前　言

数学分析是大学数学系的一门重要的必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。现安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》。新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，该习题集有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答，应安徽人民出版社的同志邀请我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。在本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

2007 年 7 月

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目　录

第六章　多变量函数的微分运算 …… (1)

§ 1. 函数的极限　连续性 …… (1)

§ 2. 偏导数　函数的微分 …… (38)

§ 3. 隐函数的微分 …… (110)

§ 4. 变量代换 …… (170)

§ 5. 几何运用 …… (241)

§ 6. 泰勒公式 …… (276)

§ 7. 多变量函数的极值 …… (299)

第七章　与参数有关的积分 …… (392)

§ 1. 与参数有关的正常积分 …… (392)

§ 2. 与参数有关的广义积分　积分的一致收敛性 … (423)

§ 3. 积分号下广义积分的微分法和积分法 …… (464)

§ 4. 欧拉积分 …… (523)

§ 5. 傅里叶的积分公式 …… (555)

第六章　多变量函数的微分运算

§1. 函数的极限　连续性

1. **函数的极限**　令函数 $f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在具有聚点 P_0 的集 E 上有定义. 若对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$，以致 $|f(P)-A|<\varepsilon$；若仅仅是 $P\in E$ 及 $0<\rho(P_1,P_0)<\delta$，这里 $\rho(P_1,P_0)$ P 与 P_0 两点之间的距离. 这就是人们常说的：

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2. **连续性**　若：

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$$

则函数被称为在 P_0 点上是连续的. 若它在该域的每一个点上都是连续的，则函数 $f(P)$ 在本域内是连续的.

3. **一致连续性**　若对于每一个 $\varepsilon>0$ 存在仅仅取决于 ε 的 $\delta>0$，以致对于 G 域的任意点 P' 和 P'' 将成立不等式：

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon,$$

若仅仅是 $\rho(P',P'')<0$ 则称函数 $f(P)$ 在 G 域内是一致连续的.

在有界和封闭域内连续的函数在这个域内是一致连续的.

确定并描绘下列函数的存在域：

3136. $u=x+\sqrt{y}$.

解　由 $u=x+\sqrt{y}$ 知 $y\geqslant 0$，式子有意义，于是存在域为 $\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,\ y\geqslant 0\}$，即上半平面，如图 6.1

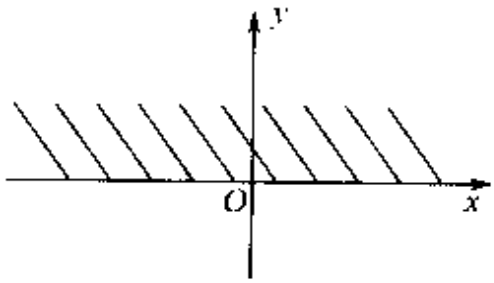


图 6.1

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

解 由 $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$,

知当 $1-x^2\geqslant 0$ 且 $y^2-1\geqslant 0$ 时，即 $|x|\leqslant 1$，$|y|\geqslant 1$ 时函数有意义，于是存在域为 $\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ |y|\geqslant 1\}$，

如图 6.2 的阴影部分

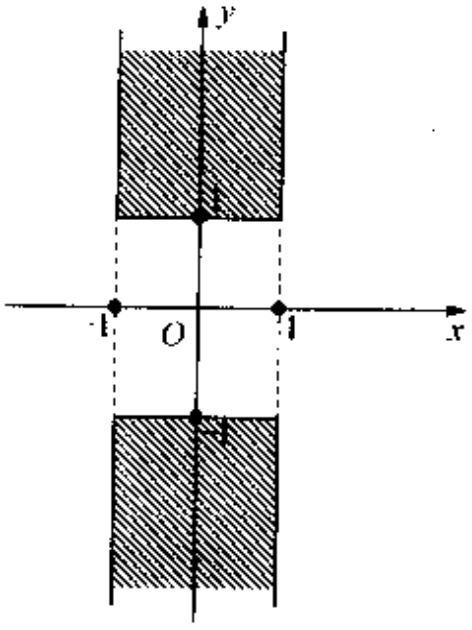


图 6.2

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解 由 $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 知，当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时，此式有意义，于是存在域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，如图 6.3 的阴影部分

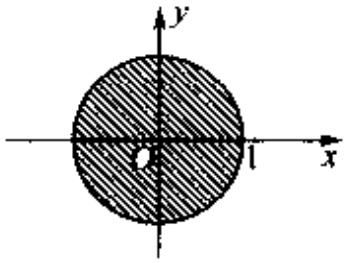


图 6.3

3139. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解　由 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 知，此式有意义的范围是 $x^2+y^2>1$，于是存在域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$，如图 6.4 的阴影部分.

