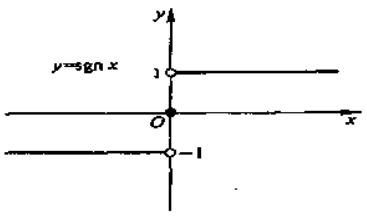


图　1-2

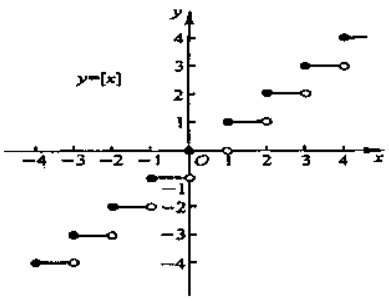


图　1-3

## 四、反函数

一般地说，设函数 $y=f(x)$，当变量 $x$ 在区域 $X$ 内变化时，变量 $y$ 在区域 $Y$ 内变化。如果对于变量 $y$ 在区域 $Y$ 内任取的一个值 $y_0$，变量 $x$ 在区域 $X$ 内对应一个值 $x_0$，使 $y_0=f(x_0)$，这就是说变量 $x$ 是变量 $y$ 的函数，用 $x=\varphi(y)$ 表示，我们称函数 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$。

显然，如果 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，那么函数 $y=f(x)$ 也是函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数。

在习惯上自变量用 $x$ 表示，因变量用 $y$ 表示，这样，函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 就表示为 $y=f^{-1}(x)$ 表示。

由函数 $y=f(x)$ 求它的反函数的步骤是：由方程 $y=f(x)$ 解出 $x$，得到 $x=f^{-1}(y)$；将函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 $x$ 和 $y$ 分别换为 $y$ 和 $x$，这样，得到反函数 $y=f^{-1}(x)$。

例 8　求函数 $y=2x-3$ 的反函数。

解　由 $y=2x-3$，解出，得

$$x=\frac{1}{2}(y+3)$$

习惯上表示为

$$y=\frac{1}{2}(x+3),$$

这就是函数 $y=2x-3$ 的反函数。

如果两个函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数，那么，它们的图象对称于直线 $y=x$（图 1-4）。

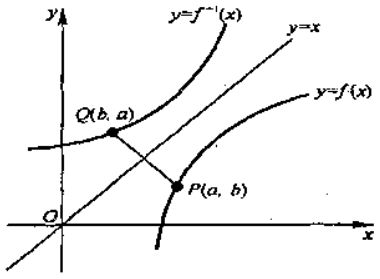


图　1-4

应当指出，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间存在着这样的关系：

$f^{-1}[f(x)]=x$ 和 $f[f^{-1}(x)]=x$。

**五、初等函数**

**1. 基本初等函数**

在初等数学中已经讲过下面几类函数:

幂函数: $y=x^{\mu}$ （$\mu$ 是常数),

指数函数: $y=a^{x}$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）,

对数函数: $y=\log_a x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$, 特别当 $a=e$ 时, 记为 $y=\ln x$）,

三角函数:如 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 等,

反三角函数:如 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$ 等。

以上这五类函数统称为基本初等函数。

**2. 复合函数**

定义　设有两个函数 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, 如果对于变量 $x$ 所考虑的范围内的每一个值, 变量 $y$ 由 $f[\varphi(x)]$ 对应着一个确定的值, 那么这个函数 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由函数 $u=\varphi(x)$ 及 $y=f(u)$ 复合而成的复合函数, 其中 $u$ 称为中间变量。

例 9　试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数。

解　将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中, 即为所求的复合函数

$$y=\cos^2 x,$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

有时, 一个复合函数可能由三个或更多的函数构成。比如, 由函数 $y=\ln u$, $u=\sin v$ 和 $v=x^2+1$ 可以构成复合函数 $y=\ln\sin(x^2+1)$, 其中 $u$ 和 $v$ 都是中间变量。

与此同时, 我们还应掌握复合函数的复合过程, 即“分解”复合函数, 这对于后面的学习有帮助, 读者对此应予重视。

例 10　指出 $y=(3x+5)^{10}$, $y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由哪些函数复合而成的。

