前　言

数学分析是大学数学系的一门重要的必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。现安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》。新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，该习题集有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答，应安徽人民出版社的同志邀请我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。在本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

2007 年 7 月

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目　录

第五章　级数 …… (1)

§ 1. 数值级数　同号级数收敛性的检验 …… (1)

§ 2. 交错级数收敛性的检验 …… (69)

§ 3. 级数的运算 …… (111)

§ 4. 函数级数 …… (120)

§ 5. 幂级数 …… (197)

§ 6. 傅里叶级数 …… (291)

§ 7. 级数的求和 …… (338)

§ 8. 用级数求解定积分 …… (380)

§ 9. 无穷乘积 …… (391)

§ 10. 斯特林公式 …… (439)

§ 11. 用多项式逼近连续函数 …… (443)

第五章　级　数

§1. 数值级数　同号级数收敛性的检验

1. **一般概念**　若存在有穷极限：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S(\text{级数的和})$$

式中　$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

数值级数：$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$　①

则被称之为收敛的，反之，数级(1) 被称之为发散的.

2. **柯西准则**　对于级数(1) 的收敛，必须充分满足任何 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N = N(\varepsilon)$ 数的条件，以致当 $n > N$ 和 $p > 0$(n 和 p 为自然数) 时，下列不等式成立

$$| S_{n+p} - S_n | = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

特别是若级数收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. **比较检验 1**　除级数(1) 之外，设具有以下级数：

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \qquad ②$$

若在 $n \geqslant n_0$ 时，以下不等式成立：

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n$$

则(1) 由级数 ② 的收敛得出级数 ① 的收敛；(2) 由级数 ① 的发散得出级数 ② 的发散.

特别是若 $a_n \sim b_n$，当 $n \to \infty$ 时，则正项级数 ① 和 ② 同时收敛和发散.

4. **比较检验 2**　若

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

则(1) 当 $p > 1$ 时，级数 ① 收敛，而(2) 当 $p \leqslant 1$ 时发散.

5. **达朗贝尔检验** 若

$$a_n > 0 \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

和 $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

则(1) 当 $q < 1$ 时，级数 ① 收敛，而(2) 当 $q > 1$ 时发散.

6. **柯西检验** 若

$$a_n \geqslant 0 \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

和 $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

则(1) 当 $q < 1$ 时，级数 ① 收敛，而(2) 当 $q > 1$ 时发散.

7. **拉阿比检验** 若

$$a_n > 0 \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

和 $$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p$$

则(1) 当 $p > 1$ 时，级数 ① 收敛，而(2) 当 $p < 1$ 时发散.

8. **高斯检验** 若

$$a_n > 0 \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

和 $$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

式中 $|\theta_n| < C$ 而 $\varepsilon > 0$，则(1) 当 $\lambda > 1$ 时，级数 ① 收敛，而(2) 当 $\lambda < 1$ 时发散；(3) 当 $\lambda = 1$ 时，若 $\mu > 1$，级数 ① 收敛，若 $\mu \leqslant 1$ 则发散.

9. **柯西积分检验** 若 $f(x)(x \geqslant 1)$ 为非负数递减连续函数，则级数：$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 随积分 $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或发散.

---

* 符合 O^* 的意义见第 1 章第 6 节 1.

直接证明下列级数的收敛性并求出它们的和：

2546. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$.

解　由

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}},$$

又　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$,

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$.

故该级数收敛，其和为$\frac{2}{3}$.

2547. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

解　由

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}\\&=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right),\end{aligned}$$

有　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

故该级数收敛，其和为$\frac{3}{2}$.

2548. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

解 由 $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$,

有 $2S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$,

于是 $S_n - 2S_n - S_n$

$$= 1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{2^2} - \frac{3}{2^2}\right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{2n-3}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 + 2 = 3.$

故该级数收敛,其和为 3.

2549. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{n}{(n+1)} + \cdots.$

解 因

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1},$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1.$

故该级数收敛,其和为 1.

2550. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$.

解 由

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)},$$

考察通项

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right],$$

有
$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$.

故该级数收敛，其和为$\frac{1}{3}$

2551. (1) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots$;

(2) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots$

$(|q|<1)$.

解 令 $z=q(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，

其中 i 为虚数单位.

而 $z^n=q^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$，

于是有
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}z^j&=\sum_{j=1}^{n}q^j(\cos j\alpha+i\sin j\alpha)\\&=\sum_{j=1}^{n}q^j\cos j\alpha+i\sum_{j=1}^{n}q^j\sin j\alpha.\end{aligned}$$

令 $S_n^{(1)}=q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha$，

$S_n^{(2)}=q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha$，

有 $\sum\limits_{j=1}^{n}z^j=S_n^{(2)}+iS_n^{(1)}$.

而 $$\sum_{j=1}^{n} z^j = \frac{z(1-z^n)}{1-z}.$$

因为 $|q|<1$,

故有 $|z|<1$,

$\therefore \lim_{n\to\infty} z^n = 0.$

所以 $$\lim_{n\to\infty}(S_n^{(2)} + iS_n^{(1)}) = \frac{z}{1-z} = \frac{q\cos\alpha - q^2 + iq\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

故 $$\lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \frac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2},$$

所以(1)，(2)级数收敛，其和分别是 $\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$，

$\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}$.