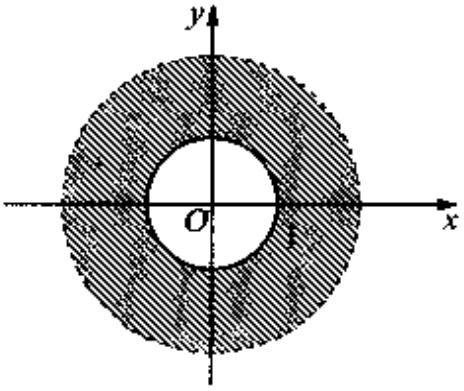


图 6.4

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

解　由题意有，存在域为 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$，如图 6.5 的阴影部分所示.

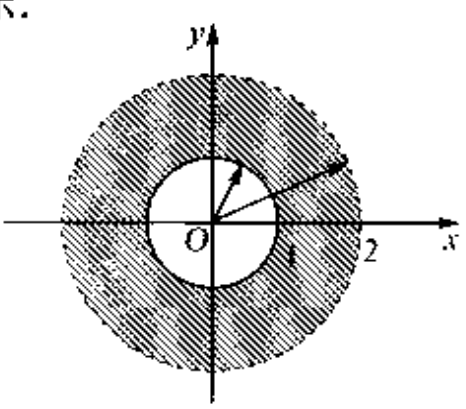


图 6.5

需要全本请访问 www.ertongbook.com

3141. $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解 由题意，存在域$\{(x,y)\mid x\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x\}$，

即

$$\left\{(x,y)\middle|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$\cap\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2<1\},$$

如图 6.6 的阴影部分所示.

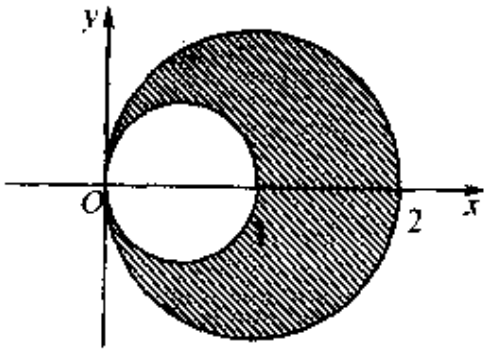


图 6.6

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

解 由题意，存在域为$\{(x,y)\mid -1\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$，图形如图 6.7 的阴影部分所示.

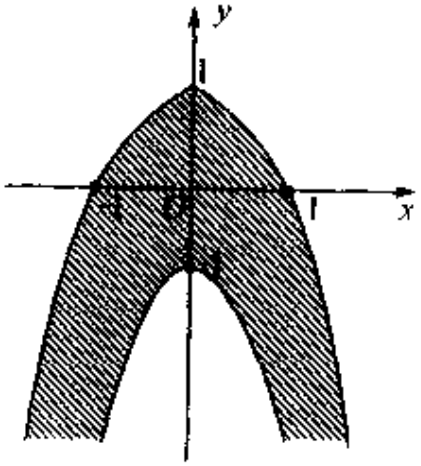


图 6.7

3143. $u = \ln(-x - y)$.

解 由题意，存在域为 $\{(x,y) \mid x+y<0\}$，图形如图 6.8 的阴影部分所示.

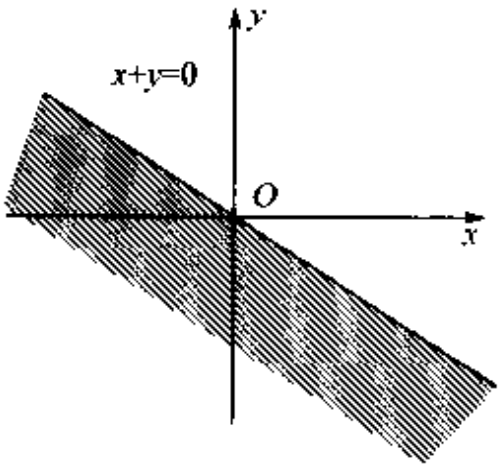


图 6.8

3144. $u = \arcsin\dfrac{y}{x}$.