解　$y=(3x+5)^{10}$ 是由 $y=u^{10}$ 和 $u=3x+5$ 复合而成的。

$y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$, $u=\log_a v$, $v=\sin x+2^x$ 复合而成的。

**3. 初等函数**

定义　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数。例如

$$y=\sqrt{1-2x}, \qquad y=\cos^2 x, \qquad y=\sin\ln x$$

等都是初等函数。而

$$f(x)=\begin{cases}3^x, & x\geq 0,\\ x^2, & x<0.\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

等等，都不是初等函数。

**六、函数的基本性态**

**1. 函数的奇偶性**

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称。如果对于任一 $x\in D$，

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数。如果对于任一 $x\in D$，

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图形关于 $y$ 轴是对称的，奇函数的图形关于 $x$ 轴是对称的。

例如，函数 $f(x)=x^2$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$。(图 1-5)。

又例如，函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$。(图 1-6)。

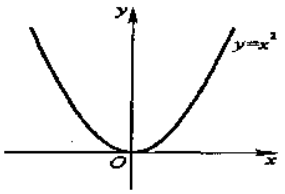


图　1-5

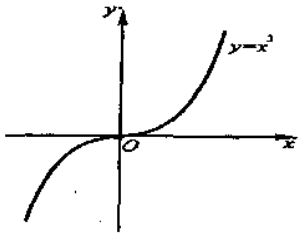


图　1-6

**2. 函数的周期性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在正数 $l$，使得对于任一 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且

$$f(x\pm l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，$l$ 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期。

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数。(图 1-7, 1-8)。

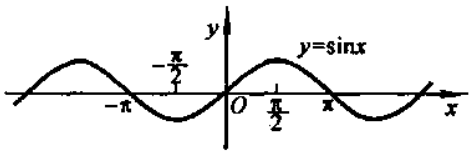


图 1-7

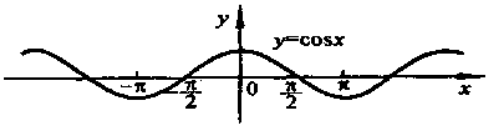


图 1-8

例 11　设函数 $y=f(x)$ 是以 $\omega$ 为周期的周期函数，试证函数 $y=f(ax)\ (a>0)$ 是以 $\frac{\omega}{a}$ 为周期的周期函数。

证　要证的是：

$$f(ax)=f[a(x+\frac{\omega}{a})],$$

因为 $y=f(x)$ 是以 $\omega$ 为周期，所以

$$f(ax)=f(ax+\omega),$$

所以 $f(ax)$ 是以 $\frac{\omega}{a}$ 为周期的周期函数。

例如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 均以 $2\pi$ 为周期，所以 $y=\sin 2x$，$y=\cos\frac{x}{2}$ 的周期分别为 $\pi$ 和 $4\pi$。

3. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I\subset D$。如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调增加的；如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调减少的。单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的（图 1-5）。



需要全本请访问 www.ertongbook.com

又例如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的(图 1-6)。

**4. 函数的有界性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，数集 $X \subset D$。如果存在正数 $M$，对任一 $x \in X$，

$$|f(x)| \leq M$$

都成立，则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上有界。如果这样的 $M$ 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上无界。

例如，函数 $f(x)=\sin x$，对任一实数 $x \in (-\infty,+\infty)$，$|\sin x| \leq 1$ 都成立，故函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的。而 $f(x)=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内是无界函数。

有的函数可能在定义域的某一部分有界，而在另一部分无界。例如 $f(x)=\tan x$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 上是有界的，而在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内是无界的。因此我们说一个函数是有界的或者无界的，应同时指出其自变量的相应范围。

**七、建立函数关系举例**

**例 12** 设有一块边长为 $a$ 的正方形薄板，将它的四角剪去边长相等的小正方形制作一只无盖盒子，试将盒子的体积表示成小正方形边长的函数。

解 设剪去的小正方形的边长为 $x$，盒子的体积为 $V$，则盒子的底面积为 $(a-2x)^2$，高为 $x$，因此所求的函数关系为

$$V=x(a-2x)^2, \quad x \in (0,\frac{a}{2})。$$

## 习 题 1-1

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(3) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$。