2552. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解 因

$$\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$
$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

有 $$S_n = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$$
$$=[(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})]$$
$$+[(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})]$$
$$+[(\sqrt{5}-\sqrt{4})-(\sqrt{4}-\sqrt{3})]+\cdots$$
$$+[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1$$
$$=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}.$$

故有　　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n = 1-\sqrt{2}$.

所以该级数收敛，其和是 $1-\sqrt{2}$.

2553. 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的收敛性.

提示：证明当 $x \neq k\pi(k$　整数）不可能时，使得当 $n\to\infty$ 时 $\sin nx \to 0$.

解　当 $x = k\pi, k$ 为整数，有 $\sin k\pi = 0$,

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nk\pi = 0$，收敛.

当 $x \neq k\pi$ 时，我们证明 $\sin nx \not\to 0$.

反证法，设 $\sin nx \to 0$，于是有 $\sin(n+1)x \to 0$.

而　　$\sin(n+1)x = \sin nx\cos x + \cos nx\sin x$

因 $x \neq k\pi$，有 $\sin x \neq 0$

于是有　$0 = \lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)x$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(\sin nx\cos x) + \lim\limits_{n\to\infty}(\cos nx\sin x)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(\cos nx\sin x)$,

我们有　$\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx = 0$.

又　　$\cos^2 nx + \sin^2 nx = 1(*)$

对（*）两边取关于 n 的极限有

$1 = \lim\limits_{n\to\infty}\cos^2 nx + \lim\limits_{n\to\infty}\sin^2 nx = 0$,

矛盾.

所以　　$\sin nx \not\to 0$,　　$n\to\infty$,　　$x \neq k\pi$,

于是我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$，当 $x = k\pi, k$ 为整数时，收敛，当 $x \neq k\pi, k$ 为整数时发散.

2554. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则把该级数的各项重新组合且不破坏其先后次序：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，式中

$$A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \qquad (p_1 = 1, p_1 < p_2 < \cdots)$$

结果得出该级数也收敛并具有同样的和. 否则是不正确的，举例说明.

解 记$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$的前n项和为t_n，有

$$\begin{aligned} t_n &= A_1 + A_2 + \cdots + A_n \\ &= \sum_{i=p_1}^{p_2-1} a_i + \sum_{i=p_2}^{p_3-1} a_i + \cdots + \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \\ &= \sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} a_i = S_{p_{n+1}-1}, \end{aligned}$$

由$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，所以$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} S_{p_{n+1}-1}$存在.

于是$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$收敛且和相同. 又$2-2+2-2+\cdots$发散，但$(2-2)+(2-2)+(2-2)+\cdots$收敛，所以各项重新组合后收敛，但原级数不一定收敛.

2555. 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的各项是正值，以及该级数各项重新组合结果所得出的级数$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$收敛，则该级数也收敛.

解 令

$$t_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad a_n \geqslant 0, \forall n.$$

于是有$\lim_{n\to\infty} t_n$存在，所以$\{t_n\}$是有界数列. 因此，对给定的n，存在p_n，使得$S_n < t_{p_n} < M$，M为一常数，又S_n单调上升，所以$\lim_{n\to\infty} S_n$存在，故该级数也收敛.

研究下列级数的收敛性：

2556. $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

解 因级数的通项为 $a_n=(-1)^{n-1}$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在，所以该级数发散.

2557. $0.001+\sqrt{0.\overline{001}}+\sqrt[3]{0.\overline{001}}+\cdots$.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.\overline{001}}=1$，所以该级数发散.

2558. $\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$$

所以该级数收敛.

2559. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$.

解 我们有如下定理：

设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}=a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\cdots$ 收敛.

于是由 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{2\cdot 2^k-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{2^{k+1}-1}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^k}{2^{k+1}-1}=\frac{1}{2}$，

所以 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$ 发散，于是 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$ 发散.

2560. $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\cdots+\frac{1}{1000n+1}+\cdots$.

解 因为 $\frac{1}{1000n+1}>\frac{1}{1000(n+1)}$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000(n+1)}$ 发散，所以该级数发散.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

2561. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{n}{2n-1}+\cdots$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2},$$

所以该级数发散.

2562. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$.

解 因为 $a_n=\frac{1}{(2n-1)^2}$,

而 $$2^k a_{2^k}=\frac{2^k}{(2\cdot 2^k-1)^2}<\frac{1}{2^k(2-2^{-k})^2},$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{k+1}(2-2^{-k-1})^2}{\frac{1}{2^k(2-2^{-k})^2}}=\frac{1}{2}<1,$$

所以 $\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_k$ 收敛,即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 收敛.

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\cdots$.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛,

而 $$\frac{1}{n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 收敛.

2564. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$.

解 因为

$$\begin{aligned}\sqrt{(2n-1)(2n+1)}&<\sqrt{(2n+1)^2}\\&=2n+1<2(n+1),\end{aligned}$$

所以 $$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2(n+1)},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ 发散.