解 存在域为 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\left|\dfrac{y}{x}\right|\leqslant 1\right\}$，图形如图 6.9 的阴影部分所示.

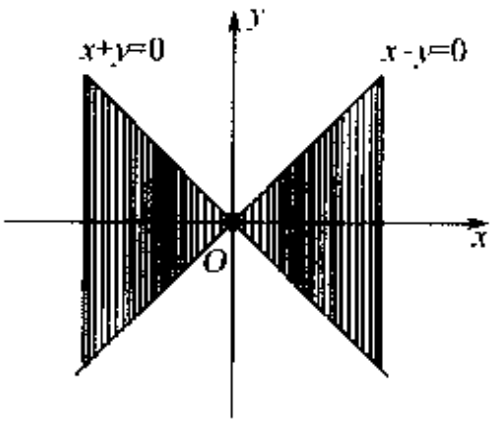


图 6.9

3145. $u = \arccos\dfrac{x}{x+y}$.

解 由

$$u = \arccos \frac{x}{x+y}$$

知 $\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$,

解之有 $\begin{cases} y \geqslant 0 \\ y \geqslant -2x \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y \leqslant 0 \\ y \leqslant -2x \end{cases}$，且 x, y 不能同时为零，所以存在域为 $\{(x,y) \mid y \geqslant 0, y \geqslant -2x, x, y$ 不能同时为零$\} \cup \{(x,y) \mid y \leqslant 0, y \leqslant -2x, x, y$ 不能同时为零$\}$

图形如图 6.10 的阴影部分所示.

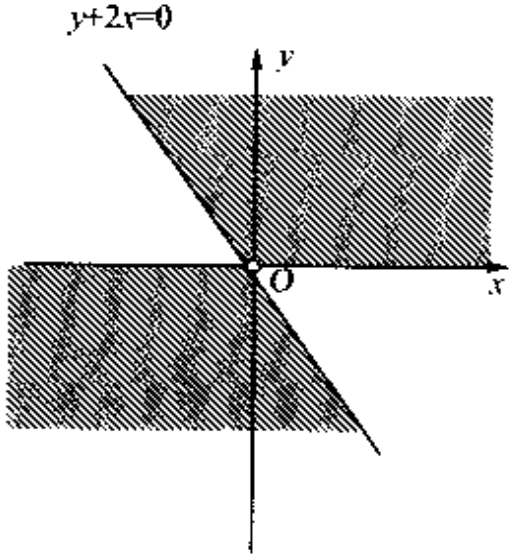


图 6.10

3146. $u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin (1-y)$.

解　存在域在

$$\left\{ (x,y) \left| \left|\frac{x}{y^2}\right| \leqslant 1, |1-y| \leqslant 1, y \neq 0 \right.\right\}$$

$$= \{(x,y) \mid y^2 \geqslant x, 0 < y \leqslant 2\}$$

$$\cap \{(x,y) \mid y^2 \geqslant -x, 0 < y \leqslant 2\},$$

图形如图 6.11 的阴影部分所示.

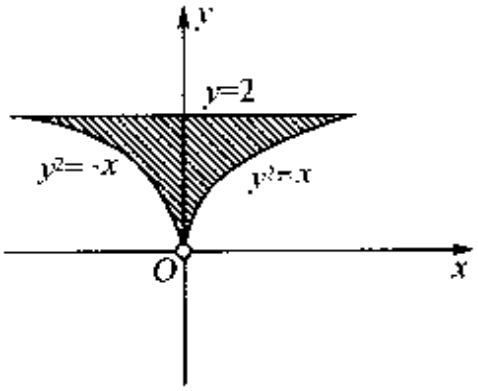


图 6.11

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

解　存在域为

$$\{(x,y)\mid 2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi,k=0,1,2,\cdots\},$$

图形如图 6.12 的阴影部分所示.

