

前 言

数学分析是大学数学系的一门重要的必修课,是学习其它数学课的基础。同时,也是工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作,它在中国有很大影响,早在上世纪五十年代,国内就出版了该书的中译本。现安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》(杨立信,毕秉钧翻译)。新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题,该习题集有五千道习题,数量多,内容丰富,包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大,初学者不易解答,应安徽人民出版社的同志邀请我们为新版习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知,学习数学,做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题,可以巩固我们所学到的知识,加深我们对基础概念的理解,还可以提高我们的运算能力,逻辑推理能力,综合分析能力。所以,我们希望读者遇到问题一定要认真思考,努力找出自己的解答,不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答,许宁编写了第六、七章习题的解答。在本书的编写过程中,我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解,在许多方面得到了启发,谨对原书的作者表示感谢,在此,不再一一列出。由于我们水平有限,错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编 者

2007年7月

目 录

第二章 一元函数的微分学	(1)
§ 1. 显函数的导数	(1)
§ 2. 反函数的导数,用参数表示的函数的导数,隐函数 的导数	(93)
§ 3. 导数的几何意义	(104)
§ 4. 函数的微分	(122)
§ 5. 高阶导数和微分	(134)
§ 6. 罗尔、拉格朗日和柯西定理	(191)
§ 7. 函数的递增和递减,不等式	(219)
§ 8. 凹凸性,拐点	(245)
§ 9. 不定形的求值	(258)
§ 10. 泰勒公式	(286)
§ 11. 函数的极值.	(316)
§ 12. 依据函数的特征点绘制图形	(351)
§ 13. 函数的最大值和最小值问题	(431)
§ 14. 曲线相切,曲率圆、渐屈线	(456)
§ 15. 方程的近似解法	(472)

第二章 一元函数的微分学

§ 1. 显函数的导数

1. 导数的定义

如果 x 和 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值, 则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

被称作函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[x, x_1]$ 内的增量.

$$\text{表达式: } y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \textcircled{1}$$

若有意义, 则称为导数, 而函数 $f(x)$ 本身在此情况下称作可微分的函数.

数 $f'(x)$ 在几何上为函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率 $[\text{tg} \alpha = f'(x)]$. (图 6)

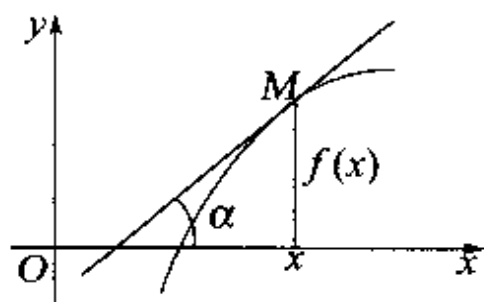


图 6

2. 求解导数的基本规则

如果 c 是常数和函数

$$u = u(x), v = v(x), w = w(x)$$

都有导数, 则

$$(1) c' = 0;$$

$$(2) (cu)' = cu';$$

$$(3) (u+v-w)' = u' + v' - w';$$

$$(4) (uv)' = u'v + v'u;$$

$$(5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0);$$

$$(6) (u^n)' = nu^{n-1}u' (n \text{— 常数});$$

(7) 如果函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数, 则

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3. 基本公式

如果 x 是自变数, 则

$$(1) (x^n)' = nx^{n-1} (n \text{— 常数}).$$

$$(2) (\sin x)' = \cos x.$$

$$(3) (\cos x)' = -\sin x.$$

$$(4) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(5) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$(6) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(7) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(8) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(9) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(10) (a^x)' = a^x \ln a (a > 0), (e^x)' = e^x.$$

$$(11) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1);$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

$$(12) (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

$$(13) (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

$$(14) (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$(15) (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4. 单边导数

$$\text{表达式 } f'_{-}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{和 } f'_{+}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称作函数 $f(x)$ 在 x 点的左边导数或右边导数.

对于导数 $f'(x)$ 的存在充要条件是

$$f'_{-}(x) = f'_{+}(x).$$

5. 无穷导数

如果在 x 点上函数 $f(x)$ 是连续的, 且

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty$$

则说明函数 $f(x)$ 在 x 点有无穷导数. 在这种情况下函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点上的切线与 Ox 轴垂直.

