WHY DO
CHINESE AND ENGLISH
SPEAKERS THINK DIFFERENTLY
IN MATHEMATICS

汉英
数学思维
对比研究

何南林　范林芳　卢木林　著

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

汉英数学思维对比研究 / 何南林,范林芳,卢木林著. —镇江:江苏大学出版社,2012.12
ISBN 978-7-81130-432-9

Ⅰ.①汉… Ⅱ.①何…②范…③卢… Ⅲ.①数学-思维方法-对比研究-汉语、英语 Ⅳ.①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 319494 号

汉英数学思维对比研究

著　　者/何南林　范林芳　卢木林
责任编辑/杨海濒　张小琴
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编:212003)
电　　话/0511-84446464
网　　址/http://press.ujs.edu.cn
排　　版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷/丹阳市兴华印刷厂
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/890 mm×1240 mm　1/32
印　　张/9
字　　数/250 千字
版　　次/2012 年 12 月第 1 版　2012 年 12 月第 1 次印刷
书　　号/ISBN 978-7-81130-432-9
定　　价/32.00 元

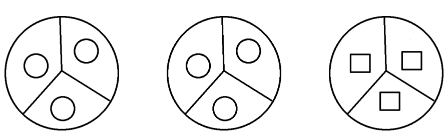
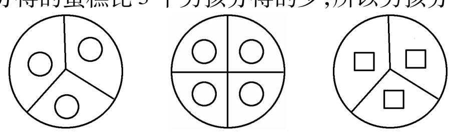
如有印装质量问题请与本社营销部联系(电话:0511-84440882)

目　录

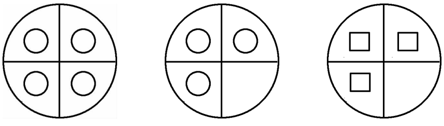
概　论

在教育部举办的一次“全国小学数学骨干教师国家级培训班”上,一份名为《中美学生正确使用各种策略的人数百分比》的报告,引起广泛关注。且看下面的图示。

中美学生正确使用各种策略的人数百分比

题:3 个男孩平分 1 块蛋糕,7 个女孩平分 2 块蛋糕。分好后,每个男孩与每个女孩相比,谁分得的多?	百分数% 美国 ($n=42$)
策略 1:男孩分得$\frac{1}{3}$块蛋糕,女孩分得$\frac{2}{7}$。比较$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{7}$,通分或化成小数,可知$\frac{1}{3}>\frac{2}{7}$。	21
策略 2:如果有 6 个女孩,则男孩与女孩得的蛋糕一样多,现在有 7 个女孩,所以女孩得的少一些。	14
策略 3:每 3 个女孩分一块蛋糕,这样 6 个女孩与男孩得的蛋糕一样多。但有一个女孩没有蛋糕,所以女孩得的少一些。 	7
策略 4:3 个女孩分一块蛋糕,其余 4 个女孩分另一块蛋糕。4 个女孩分得的蛋糕比 3 个男孩分得的少,所以男孩分得的多。 	29
策略 5:女孩的蛋糕是男孩的 2 倍,而女孩人数是男孩的 2 倍多,所以男孩分得的多。	10

续表

题:3 个男孩平分 1 块蛋糕,7 个女孩平分 2 块蛋糕。分好后,每个男孩与每个女孩相比,谁分得的多?	百分数 美国 ($n=42$)
策略 6:每块蛋糕切成 4 份,7 个女孩每人一份,还剩一份,男孩每人一份,还剩一份。剩下一份分别被 3 个男孩和 7 个女孩分,所以女孩得的少。 	7
策略 7:$7 \div 2 = 3.5$,$3 \div 1 = 3$,每 3.5 个女孩分一块蛋糕,而男孩是 3 个人分一块蛋糕,所以男孩分得的多。	10
策略 8:每块蛋糕平均切成 21 份,每个女孩分得 6 份,每个男孩分得 7 份,所以男孩分得的多。	2

表中显示,对同一道题目共有 8 种不同的解答策略,然而,中国学生的使用率仅仅只有一种超过美国学生,其余均远远低于后者——有两种甚至出现空白。也就是说,绝大多数中国学生只会一题一解,而美国学生则普遍擅长一题多解。

报告人的用意很明显,即提醒“全国小学数学骨干教师”注意这样一个严重事态:中国学生的解题方式远远不如美国学生灵活。这一目的应该说是达到了。比如,培训班结束后,便有受训教师以“创新能力是怎样流失的”为题,发表了自己的研究成果:

> 前不久,我用此题对某校六年级学生做过同样的测查,结果 48 名学生中除了有 3 位用“策略 2”解题外,其余的全部用“策略 1”解题。后又对这个学校四年级学生测查一道题:有 5 名同学的身高分别是 134 厘米、136 厘米、138 厘米、133 厘

> 米和 139 厘米，求他们的平均身高。结果全班无一例外地只会列式计算：(134 + 136 + 138 + 133 + 139) ÷ 5 = 136。
>
> 后来，我查看了《数学》第八册教材，发现上面也只有一种解法。我想，教师可能是受了教材的影响。但如果教师能用活教材，多从培养学生创新能力的角度考虑，那么学生的解法应该会是多种多样的：
>
> 130 + (4 + 6 + 8 + 3 + 9) ÷ 5 = 136，
> 134 + (2 + 4 - 1 + 5) ÷ 5 = 136，
> 135 + (4 - 1 - 2 + 3 + 1) ÷ 5 = 136，
> ……
>
> 从这些问题中我们不难看出，虽然强调了多年以学生为主体，以教师为主导，培养学生的创新精神和实践能力，但实际教学似乎还只是停留在教育理论、教学总结中，没有真正走进课堂，走进我们的学生。

作者最后得出结论：上课时老师喜欢用自己的思维方式代替一个班几十人的思路、方法、见解，并且常说“这个方法最简便，容易掌握”等。方法简便了，可脑子也简便了，只会“复制—粘贴”。这样一来，虽然学生都掌握了，可只学会了一种解法，而且不是经过自己独立思考得来的那一种，最终还是在复制老师的思维。这样发展下去就会从懒得思考到最后不会思考，更不会创新。(欧阳玉和 2003)

“中国人的创新能力不如外国人”，这样的论点基本上能够得到国人的普遍认可。与之相近的另一种说法是：中国人主要擅长考试，或者说，聪明才智大多消耗在了考场上，以至于出了学校，已经所剩无几——更不用说因此而思维僵化，当然也就难以与很少经历此类折磨的外国人抗衡。

不过，仅仅根据“分蛋糕”这样一个小学数学题目的解答情况，

是否就能得出“中国学生解题能力差，以及创新能力流失”的结论，恐怕还有待商榷。

首先，如果单从解题方式 1∶7 的比率，便可以得出中国人创新能力流失的结论，那么，假如有人进一步“精确地”计算出“中国人的创新能力只有美国人的七分之一”，恐怕我们又会觉得难以接受——难道中国人真的就这么差吗？那么这类“定量”数据的说服力究竟有多大呢？

其次，更加重要的是，有必要对这 8 种解题策略具体分析。如果按照性质进行归类，可以分为 3 种：第 1 种为“计算型”；第 2，5，7，8 种为“文字型”；第 3，4，6 种为“图画型”。试问：3 种类型之间，有无高下优劣之分？

众所周知，解决问题往往需要考虑“最佳方案”，而考试由于受到时间限制，答题更有必要讲究效率。很显然，3 种解题策略中，第 1 种堪称最佳，所需时间最少。反之，一份试卷中，假如所有题目通通使用文字法或者图画法解答，不但时间远远不够，答案也难保正确。那么，中国学生之所以方法单一，会不会是因为他们已经找到了最佳途径，故而不复他求呢？而美国学生之所以花样翻新，是否恰恰也正是因为他们找不到最佳策略呢？

该表仅显示了两国学生解题策略的使用情况，却没有告诉我们解题正确率。按照常识，既然连算式都列出来了，那么，只要认真计算，小心核对，应该不难得出正确结果。中国学生使用计算法高达 89%，而美国学生仅为 21%，我们似乎有理由相信，前者的正确率应该远远高于后者。假如事实果真如此，策略的多少显然也就无足轻重了。甚至不妨说，如果因为策略过多反而影响到正确率的话，那就更是得不偿失，有害无益了。

“创新”之所以重要，关键在于“守旧”已不堪重任。然而，假如“创新”反而不如“守旧”有效，甚至更加耗时费力，那岂不是走弯路吗？举个简单的例子，从北京到广州，最佳途径当然莫过京广线，假如有人偏要绕道西藏，甚至先飞美国，我们只会怀疑他是公费旅游，