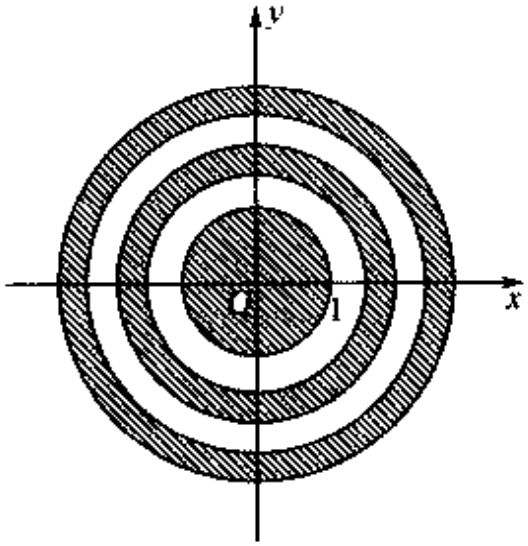


图 6.12

3148. $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　存在域为

$$\left\{(x,y,z)\left|\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1, x^2+y^2\neq 0\right.\right\}$$

$$=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2-z^2\geqslant 0, x^2+y^2\neq 0\},$$

图形如图 6.13 的阴影部分所示.

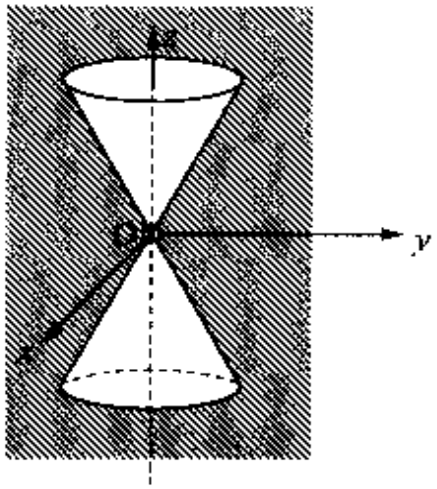


图 6.13

3149. $u=\ln(xyz)$.

解　存在域为$\{(x,y,z)\mid xyz>0\}$,

即 $x>0,y>0,z>0$;或 $x>0,y<0,z<0$;或 $x<0,y<0,z>0$;或 $x<0,y>0,z<0$ 其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体,但不包括坐标面,图形大家熟知,省略.

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解　存在域$\{(x,y,z)\mid -x^2-y^2+z^2>1\}$,这是双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的内部,如图 6.14 阴影部分所示,不包括界面在内.

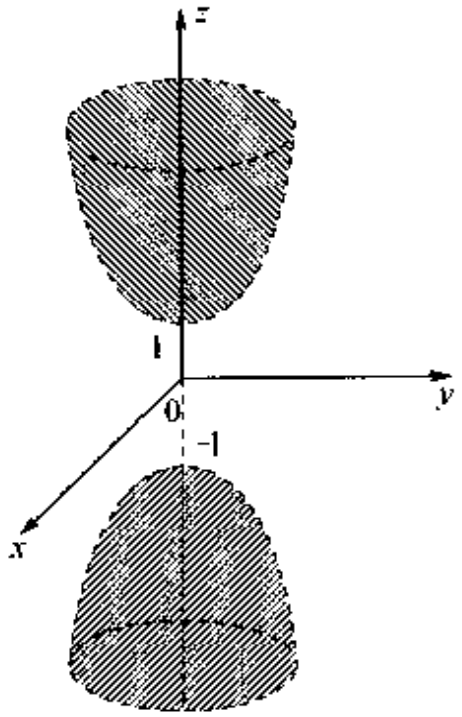


图 6.14

绘制下列函数的水平线：

3151. $z = x + y$.

解 等位线为平行直线族 $x + y = k, k \in IR$，图形如图 6.15 所示.

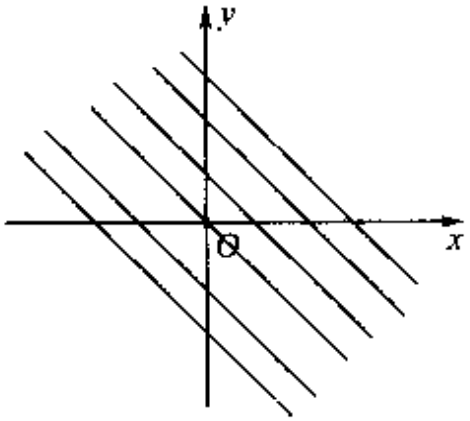


图 6.15

3152. $z = x^2 + y^2$.

解 等位线为曲线族，$x^2 + y^2 = a^2 (a \geqslant 2)$，

需要全本请访问 www.ertongbook.com

当 $a=0$ 时为原点，当 $a>0$ 时，等位线为以原点为圆心的同心圆族.

