



经典教材辅导用书

JINGDIAN JIAOCAI FUDAO YONGSHU

黄光谷 等 编

吉米多维奇数学分析 习题集选解(修订版)(上册)

JIMIDUOWEIQI SHUXUE FENXI XITIJI XUANJIE
XIUDINGBAN SHANGCE



清华大学出版社
<http://www.tup.com>

经典教材辅导用书

吉米多维奇
数学分析习题集选解(修订版)
(上册)

黄光谷 黄 川 编
蔡晓英 李 杨

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部著名的、很有代表性的习题集. 编者根据我国目前的教学实际情况, 选编了其中约三分之一的重要习题, 并作了详细解答, 分上、下两册出版. 本书覆盖了该习题集各章节的主要内容, 便于读者由厚到薄、由少而精地掌握该习题集内容, 这对学习理科数学分析或工科高等数学(即微积分)的读者将大有裨益.

本书有很强的可读性, 并兼顾多方需要, 适合理、工科类本、专科各专业教、学数学分析或高等数学(微积分)的师生作为教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题集选解(修订版)(上册)/黄光谷 等编. —武汉: 华中科技大学出版社, 2011. 1

ISBN 978-7-5609-3891-2

I. 吉… II. 黄… III. 数学分析-高等学校-解題 IV. O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 088637 号

吉米多维奇数学分析习题集选解(修订版)(上册)

黄光谷 等编

策划编辑: 周芬娜

责任编辑: 李 琴 周芬娜

封面设计: 潘 群

责任校对: 祝 菲

责任监印: 周治超

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编: 430074 电话: (027)87557437

录 排: 武汉佳年华科技有限公司

印 刷: 华中科技大学印刷厂

开 本: 850mm×1168mm 1/32

印 张: 13

字 数: 345 千字

版 次: 2011 年 1 月第 2 版第 5 次印刷

定 价: 20.00 元



华中出版

本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

修订版前言

俄文吉米多维奇的《数学分析习题集》第 13 版在原版的基础上增加了两百多道新习题,但原题号未变,而是以附加子题号的形式插入了这两百多道题,例如题号 10.1 就是在原第 10 题后插入的一道题,其余类似.

《吉米多维奇数学分析习题集选解》自 2007 年初问世以来,承蒙读者厚爱,已印刷多次,但毕竟所依据的原习题集还是 20 世纪 50 年代初出版的,年代久远;现与时俱进,根据该习题集的最新第 13 版(中译本)予以增订,以适应新的情况.为使本书不致变厚,在增补这二百多道新题解答的同时,删去了原选解题的部分内容,牵涉到有的题的第一个序号相应地作了变动,特此说明.

编 者

2010 年 4 月

前言

前苏联的吉米多维奇(Б. П. Демидович)著的《数学分析习题集》是一部著名的、很有代表性和影响力的书籍,原书曾经由苏联高等教育部审定,为综合性大学及师范院校数理系的教学参考书.该书自20世纪50年代初在我国翻译出版几十年以来,引起了各大专院校广大师生的巨大反响,促进了我国数学分析(微积分)的教与学.

笔者从1958年至1965年间,曾陆续试解了该书中的大部分习题,收益颇丰.这次应邀从该书4462道习题中,挑选约30%的习题,整理详解,分上、下两册出版.这些题是根据我国目前的教学实际情况并兼顾理、工科等多方面需要而选解编入的,大部分是该书中难度中等或中等偏上的习题,也选入了少数基本题;其它一些很容易求解的习题没有选入;超出我国现时数学分析教学要求和考研要求或难度很大的习题也未选入.这就是说,本书在挑选习题时只选编了原习题集中难度中等的一部分,并参考了苏联著名数学家辛钦在《数学分析简明教程》中推荐的习题.这样由厚到薄、由少而精,便于读者根据实际情况,掌握主要内容.

编写本书时,并没有逢三选一地在各章节中平均选题,对重点节,选了约 $1/2$ 的好题;对有些超出教学要求的节,只选了几个,甚至只一两个题作为代表.为了便于读者阅读本书,掌握有关知识点,照录了原习题集中各节前的知识要点,并冠以“内容提要”的标题,其中超出要求的内容加了“*”号.解题中用到的其它知识,读者可查阅华东师范大学数学系编的《数学分析》和同济大学应用数学系编的《高等数学》,这里不一一标出.