而绝不会称赞其“勇于创新”。

皮亚杰将儿童的智力发展划分为4个阶段：一是感知运动阶段（从出生到两岁），开始协调感知和动作之间的活动；二是前运演阶段（两岁到六七岁），主要依靠表象和直觉进行心理活动；三是具体运演阶段（六七岁到十一二岁），这个阶段已经能够进行逻辑运演；四是形式运演阶段（十一二岁到十四五岁），这是逻辑思维的高级阶段。

美国著名应用数学家、数学教育家克莱因指出：“甚至原始文明也发明了表示数的特殊记号，因此，这些文明已显示出他们知道这样的事实：3只羊、3个苹果和3枚箭有很大的共同性，即数量3。这样，数字就被看作是一种抽象的思想，在抽象意义上，数与特殊的物质实体无关，这是思想史上重要的进步之一。每一个人在学习过程中，都经历了一个将数与物质实体分离的智力过程。”（克莱因2004：13）

虽然每一个人都必须经历“将数与物质实体分离的智力过程”，但相互之间有无时间上的先后差别呢？仍然以“分蛋糕”为例，甲、乙两个同龄学生，假如甲能够从具体实物中抽象出$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{7}$这样的数字，并且比较大小，那我们当然有理由认为，他已经进入了逻辑思维的高级阶段；与之相反，乙仍然需要依靠表象和直觉进行心理活动（比如实物操作或者画图），那就只能认为他依旧停留在“前运演阶段”。两者相比，甲的思维发展显然更加成熟。

然而，现在的问题是，每一个人，乃至每一个民族都必须经历同样的智力过程，那么，假如不同语言民族之间同样出现这种思维发展上的先后差异，又该如何评述呢？

著名数学家陈省身曾论及算术向代数的发展问题：“数学究竟是什么？数学家做些什么？大致说来，数学把自然现象抽象化，用逻辑推理获得结论。因为对象和方法都‘简单’，所以数学便成为一门有力和有用的学问。例如：从一条狗、两条狗三条狗到1，2，3，从1，

2,3 到 x,y,z,便可看出代数的力量。”(陈省身 2002:152)

算术的思维方式,无论是在中国古代,还是在古希腊都曾经相当辉煌。现代数论的许多问题都源于古希腊时的算术理论,这都充分表明算术思维方式在当时产生的积极作用。算术思维方式对已知数的依赖和对未知数的排斥,说明这种特定的数学符号形式与运算形式已经跟不上不断发展的数学内容。数学内容的发展突破了算术思维方式的局限性。

代数解决问题的思维方式中最关键的思想是,把未知量作为一个与已知量有相同意义的数量符号,同已知量一起组成关系式,并按等量关系由等号相连列出方程,然后通过方程的恒等变换或同解变换求出未知量的数值。

代数的思维方式有两点比算术优越。

第一,代数的思维方式把未知数看作是与已知数一样可参与运算的数学符号,未知数作为一个特定的数学符号在等式中有着与已知数相同的意义。

第二,代数的思维方式对相等有更灵活的认识,解方程中强调每一步得到的都是等式,而上一方程与下一方程并不一定相等。例如,从 $3x+5=2x+6$ 到 $x=1$,两方程同解而非相等。在算术中,一个算式如有多步演算,每步都要保持相等关系。

数学从算术向代数发展,代表了数学思维方式的改变。这种改变不仅扩大了算术的应用范围,对数学的发展更产生了重大而深远的影响。例如,对二次方程求解,使人们创造了虚数;对五次以上的方程求解,最终导致了群论的诞生;把代数的思想方法应用于几何问题之中,最终导致了解析几何的问世。(王宪昌 2010:28-29)

如果“数学从算术向代数发展,代表了数学思维方式的改变”,那是否同样可以说“数学从画图向算术发展,代表了数学思维方式的改变”呢? 既然掌握了代数思维就不愿意退回到算术思维,那么,掌握了算术思维会愿意退回到画图思维吗? 更确切地说,已经进入到高级思维阶段的民族以及个人,还会愿意退回到低级阶段吗?