3153. $z=x^2-y^2$.

解 等位线为曲线族 $x^2-y^2=k$，当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线，$y=x$，$y=-x$，当 $k\neq 0$ 时，以 $y=\pm x$ 为公共渐近线的等边双曲线族，其中 $k>0$ 时顶点为 $(-\sqrt{k},0)$，$(\sqrt{k},0)$，当 $k<0$ 时顶点为 $(0,-\sqrt{k})$，$(0,\sqrt{-k})$.

3154. $z=(x+y)^2$.

解 等位线为曲线族 $(x+y)^2=a^2$，$a\geqslant 0$，当 $a=0$ 时，为直线 $x+y=0$，当 $a\neq 0$ 时与直线 $x+y=0$ 平行的且等距的直线 $x+y=\pm a$.

3155. $z=\dfrac{y}{x}$.

解 等位线以坐标原点为束心的直线束，$y=kx$，$x\neq 0$ 不包括 Oy 轴在内.

3156. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

解 等位线为椭圆族 $x^2+2y^2=a^2(a>0)$，

长半轴为 a，短半轴为 $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，焦点为 $\left(-a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$ 及 $\left(a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$.

3157. $z=\sqrt{xy}$.

解 等位线为曲线族 $xy=a^2$，$a\geqslant 0$.

当 $a=0$ 时，为坐标轴 $x=0$ 及 $y=0$，当 $a>0$ 时，为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等边双曲线族，顶点为 $(-a,-a)$ 及 (a,a).

3158. $z=|x|+y$.

解 等位线为曲线族 $|x|+y=k$，其中 $k\in(-\infty,+\infty)$，当 $x\geqslant 0$ 时，$x+y=k$，当 $x<0$ 时，$y-x=k$，这是顶点在 Oy 轴上两支互相垂直的射线所构成的折线族，如图 6.16 所示.

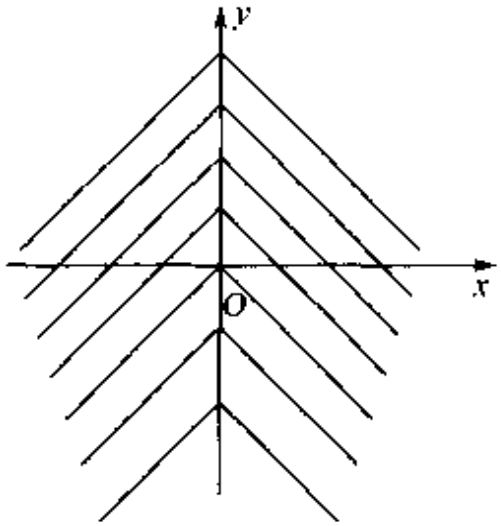


图 6.16

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解　等位线为曲线族 $|x|+|y|-|x+y|=a$，因为 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$，于是 $a\geqslant 0$，当 $a=0$ 时，$|x|+|y|=|x+y|$，两边平方有 $xy\geqslant 0$，即为第一、第三象限，包括两坐标轴在内，当 $a>0$ 时，$xy<0$，从而有

1°　$x>0, y<0, x+y\geqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之有 $y=-\frac{a}{2}$；

2°　$x>0, y<0, x+y\leqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之有 $x=\frac{a}{2}$；

3°　$x<0, y>0, x+y\geqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之有 $x=-\frac{a}{2}$；

4°　$x<0, y>0, x+y\leqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之有 $y=\frac{a}{2}$.

这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族，它的各射线平行于坐标轴，如图 6.17 所示.

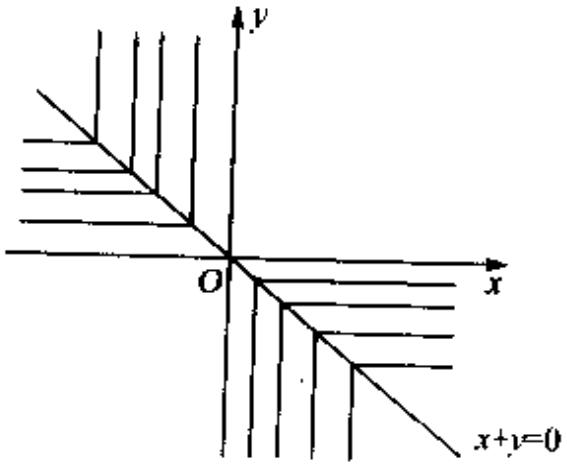


图 6.17

3159.1. $z=\min(x,y)$.