为了便于读者查阅,各题前写了两个题号,如5—320,第一个数字5是本书该节的顺序号,第二个数字320是原书《数学分析习

题集》的题号.若行文中仅一个序号,如 530,指的是原书《数学分析习题集》之题号.为了符合读者的阅读习惯,将原习题集中俄文的小题号(a)、(б)、(в)、(г)、(д)等,依次改成了数字(1)、(2)、(3)、(4)、(5)或(a)、(b)、(c)、(d)、(e)等.对于标注的式子的俄文(A)、(Б)、(В)等,改换成了读者熟悉的英文(A)、(B)、(C)等.其余类似.

选入的题都有详解,为了避免重复,不再作详细分析.简要分析以黑括号【】标出,少数题在题末加“注”,力求画龙点睛,以期引起读者的注意或扩充知识面.有的题还给出了一题多解,以便活跃思路.

许多题的简单插图未另绘,留给读者思考或自绘草图,边读边想,以培养想象力.

选编本书,得到华中科技大学出版社领导和编辑等的大力支持和指导;少部分题参考了有些书籍的解法,在此一并致谢!

由于我们水平有限,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正,以便再版时修改.

编 者
2006 年 5 月

主 要 符 号

$\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{C}$ 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集.

$\mathbf{N}^*$ 表示正整数集($\mathbf{N}$ 中去掉数 0 的集合).

$\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$ 分别表示正, 负实数集.

$U(a, \delta)$ 表示以 a 为中心, δ 为半径的邻域.

$\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ 表示去心邻域.

$\forall$ 表示“任意给定”或“任给”、“对任意的”.

$\exists$ 表示“存在”、“有”.

$\triangleq$ 表示“记为”、“定义为”.

$\Rightarrow$ 表示“推出”、“推得”或“蕴涵”.

$\Leftrightarrow$ 表示可“互推出”、“等价于”或“充要条件”.

$\complement_I B$ 表示 I 中子集 B 的余集或补集.

$f(x) \in B(I)$ 表示区间 I 上的全体有界函数之集.

$C(I)$ 表示 I 上全体连续函数之集.

$D(I)$ 表示 I 上全体可导函数之集.

$D^n(I)$ 表示 I 上全体 n 阶可导函数之集.

$R(I)$ 表示 I 上全体(黎曼)可积函数之集.

$f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ 表示函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且在开区间 (a, b) 内可导.

目 录

第一篇 单变量函数

第 1 章	分析引论	(2)
§ 1	实数	(2)
	内容提要	(2)
	习题选解	(3)
§ 2	数列的理论	(8)
	内容提要	(8)
	习题选解	(9)
§ 3	函数的概念	(25)
	内容提要	(25)
	习题选解	(26)
§ 4	函数的图形表示法	(30)
	内容提要	(30)
	习题选解	(31)
§ 5	函数的极限	(36)
	内容提要	(36)
	习题选解	(37)
§ 6	函数无穷小和无穷大的阶	(59)
	内容提要	(59)
	习题选解	(60)
§ 7	函数的连续性	(66)
	内容提要	(66)
	习题选解	(67)

§ 8	反函数、用参数式表示的函数	(82)
	内容提要	(82)
	习题选解	(83)
§ 9	函数的一致连续性	(86)
	内容提要	(86)
	习题选解	(86)
§ 10	函数方程	(91)
	内容提要	(91)
	习题选解	(91)
第 2 章	单变量函数的微分学	(95)
§ 1	显函数的导函数	(95)
	内容提要	(95)
	习题选解	(96)
§ 2	反函数的导函数、用参数式表示的函数的导函数、 隐函数的导函数	(130)
	内容提要	(130)
	习题选解	(130)
§ 3	导函数的几何意义	(135)
	内容提要	(135)
	习题选解	(136)
§ 4	函数的微分	(141)
	内容提要	(141)
	习题选解	(142)
§ 5	高阶的导函数和微分	(147)
	内容提要	(147)
	习题选解	(148)
§ 6	罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理	(168)
	内容提要	(168)
	习题选解	(168)