2565. 证明：算术级数各项倒数的级数是发散的.

解 设等差级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(a+(n-1)\mathrm{d})$，d 为公差.

当 $\mathrm{d}>0$ 时，$\exists n_0>0$，有 $(n_0-1)\mathrm{d}>a$，于是当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$2(n-1)\mathrm{d}>a+(n-1)\mathrm{d},$$

从而 $$\frac{1}{a+(n-1)\mathrm{d}}>\frac{1}{2(n-1)\mathrm{d}}>\frac{1}{2n\mathrm{d}}>0,$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)\mathrm{d}}$ 发散.

当 $\mathrm{d}=0$ 时，$a\neq 0$，此时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}$ 发散.

当 $\mathrm{d}<0$ 时，与 $\mathrm{d}>0$ 时级数敛散性等价，故 $\mathrm{d}<0$ 时级数发散，因此，算术级数各项倒数的级数是发散的.

2566. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(A)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(B)$ 收敛，且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(C)$ 也收敛. 若级数 (A) 和 (B) 是发散的，则级数 (C) 的收敛性会怎样？

证明 因为 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，

所以 $$0\leqslant c_n-a_n\leqslant b_n-a_n,\qquad n=1,2,\cdots.$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛. 于是有 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

若级数 (A) 和 (B) 皆发散，则级数 (C) 可能收敛，也可能发散. 如 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)$ 发散.

但当 $c_n = 0$ 时，$n = 1, 2, \cdots$，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，当 $c_n = \frac{1}{n}$ 时，$n = 1, 2, \cdots$，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散.

2567. 假定已知两个带有非负项的发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，下列级数的收敛性如何？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ 及 (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$.

解 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ 可能收敛，也可能发散.

如 $a_n = \frac{1}{n}$，$b_n = \frac{1}{n+1}$，$n = 1, 2, \cdots$，

有 $\min(a_n, b_n) = \frac{1}{n+1}$，

知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散，又

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{3}, \quad b_n = \frac{1-(-1)^n}{3},$$

知 $\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} b_n$ 皆不存在，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = 0 + 0 + \cdots$ 收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 发散.

事实上 $\max(a_n, b_n) \geqslant a_n \geqslant 0$，

又已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 发散.

2568. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geqslant 0)$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 相反证明是不正确的，举例说明.

解 因为 $a_n \geqslant 0$，$\sum a_n$ 收敛，

所以 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

于是存在 M，当 $n > M$ 时，$0 \leqslant a_n < 1$，因此当 $n > M$ 时，$0 \leqslant a_n^2 < a_n$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，反之不成立，例如 $\sum \frac{1}{n}$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

2569. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$，$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

证明 因为

$$0 \leqslant |a_n b_n| \leqslant \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

而 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$，$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，于是有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ 收敛. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛. 又

$$(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n,$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛，故有 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 收敛.

因为 $\frac{|a_n|}{n} \leqslant \frac{a_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2}$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

2570. 证明：若 $\lim_{n\to\infty} n a_n = a \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 (1) 设 $a > 0$，因为 $\lim_{n\to\infty} n a_n = a$，所以存在 $M > 0$，当 $n > M$ 时有

$$na_n > \frac{a}{2},$$

即 $$a_n > \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{n}, \qquad n > M.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2} \frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(2) 设 $a < 0$，取 $\varepsilon_0 > 0$，使得 $a + \varepsilon_0 < 0$，由于

$$\lim_{n\to\infty} na_n = a,$$

所以存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，有

$$na_n < a + \varepsilon_0,$$

即 $$\frac{1}{n} < \frac{1}{a + \varepsilon_0} a_n.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + \varepsilon_0} a_n$ 发散，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

2571. 证明：若带有正数和单调递减项的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

证明 因为 $a_n \geqslant 0, n = 1, 2, \cdots$，且 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \cdots$，并设 $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$，于是任取 N，当 $n > N$ 时，有

$$(n - N)a_n \leqslant a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n < S - S_N,$$

故 $$na_n < \frac{n}{n - N}(S - S_N).$$

因为 $$\lim_{N\to\infty} S_N = S,$$

且 $$0 \leqslant S_N < S.$$

于是任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_0，使得

$$S - S_{N_0} < \varepsilon,$$

又 $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n - N_0} = 1.$$

于是存在 n_0，当 $n > n_0$ 时，有

$$\frac{n}{n-N_0}<\frac{3}{2}.$$

现取 $M=\max\{N_0,n_0\}$，

于是当 $n\geqslant M$ 时有

$$0\leqslant na_n<\frac{3}{2}\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0.$

2572. 若当 $p=1,2,3\cdots$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的吗？

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 不一定收敛.

我们知道，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，由柯西准则一定有

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0,\quad p=1,2,3,\cdots.$$

但当 $p=1,2,3,\cdots$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0,$$

不能推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，如令 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，于是

$$0<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+p}}<\frac{p}{\sqrt{n+1}},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{\sqrt{n+1}}=0,\quad \forall p\in\mathbb{N},$

故对一切 p 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0.$

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

利用柯西准则，证明下列级数的收敛性：

需要全本请访问 www.ertongbook.com