蔡金法在谈到“为什么我们应该关心华人怎样学数学”的问题时写道:“首先,研究华人怎样学习数学可以扩展我们的经验,并提供关于数学教学实际问题的不同观点。例如,要实现‘人人学代数’的目标,必须让低年级的学生有更多的经验,以便为他们升入初中和高中后学习更多、更难的代数做好准备,这已是被广泛接受的观点。但是,课程设计者、教育研究者、教师和政策制定者刚开始思考和探索小学生需要的数学经验,以便为他们在高年级时正式学习代数做好准备。中国小学数学课程在低年级就包含了大量的活动和概念,这为学生提供了关于代数思维的丰富经验。中国的小学数学课程中,学习代数的一个首要目标是为了更好地表示和理解数量关系,其核心的问题是列方程和解方程。教师在教学中不断地鼓励小学生,并为他们提供机会以算术和代数两种方式表述数量关系,进而要求学生比较表达一个数量关系时算术方法和代数方法的区别。先描述再计算是代数不同于算术的一个主要特征。通过算术方法和代数方法的比较可以突出代数这一独特性。中国的小学数学课程为学生提供了大量的例题和习题让学生判断数量关系,并用多种方法表示它们。中国在小学低年级开发学生代数思维的经验可以提高其他国家教师应对所面临的同样问题和挑战的能力。”(范良火等 2005:417)

既然提倡“人人学代数”,既然“教师在教学中不断地鼓励小学生”,那么,中国小学生大量使用代数方法——更不用说算术方法——不正是人们期望的结果吗?

尤其值得注意的是以上引文中最后的结论:“中国在小学低年级开发学生代数思维的经验可以提高其他国家教师应对所面临的同样问题和挑战的能力。”常言道:他山之石,可以攻玉。很显然,“中国在小学低年级开发学生代数思维”在这里是被视为一个成功的经验,希望其他国家予以效仿。不妨想象一下,假如美国真的向中国学习,让小学生充分体验“代数的力量”,那么,再遇到“分蛋糕”这样的题目,他们还会花费大量时间去画图求解吗?

2004 年 11 月 29 日《文汇报》刊登了华东师范大学数学系张奠

宙教授对著名数学家陈省身的访谈,其中一节的小标题为"中国的数学教育比美国好"。且看具体对话:

张:1989 年的 IAEP 国际数学测试中,中国大陆以 80 分的正确率在 23 个国家中排名第一。

陈:高水平的国际奥林匹克数学竞赛,中国学生也老拿第一。所以说,中国的数学教育是不错的。

张:最近以来,中国向国外的流行教育理论学习,引进了很多"后现代主义"的教育理论。结果是认为中国数学教育很落后,美国的数学教育才是先进的。

陈:中国千万不要学习美国的数学教育。中国数学教育在实践上肯定比美国好,我们自己要珍惜、总结。

张:美国中小学生的数学成绩不佳,但是美国出了很多世界一流的数学家。

陈:美国数学家很好,但是很多都是移民。美国吸引世界上最好的数学家到美国工作,实际上和美国的基础教育关系不大。我一直认为,好学生不是"教"出来的,只要数学环境好,好学生有自动的能力,自己可以成长。现在我们主要是讨论对大多数中小学生的数学教育问题。

张:我也注意到杨振宁先生在评论中国教育现状时说:"90% 的小孩,用中国传统教育较扎实……我总觉得太把西方人的见解当成讨论的基础、焦点。"

陈:由于中国曾经长期处于比较落后的状态,中国人往往会有"不如外国人"的心理。我在数学上努力,就是想打破这种心态。我想证明,中国人在数学上可以做得和外国人一样好,甚至更好。中国的数学教育在某些方面也做得很好,应该有自信。当然,自信绝不是自满。

香港学者梁贯成对内地同行提出忠告:"面对国际课程改革的趋势,我们面对的一种危险是落后于其他国家,进而在越来越激烈的

全球经济竞争中落败。但是,另一种危险是我们简单地跟随国际潮流,结果丢掉了我们自己的优点。在我们的文化中,长期存在的弱点需要巨大的勇气来改变。但是我们需要更大的勇气来抵制那些在'发达'国家中正在发生的变化,并且坚持一些传统价值来保持我们的优点。最为困难的是区别什么应该改变,而什么又不应改变!"(梁贯成 2005)

旅美学者蔡金法亦告诫:"当前,中国正围绕课程展开一系列的数学教育改革。改革不可避免地会触及中国数学教育的传统,争论是不可避免的,对美国数学教育改革的兴趣与日俱增,参考美国数学教育改革的一些成功经验和策略也是无可厚非,但其中也有一些值得警觉的倾向。正如有人在哲学上'言必称希腊'一样,我国有的数学教育工作者也'言必称美国'。无论什么事情,只要在美国做了,在中国做就'先进'了,'改革'了。这种以'美国标准'为标准的迹象是危险的。"(聂必凯等 2010:3)