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{2x-1}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{4-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{4-x^2}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(5) $y=\cos x^2$；　　(6) $y=\ln(x+2)$；

(7) $y=e^{\frac{1}{x^2}}$；　　(8) $y=\arcsin(x-1)$。

3. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(\dfrac{1}{x})$，$\dfrac{1}{f(x)}$。

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ -1, & x=1,\\ 1, & 1<x\le 2。\end{cases}$$

求 $f(0),f(\dfrac{1}{2}),f(1),f(\dfrac{5}{4}),f(2)$。

5. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$；

(2) $y=x+\ln x$，$(0,+\infty)$。

6. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$；　　(2) $y=x(x+1)(x-1)$；

(3) $y=x^2(1-x^2)$；　　(4) $y=x^2-2x^3$；

(5) $y=\sin x-\cos x+2$；　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$。

7. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos^2 x$；　　(2) $y=\sin x\cos x$；

(3) $y=\sin 4x$；　　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=e^{\sin x}$；　　(6) $y=1+\sin \pi x$。

8. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(2) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$，$x>0$；

(3) $y=1+\ln(x+2)$；　　(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{4}$。

9. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数：

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$；

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=2x$；

(3) $y=e^{u},u=x^{2}$；

(4) $y=\sin u,u=\ln v,v=2x$。

10. 指出下列各题中复合函数的复合过程：

(1) $y=\cos 5x$；　　(2) $y=\sin^{3}x$；

(3) $y=(2-3x)^{\frac{1}{2}}$；　　(4) $y=e^{\sin 3x}$。

11. 设下面所考虑的函数都是定义在区间$(-l,l)$上的。

证明：

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2)两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

12. 设$f(x)$的定义域$D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^{2})$；　　(2) $f(2x-1)$；

(3) $f(x+a),(a>0)$；　　(4) $f(x+2)+f(x-2)$。

13. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases},\qquad g(x)=e^{x},$$

求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形。

14. 设有半径为$R$的圆铁片，从中剪下中心角为$\alpha$的圆扇形，用这个扇形做成一个无底的圆锥体。试把这圆锥体的体积$V$表示为$\alpha$的函数。

## 第二节　极限的概念

### 一、 函数的极限

#### 1. 函数极限的定义

极限概念是与求一些量的精确值有关的，它研究的是在自变量的某个变化过程中，函数的变化趋势。下面我们先来看一个例子。

**例1**　求由曲线$y=x^{2}$，$x=1$及$x$轴所围成的图形(该图形叫做曲边三角形，图1-9所示)的面积。

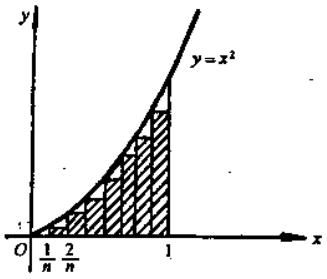


图 1-9

解　将区间$[0,1]$等分为$n$个小区间$[0,\frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]$, …, $[\frac{n-1}{n},1]$, 依次作$n$个内接小矩形, 它们的面积分别为:

$$\frac{1}{n}\times 0,\ \frac{1}{n}\times(\frac{1}{n})^2,\ \frac{1}{n}\times(\frac{2}{n})^2,\ \frac{1}{n}\times(\frac{3}{n})^2,\ \cdots,\ \frac{1}{n}\times(\frac{n-1}{n})^2。$$

若将这$n$个小矩形的面积之和$S_n$作为曲边三角形面积$S$的近似值, 则有:

$$\begin{aligned}S\approx S_n&=\frac{1}{n}\times(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}\times(\frac{2}{n})^2+\cdots+\frac{1}{n}\times(\frac{n-1}{n})^2\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\\&=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-2)}{6}\\&=\frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})。\end{aligned}$$