821. 如果 x 由 1 变到 1000, 求出自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \lg x$ 的对应增量 Δy .

$$\text{解 } \Delta x = 1000 - 1 = 999$$

$$\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3$$

822. 如果 x 由 0.01 变到 0.001, 求出自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的对应增量 Δy .

$$\text{解 } \Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009$$

$$\Delta y = \frac{1}{0.001^2} - \frac{1}{0.01^2} = 900$$

823. 若 (1) $y = ax + b$;

(2) $y = ax^2 + bx + c$;

$$(3) y = a^x.$$

变量 x 获得增量 Δx , 求出增量 Δy .

$$\text{解} \quad (1) \Delta y = [a(x + \Delta x) + b] - [ax + b] \\ = a\Delta x.$$

$$(2) \Delta y = [a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + C] - [ax^2 + bx + C] \\ = (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2$$

$$(3) \Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$$

$$824. \text{ 证明: } (1) \Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$(2) \Delta[f(x)g(x)] = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).$$

$$\text{证} \quad (1) \Delta[f(x) + g(x)] \\ = [f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)] \\ = [f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)] \\ = \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

$$(2) \Delta[f(x)g(x)] \\ = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ = [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x) \\ + f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)] \\ = \Delta f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x)\Delta g(x)$$

825. 经过曲线 $y = x^2$ 上的两个点 $A(2, 4)$ 及 $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ 引出割线 AA' , 求出此割线的斜率, 若 (1) $\Delta x = 1$; (2) $\Delta x = 0.1$; (3) $\Delta x = 0.01$; (4) Δx 为任意小.

已知曲线在点 A 上的切线的角系数等于多少?

解 割线 AA' 的斜率为

$$k_{AA'} = \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

$$(1) k_{AA'} = 5 \qquad (2) k_{AA'} = 4.1$$

$$(3) k_{AA'} = 4.001 \qquad (4) k_{AA'} = 4 + \Delta x$$

于是, 在 A 点的切线斜率为

$$k_A = \lim_{A' \rightarrow A} k_{AA'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4$$

826. 利用函数 $y = x^3$ 将 Ox 轴上的线段 $1 \leq x \leq 1 + h$ 映射

到 Oy 轴上. 若以 (1) $h = 0.1$; (2) $h = 0.01$; (3) $h = 0.001$, 求出其平均的伸长系数, 并进行数值计算. 问当映射到点 $x = 1$ 时, 伸长系数等于多少?

解 平均伸长系数为

$$\bar{L} = \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = 3 + 3h + h^2$$

$$(1) \bar{L} = 3 + 3 \cdot (0.1) + (0.1)^2 = 3.31;$$

$$(2) \bar{L} = 3 + 3 \cdot (0.01) + (0.01)^2 = 3.0301;$$

$$(3) \bar{L} = 3 + 3 \cdot (0.001) + (0.001)^2 = 3.003001.$$

于是, 在点 $x = 1$, 伸长系数为

$$L|_{x=1} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{L} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3$$

827. 某点沿 Ox 轴运动的规律用下式表示:

$$x = 10t + 5t^2$$

式中 t —时间(以秒计); x —距离(以米计).

求出在时间 $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ 内某点的平均运动速度并进行数值计算, 若: (1) $\Delta t = 1$; (2) $\Delta t = 0.1$; (3) $\Delta t = 0.01$. 问当 $t = 20$ 时其运动速度等于多少?

解 平均速度为

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{[10(20 + \Delta t) + 5(20 + \Delta t)^2] - [10 \times 20 + 5 \times 20^2]}{\Delta t} \\ &= 210 + 5\Delta t \end{aligned}$$

$$(1) \bar{v} = 210 + 5 \times 1 = 215 (\text{米/秒})$$

$$(2) \bar{v} = 210 + 5 \times 0.1 = 210.5 (\text{米/秒})$$

$$(3) \bar{v} = 210 + 5 \times 0.01 = 210.05 (\text{米/秒})$$

于是, 当 $t = 20$ 时运动的速度为

$$v|_{t=20} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (210 + 5\Delta t) = 210 (\text{米/秒})$$

828. 根据导数的定义, 直接求出以下函数的导数:

(1) x^2 ; (2) x^3 ; (3) $\frac{1}{x}$; (4) $\sqrt{x}$; (5) $\sqrt[3]{x}$; (6) $\operatorname{tg} x$; (7) $\operatorname{ctg} x$;

(8) $\arcsin x$; (9) $\arccos x$; (10) $\operatorname{arctg} x$.