既然"美国标准"并非万能,那么,"中国标准"又如何呢?张奠宙批评:"近百年来,我们的数学教育的理论和实践,总是单向地从国外输入,在'数学教育'的国际超市里挑选各种产品拿来应用。至于中国和海外华人地区自己的数学教育,尽管经验不少,却很少有人认真去总结,连自己的长处在哪里都不知道,遑论向外输出?所以,在数学教育上,我们一直是'入超'。"(范良火等 2005:2)

最后再回到"分蛋糕"的例子。试问:绝大多数中国六年级学生充分利用学过的分数知识,直接比较$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{7}$的大小,这算不算"自己的长处",应不应该"向外输出"?反过来,既然美国六年级学生也已经学过算术,为什么使用比例却仍然如此之低,为什么还有高达80%的学生仍然停留于画图思维?我们当然应该追问:中国学生的创新能力究竟是如何流失的;但恐怕更有必要探讨:究竟是什么原因阻碍了美国学生由画图思维向算术思维乃至代数思维的发展?甚至推而广之,直指根本:Why do Chinese and English speakers think differently in mathematics?（汉英数学思维为何不同?）

第一章

美国数学教育改革之惑

蔡金法在《美国现代数学教育改革》一书的绪言中写道：

> 近五十年来，美国的数学教育改革经历了一个曲折而艰难的探索过程，其间伴随着失败的沮丧和成功的喜悦。在不同的年代，美国数学教育界都会提出一些响亮的主题，比如“新数学运动”、“回到基础”、“建构主义”、“问题解决”以及“标准运动”等，这些主题也几乎成为全球数学教育改革研究的“关键词”。因此，美国数学教育改革的影响不仅局限于国内，而且在一定程度上具有世界性。有人认为，美国数学教育的研究方法和理论水平都是很好的，但实践性的效果还不显著；也有研究者指出，美国的数学课堂与十多年前并无二致，仍在强调基于程序性知识的反复操练，教师和教材仍然是课堂教学的绝对权威。也许有些读者对此会感到愕然或不解，不相信在数学教育改革进行得“如火如荼”的美国，数学课堂教学还是“岿然不动”。但我们也可以从另一个侧面来思考这一现象：数学教育改革的确很艰难。（聂必凯等 2010：1）

该书列举了美国当前数学教育改革面临的 8 大困惑，人们从中不难体会美国数学教育改革到底有多艰难，亦不难想象几十年来一连串的“响亮主题”到底取得了怎样的效果：

（1）只有学生的自我发现才是真正的学习；

（2）对数学问题的解答只需一个合理的估算，准确答案不是必需的，因而基本计算技能是无足轻重的；

（3）数学教学存在两种基本对立的方法，通过问题解决加深概念的理解和通过反复练习获得数学技能；

（4）有充分的证据表明，基于 NCTM 标准的数学课程对学生的数学学习非常有效（引者注：NCTM 为全美数学教师理事会）；

（5）数学教师乐于参与和使用基于 NCTM 标准的数学课程（项目），并且知道如何使用它们；

（6）现代教育技术在数学教学中的使用，标志着数学教育改革的一种方向；

（7）数学概念置于一定的情境时，学生才能更好地理解和掌握，而且蕴涵于情境中的数学概念会自动被学生理解；

（8）直观表征能自动发展到概括或抽象的水平。（聂必凯等 2010：181－215）

由于篇幅所限，不能一一涉及，在此选取其中 5 种，结合两国具体情况，略作介绍。

第一节　自我发现

中国教育最受诟病之处，大概可以首推有关“独立思考”的问题，也即所谓“从懒得思考到最后不会思考，更不会创新”。与之相反，美国教育则鼓励自我探索，自我发现，因而更加有利于培养创新意识。这样的事实当然不容否认，然而，恐怕极少有人想到，有关“自我发现”的问题，如今却成了美国数学教育改革中的第一大困惑。

对于“只有学生的自我发现才是真正的学习”的说法，聂必凯等给予的评析是：一种典型的极端建构主义观念。因为“学习活动离不开学习者所处的社会环境。数学学习的内容更是人类社会漫长的经验和理论的积累过程的结晶，其中一部分内容可以借助仔细挑选的数学主题让学生自主探究并‘发现’，但是这并不代表所有数学内容都必须让学生发现。数学课堂的现实局限很难再现数学史上的‘发现’过程，一方面那将是一个极端耗时的过程，没有哪一种学制