解 设

$$\min(x,y)=k,\qquad k\in(-\infty,+\infty)$$

则 1° 若 $y\geqslant x$，有 $x=k$，等位线是平行射线族，顶点在 $y=x$ 轴上，但含 $y=x$ 直线上点，如图 6.17(1).

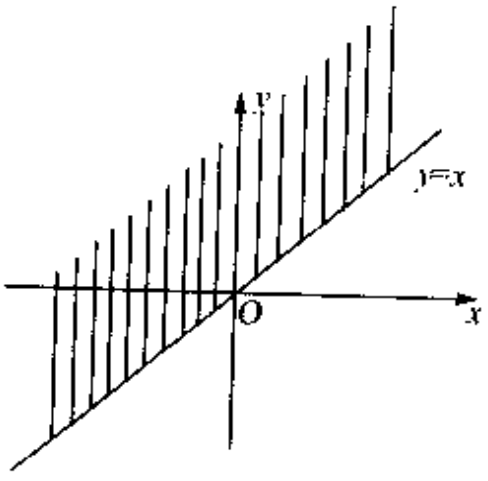


图 6.17(1)

2° 若 $y<x$，有 $y=k$，等位线是平行射线族，顶点在 $y=x$ 轴上，但不含 $y=x$ 直线，如图 6.17(2).

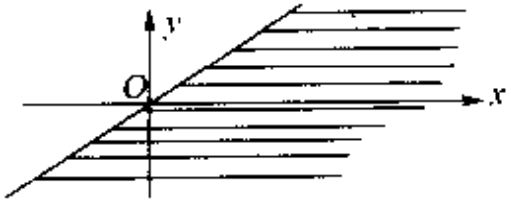


图 6.17(2)

3159.2. $z = \max(|x|, |y|)$.

解 1° 当 $|x| \geqslant |y|$ 时，等位线 $|y| = k, k \geqslant 0$，如图 6.17(3) 所示.

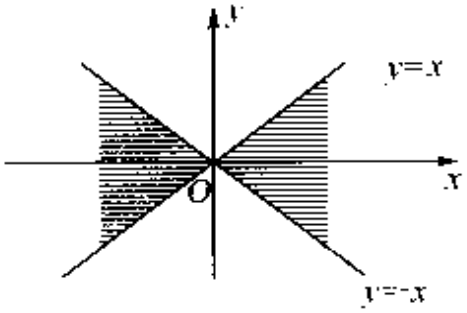


图 6.17(3)

这是一族平行的射线族，平行于 x 轴，顶点在 $y = x$ 和 $y = -x$ 直线上.

2° 当 $|y| \geqslant |x|$ 时，等位线为 $|x| = k, k \geqslant 0$，如图 6.17(4) 所示.

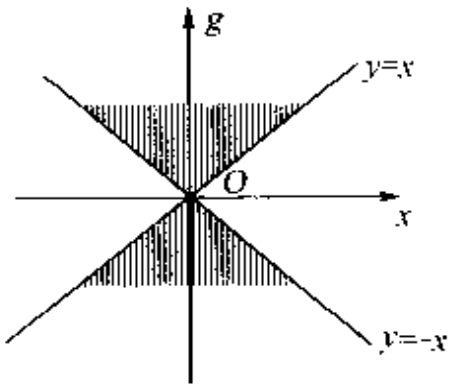


图 6.17(4)

这是一族平行的射线族，平行于 y 轴，顶点在 $y = x$ 和 $y =$

一 x 直线上.

3159. 3. $z = \min(x^2, y)$.

解 1° 当 $x^2 \leqslant y$ 时，有 $x^2 = k, k \geqslant 0$，如图 6.17(5) 所示

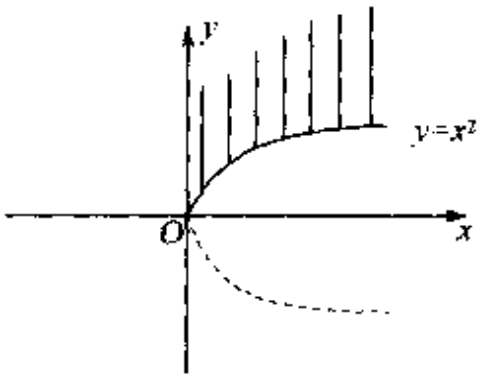


图 6.17(5)

等位线是一族平行于 y 轴的射线，顶点在抛物线 $y = x^2$ 的上半曲线上.