$$\text{解} \quad (1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$\text{于是 } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\begin{aligned} (2) \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + \Delta x)x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{(x + \Delta x)x} + \sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)} \\ &= 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \end{aligned}$$

$$(7) \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x + \Delta x)} \\
&= -\sec^2 x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x
\end{aligned}$$

(8) 由三角函数公式有

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x}{\Delta x} \\
&= \frac{\arcsin[(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x+\Delta x)^2} \cdot x]}{\Delta x}
\end{aligned}$$

令 $t = (x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x+\Delta x)^2} \cdot x$
 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$. 从而

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} \cdot \frac{(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2(1-x^2) - x^2[1-(x+\Delta x)^2]}{\Delta x[(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

其中 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1$

(9) 由三角函数公式, 有

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arccos(x + \Delta x) - \arccos x}{\Delta x} \\
&= \frac{\arcsin[x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2} - (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}]}{\Delta x}
\end{aligned}$$

令 $t = x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2} - (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}$
 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$. 于是

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} \cdot \frac{x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2} - (x+\Delta x)^2\sqrt{1-x^2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x - \Delta x}{x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2} + (x+\Delta x)^2\sqrt{1-x^2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(10) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{arctg}(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} x}{\Delta x} \\
&= \frac{\operatorname{arctg} \frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x} \\
&= \frac{\operatorname{arctg} \frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}} \cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)}
\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}} \cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)} \\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

其中利用 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = 1$

829. 若: $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

求出 $f'(1), f'(2), f'(3)$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad f'(x) &= (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 \\
&\quad + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 \\
&= 2(x-2)(x-3)^2(3x^2 - 11x + 9)
\end{aligned}$$

于是 $f'(1) = (-1)^2(-2)^3 = -8$

$$f'(2) = f'(3) = 0$$

830. 若: $f(x) = x^2 \sin(x-2)$, 求出 $f'(2)$.

解 $f'(x) = 2x \sin(x-2) + x^2 \cos(x-2)$

于是 $f'(2) = 2^2 \cos 0 = 4$

831. 若: $f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

求出 $f'(1)$.

解 法一:

$$f'(x) = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}$$

所以 $f'(1) = 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}$

法二: 当 $x = 1$ 时

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x + \Delta x \arcsin \sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}}{\Delta x}$$

$$= 1 + \arcsin \sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}$$

于是 $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \arcsin \sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}} \right)$
 $= 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}$

832. 若函数 $f(x)$ 在点 a 可微分, 求出 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

解 设 $x - a = \Delta x$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $\Delta x \rightarrow 0$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

833. 证明: 如果函数 $f(x)$ 可微分, 且 n 为自然数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x) \quad ①$$

相反,如果对于函数 $f(x)$ 存在极限 ①,能否断定此函数有导数?

研究狄利克雷函数的例子(参阅第一章,题 734).

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \end{aligned}$$

反之, $f(x)$ 不一定可导,例如,对于狄利赫列函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

在任一有理数点是不连续,当然在这些点也不可导.但当 x 为有理数时, $x + \frac{1}{n}$ 仍为有理数,故

$$\chi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \chi(x) = 1 - 1 = 0 \quad (x \text{ 为有理数})$$

$$\text{从而} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\chi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \chi(x) \right] = 0$$

利用导数表,求出以下函数的导数.

$$834. \quad y = 2 + x - x^2$$

问 $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$ 等于多少?

$$\text{解} \quad y'(x) = 1 - 2x$$

$$\text{所以} \quad y'(0) = 1, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$y'(1) = -1, \quad y'(-10) = 21$$

$$835. \quad y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$$

问 x 为何值时:

(1) $y'(x) = 0$; (2) $y'(x) = -2$; (3) $y'(x) = 10$.

解 $y'(x) = x^2 + x - 2$

(1) 由 $y'(x) = 0$, 得

$$x^2 + x - 2 = 0$$

解之得 $x = -2$ 或 $x = 1$

(2) 由 $y'(x) = -2$, 得

$$x^2 + x = 0$$

解之得 $x = -1$ 或 $x = 0$

(3) 由 $y'(x) = 10$, 得

$$x^2 + x - 12 = 0$$

解之得 $x = -4$ 或 $x = 3$

836. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$.

解 $y' = 10a^3x - 5x^4$

837. $y = \frac{ax+b}{a+b}$.

解 $y' = \frac{a}{a+b}$

838. $y = (x-a)(x-b)$.