§ 7	函数的增大与减小、不等式·····	(185)
	内容提要 ·····	(185)
	习题选解 ·····	(186)
§ 8	凹凸性、拐点·····	(199)
	内容提要 ·····	(199)
	习题选解 ·····	(200)
§ 9	未定式的求值法 ·····	(208)
	内容提要 ·····	(208)
	习题选解 ·····	(209)
§ 10	泰勒公式·····	(219)
	内容提要·····	(219)
	习题选解·····	(220)
§ 11	函数的极值、函数的最大值和最小值 ·····	(231)
	内容提要·····	(231)
	习题选解·····	(232)
§ 12	依据函数的特征点作函数图形·····	(247)
	内容提要·····	(247)
	习题选解·····	(247)
§ 13	函数的极大值与极小值问题·····	(254)
	内容提要·····	(254)
	习题选解·····	(254)
§ 14	曲线的相切、曲率圆、渐屈线·····	(266)
	内容提要·····	(266)
	习题选解·····	(266)
§ 15	方程的近似解法·····	(268)
	内容提要·····	(268)
	习题选解·····	(269)
第 3 章	不定积分·····	(271)
§ 1	最简单的不定积分 ·····	(271)
	内容提要 ·····	(271)

	习题选解	(272)
§ 2	有理函数的积分法	(294)
	内容提要	(294)
	习题选解	(295)
§ 3	无理函数的积分法	(300)
	内容提要	(300)
	习题选解	(300)
§ 4	三角函数的积分法	(308)
	内容提要	(308)
	习题选解	(309)
§ 5	各种超越函数的积分法	(317)
	内容提要	(317)
	习题选解	(317)
§ 6	函数的积分法的各种例子	(324)
	内容提要	(324)
	习题选解	(325)
第 4 章	定积分	(334)
§ 1	定积分作为和的极限	(334)
	内容提要	(334)
	习题选解	(335)
§ 2	利用不定积分计算定积分的方法	(336)
	内容提要	(336)
	习题选解	(337)
§ 3	中值定理	(356)
	内容提要	(356)
	习题选解	(357)
§ 4	广义积分	(360)
	内容提要	(360)
	习题选解	(361)
§ 5	面积的计算法	(370)

	内容提要	(370)
	习题选解	(371)
§ 6	弧长的计算法	(376)
	内容提要	(376)
	习题选解	(377)
§ 7	体积的计算法	(380)
	内容提要	(380)
	习题选解	(380)
§ 8	旋转曲面表面积的算法	(389)
	内容提要	(389)
	习题选解	(389)
§ 9	矩的计算法、重心的坐标	(392)
	内容提要	(392)
	习题选解	(393)
§ 10	力学和物理学中的问题	(394)
	内容提要	(394)
	习题选解	(395)
§ 11	定积分的近似计算法	(397)
	内容提要	(397)
	习题选解	(398)

第一篇

单 变 量 函 数

分析引论

§ 1 实 数

内 容 提 要

1. 数学归纳法

为了证明某定理对任意自然数 n 为真, 只需证明下面两点就够了: ① 这定理对 $n=1$ 为真; ② 设这定理对任何一个自然数 n 为真, 则它对其后的一个自然数 $n+1$ 也为真.

2. 分割

假设分有理数为 A 和 B 两类, 使其满足下列条件: ① 两类均非空集; ② 每一个有理数必属于一类, 且仅属于一类; ③ 属于 A 类(下类)的任一数小于属于 B 类(上类)的任何数. 这样的分类法称为分割. 若或是下类 A 有最大的数, 或是上类 B 有最小的数, 则分割 A/B 确定一个有理数. 若 A 类无最大数, 而 B 类亦无最小数, 则分割 A/B 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数.

3. 绝对值

假若 x 为实数, 则用下列条件所确定的非负数 $|x|$, 称为 x 的绝对值:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y , 有以下的不等式成立:

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

4. 上确界和下确界

设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合. 若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式 $x \geq m$,

(2) $\forall \epsilon > 0, \exists x' \in X$, 使 $x' < m + \epsilon$,

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式 $x \leq M$,

(2) $\forall \epsilon > 0, \exists x'' \in X$, 使 $x'' > M - \epsilon$, 则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界, 则通常说 $\inf\{x\} = -\infty$; 若集合 X 上方无界, 则认为 $\sup\{x\} = +\infty$.

5. 绝对误差和相对误差

设 a ($a \neq 0$) 是被测的量的准确数值, 而 x 是这个量的近似值,

则 $\Delta = |x - a|$ 称为绝对误差, 而 $\delta = \frac{\Delta}{|a|}$ 称为被测的量的相对误差.