2° 当 $x^2 \geqslant y$ 时，有 $y = k, k \in (-\infty, +\infty)$，如图 6.17(6) 所示，等位线是一族平行于 x 轴的射线，顶点在抛物线 $y = x^2$ 的上半曲线上和一族平行于 x 轴的直线，直线位于下半平面.

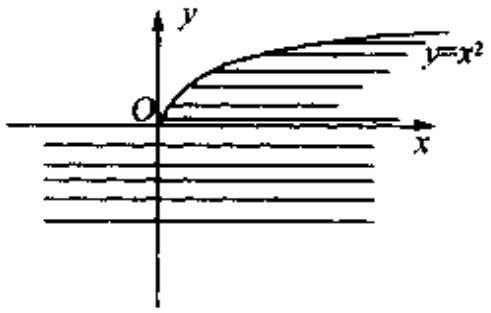


图 6.17(6)

3160. $z = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2x}{x^2 + y^2} = k, \quad (x, y \text{ 不同时为零}),$$

其中 $k \neq 0, k \in (-\infty, +\infty)$，上式可写为

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{k}\right)^2,\qquad (k\neq 0).$$

当 $k=0$ 时，即 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=1$，从而等位线为 $x=0$，但不包括原点.

当 $k\neq 0$ 时，为中心在 Ox 轴上且经过坐标原点(但不包括原点在内)的圆束，圆心在 $\left(\frac{1}{k},0\right)$，半径为 $\left|\frac{1}{k}\right|$，如图 6.18 所示.

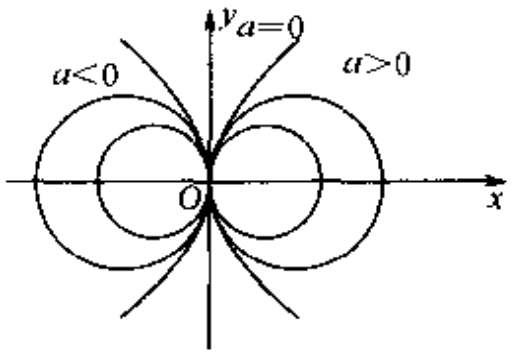


图 6.18

3161. $z=x^y\qquad (x>0)$.

解　等位线为曲线族 $x^y=k\quad (k>0)$.

当 $k=1$ 时，为直线 $x=1$ 及 Ox 轴的正向半射线，但不包括原点在内.

当 $0<k<1$ 与 $k>1$ 时的图象如图 6.19 所示.

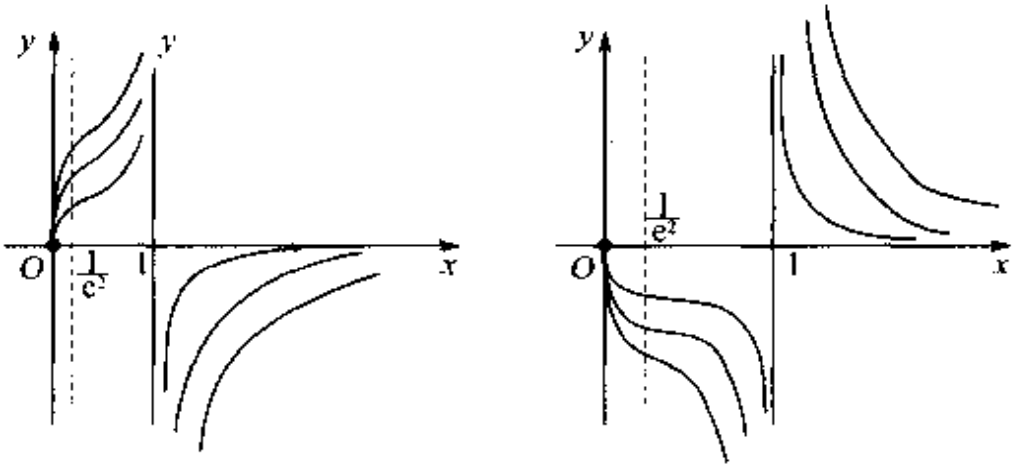


图 6.19

需要全本请访问 www.ertongbook.com