解 $y' = (x-b) + (x-a) = 2x - (a+b)$

839. $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

解 $y' = (x+2)^2(x+3)^3 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^3$
 $+ 3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$
 $= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3)$
 $+ 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2)]$
 $= 2(x+2)(x+3)^2(3x^2 + 11x + 9)$

840. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

解 $y' = \sin\alpha(x\cos\alpha - \sin\alpha) + (x\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha$
 $= x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$

841. $y = (1 + nx^m)(1 + mx^n)$.

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= mx^{m-1}(1+mx^n) + (1+nx^n)n \cdot mx^{n-1} \\ &= mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (n+m)x^{n+m-1}]\end{aligned}$$

$$842. y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= -(1-x^2)^2(1-x^3)^3 \\ &\quad - 4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3 \\ &\quad - 9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2 \\ &= -(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x)^2 \\ &\quad (1+6x+15x^2+14x^3) \\ &= -(1-x)^3(1+x)(1+2x) \\ &\quad \cdot (1+4x+7x^2)(1+x+x^2)^2\end{aligned}$$

$$842. 1. y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= 20(5+2x)^9(3-4x)^{20} \\ &\quad - 80(5+2x)^{10}(3-4x)^{19} \\ &= 20(5+2x)^9(3-4x)^{19} \\ &\quad \cdot [3-4x-4(5+2x)] \\ &= -20(12x+17)(5+2x)^9(3-4x)^{19}\end{aligned}$$

$$843. y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}.$$

$$\text{解 } y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right) \quad (x \neq 0)$$

844. 证明公式:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

$$\begin{aligned}\text{证 } \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' &= \frac{(ax+b)'(cx+d) - (ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2} \\ &= \frac{a(cx+d) - (ax+b) \cdot c}{(cx+d)^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx + d)^2} \quad (cx + d \neq 0)$$

求下列函数的导数：

$$845. \quad y = \frac{2x}{1-x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \quad (x \neq \pm 1) \end{aligned}$$

$$846. \quad y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}.$$

$$\text{解} \quad y' = \left[\frac{2}{1-x+x^2} - 1 \right]' = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$847. \quad y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{(1-x)^2(1+x)^3 - x[3(1-x)^2(1+x)^2 + 2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1+x)^6} \\ &= \frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4} \quad (x \neq \pm 1) \end{aligned}$$

$$848. \quad y = \frac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{[-2x(2-x^3) - 3x^2(2-x^2)](1-x)^2 + 2(2-x^2)(2-x^3)(1-x)}{(1-x)^4} \\ &= \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3} \quad (x \neq 1) \end{aligned}$$

$$849. \quad y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q - q(1-x)^p(1+x)^{q-1}}{(1+x)^{2q}} \\ &= -\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q) + (p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}, \quad (x \neq -1) \end{aligned}$$

$$850. y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{[px^{p-1}(1-x)^q - qx^p(1-x)^{q-1}](1+x) - x^p(1-x)^q}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2} [p - (q+1)x - (p+q-1)x^2].\end{aligned}$$

$$(x \neq -1)$$

$$851. y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}.$$

$$\text{解 } y' = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0)$$

$$852. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\text{解 } y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right) \quad (x > 0)$$

$$853. y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

$$854. y = x\sqrt{1+x^2}.$$

$$\text{解 } y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$855. y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3} \\ &\quad + (1+x)\left[\frac{x\sqrt[3]{3+x^3}}{\sqrt{2+x^2}} + \frac{x^2\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}\right] \\ &= \frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{(3+x^3)^2}} \quad (x \neq \sqrt[3]{-3})\end{aligned}$$

$$856. y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n + n(1-x)^m(1+x)^{n-1}}{(m+n)\sqrt[m+n]{(1-x)^n(1+x)^m}}^{\frac{1}{m+n}}$$

$$= \frac{(n-m) - (n+m)x}{(m+n)^{m+n} \sqrt{(1-x)^n (1+x)^m}} \quad (x \neq \pm 1)$$

$$857. y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} \quad (|x| < |a|). \end{aligned}$$

$$858. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}} \cdot \frac{3x^2(1-x^3) + 3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2} \\ &= \frac{2x^2}{1-x^6} \cdot \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \quad (x \neq \pm 1) \end{aligned}$$

$$859. y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2}) + \sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})^2} \\ &= -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$860. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right] \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}{8\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \end{aligned}$$