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字的单位的一半, 则说 x 有 n 位准确的数字.

6. 利用数学归纳法可证下列等式对任何自然数 n 皆成立

$$(1) 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$(2) 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$(3) 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

$$(4) 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

$$(5) \text{ 设 } a^{(n)} = a(a-h) \cdots [a - (n-1)h] \text{ 及 } a^{(0)} = 1, \text{ 则 } (a+b)^{(n)} \\ = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{(n-m)} b^{(m)}.$$

习 题 选 解

【1—7】 证明若 $x > -1$, 则不等式

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1)$$

①

为真,且仅当 $x=0$ 时,等号成立.

证(数学归纳法) 当 $x=0$ 时,显然式①等号成立.

下设 $x>-1$ 且 $x\neq 0, n>1$. 当 $n=2$ 时, $(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x$, 式①成立. 假设 $n=k$ 时, 式①成立, 即 $(1+x)^k>1+kx$.

当 $n=k+1$ 时, 由上式得

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x) \\ &= 1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x,\end{aligned}$$

可见当 $n=k+1$ 时, 式①也成立. 故对一切 $n>1$ 的自然数, 式①都成立.

注 式①称为伯努利(Bernoulli)不等式, 它的一般情形是

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

$$\text{【2—10】 证明不等式 } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \quad \text{①}$$

证 记左式为 $x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ (>0), 由于

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{x_n} \cdot \frac{1}{2n+1},$$

$$\text{得} \quad x_n^2 < \frac{1}{2n+1} \Rightarrow x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

注 同理可得

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n} > \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{x_n} \cdot \frac{1}{4n} \Rightarrow x_n > \frac{1}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.\end{aligned} \quad \text{②}$$

$$\text{综合式①和式②, 有} \quad \frac{1}{2\sqrt{n}} < x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \quad \text{③}$$

本题用的是证不等式的放(大)缩(小)法, 这在今后的“ ϵ - N ”、“ ϵ - δ ”论证法中经常使用. 也可用数学归纳法证得以上式子.

【3—10.1】 证明不等式:

$$(2) \quad n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geqslant 3); \quad (4) \quad (2n)! < 2^{2n}(n!)^2.$$

证 (2) 只需改证等价不等式 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n$. 而

$$\begin{aligned}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right),\end{aligned}$$

$$\text{又 } k > 2 \text{ 时, } 1 - \frac{k-1}{n} < 1, \quad \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}},$$

$$\text{故 } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3 \leq n,$$

$$\text{所以 } (n+1)^n < n^{n+1}.$$

$$\begin{aligned}(4) \quad (2n)! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \\ &< (2 \cdot 4 \cdots 2n)^2 < 2^{2n} (n!)^2.\end{aligned}$$

【4—15】 求证任何非空且下方有界的数集有下确界, 而任何非空且上方有界的数集有上确界.

证 我们只证有上确界的第二个命题. 求证有下确界的第一个命题留给读者.

设 M 是数集 $\{x\}$ 的上界. 若 $M \in \{x\}$, 则显然有 $M = \sup\{x\}$, 从而得证. 若 $M \notin \{x\}$, 则对 $\{x\}$ 中任一数 x_0 , 必有 $x_0 < M$.

下面从区间 $[x_0, M]$ 出发, 构造一个区间套, 用以证明 $\{x\}$ 的上确界存在.

将区间 $[x_0, M]$ 二等分, 若中点 $x_1 = \frac{x_0 + M}{2}$ 是 $\{x\}$ 的上界, 则取 $[x_0, x_1]$, 否则取 $[x_1, M]$; 并把所取的区间记作 $[a_1, b_1]$, 则有 $[a_1, b_1] \subset [x_0, M]$ 及 $b_1 - a_1 = \frac{M - x_0}{2}$.

再将 $[a_1, b_1]$ 二等分, 若中点 $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ 是 $\{x\}$ 的上界, 则取 $[a_1, x_2]$, 否则取 $[x_2, b_1]$; 和上面一样把所取的区间记作 $[a_2, b_2]$, 则有 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, 且 $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{M - x_0}{2^2}$.

如此继续无限制地做下去, 得到一系列闭区间 $[x_0, M]$,