由图 1-9 不难发现, $n$越大, $S_n$越接近$S$。显然, 当$n$无限地增大时, $S_n$就无限地接近或者说趋向于$S$。另一方面分析$S_n$的表达式可知, 当$n$无限变大时, $S_n$无限地趋向于$\frac{1}{3}$, 于是可以断言该曲边三角形的面积$S$为$\frac{1}{3}$。

实际上, 这里讨论的是当自变量$n$在无限变大时, 函数$S_n$的变化趋势。这种通过研究函数变化趋势解决问题的方法叫做极限方法。

一般地, 极限概念指的是在自变量的某一变化过程中函数的变化趋势。下面我们就函数在自变量的不同变化过程中的变化趋势问题分别加以讨论。

(1) 自变量趋于有限值时函数的极限

我们先来讨论当$x$无限接近于$x_0$时, 函数$y=f(x)$无限接近于常数$A$的情形。

例如当$x$无限接近于1时, 函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$就无限接近于2。下面讨论这种现象如何被精确地描述。

显然, $x$无限接近于1以及$f(x)$接近于2, 它们的接近程度可以分别以$|x-1|$、

$|f(x)-2|$的大小来表达。所谓“当$x$无限接近于1时，$f(x)$无限接近于2”，可以理解为：对于想象中的无论多么小的正数$\varepsilon$，总可以找到那么一个正数$\delta$，只要$0<|x-1|<\delta$，就有$|f(x)-2|<\varepsilon$。这就从本质上反映了$f(x)$是无限接近2的情况。一般地，当$x$无限接近$x_0$时，函数$y=f(x)$无限接近常数$A$，可以精确地描述如下：

**定义1** 设函数$f(x)$在点$x_0$的某一去心邻域内有定义。如果存在常数$A$，对于任意给定的正数$\varepsilon$（不论它多么小），总存在正数$\delta$，使得当$x$满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数$A$就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 f(x)\to A \ （当 x\to x_0）。$$

我们指出，定义中$0<|x-x_0|$表示$x\neq x_0$，所以$x\to x_0$时$f(x)$有没有极限，与$f(x)$在点$x_0$是否有定义并无关系。

为了表达方便，引入记号$\forall$表示对任意给定的或对于每一个，记号$\exists$表示存在。于是，定义1可以简单地表述为：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限为$A$的几何解释如下：任意给定一正数$\varepsilon$，作平行于$x$轴的两条直线$y=A+\varepsilon$和$y=A-\varepsilon$，介于这两条直线之间是一横条区域。根据定义，对于给定的$\varepsilon$，存在着点$x_0$的一个$\delta$邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，当$y=f(x)$的图形上的点的横坐标$x$在邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内，但$x\neq x_0$时，这些点的纵坐标$f(x)$满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon \qquad 或 \qquad A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon。$$

亦即这些点落在上面所作的横条区域内（图1-10）。

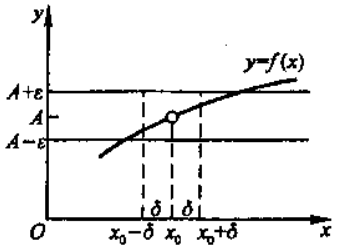


图 1-10

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$。

证 这里，函数在点 $x=1$ 是没有定义的，但是函数当 $x\to 1$ 时的极限存在或不存在与它并无关系。事实上，$\forall\varepsilon>0$，不等式

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

约去非零因子 $x-1$ 后，就化为

$$|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon,$$

因此，只要取 $\delta=\varepsilon$，那么当 $0<|x-1|<\delta$ 时，就有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2。$$

上述 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限概念中，$x$ 是既从 $x_0$ 的左侧也从 $x_0$ 的右侧趋于 $x_0$ 的。但有时只能或只需考虑 $x$ 仅从 $x_0$ 的左侧趋于 $x_0$（记作 $x\to x_0^-$）的情形，或 $x$ 仅从的右侧趋于 $x_0$（记作 $x\to x_0^+$）的情形. 在 $x\to x_0^-$ 的情形，$x$ 在 $x_0$ 的左侧，$x<x_0$。在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，那么 $A$ 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^-)=A。$$

类似地，在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$，那么 $A$ 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^+)=A。$$



需要全本请访问 www.ertongbook.com