目　录

有限元素法——从直觉到概括…… 1
固体力学中的有限元素法……21
结构分析的线性方法……71
矩阵有限元素法…… 124
有限元素法的现状…… 150
电子计算机对工程科学的冲击…… 166
有限元素应力分析…… 209
结构力学中的有限元素法…… 248
平面应力分析的有限元素法…… 285
有限元素分析的曲边等参数“四边形”元素…… 329

需要全本请访问 www.ertongbook.com

有限元素法——从直觉到概括

O. C. Zienkiewicz

一、引　言

工程技术人员要有数字才能描述其设计过程. 使人心烦的是往往有些问题虽然能够"正确地列出公式",但方程繁复,用经典数学又只能得出比较浅显的解. 这时候往往特地为此提出一些粗糙的模型,模型用过一次后就不用了. 但是,在某些时候,从这种粗糙的方法却导致发现(或再发现)一些有效的基本方法. 例如,从赫维赛德(Heaviside)的运算子方法一直到索思韦尔(Southwell)在有限差分方法实际运用方面的示范,都是这样. 有限元素法现在也必须看成是属于这一类的. 它在工程技术人员中确实很流行,后来应用数学家对它感到兴趣,促进了它的迅速发展,或至少是巩固了它的基础.

实际工作者都很熟悉离散型结构系统的处理方法,或者类似的水力学网络、电路网络等的处理方法. 有许多计算机程序在这里是用得上的;事实上电子计算机出现以后,最早发展的一批程序中就有它们. 常常想把一个连续统简化为离散的、等效的元素的组合体,这也许是一种朴素的,但实质上是物理的方法. 比如,在弹性连续介质中,一开始总想用梁或杆的组合体来模拟其性质,而杆和梁是一般工程人员都很熟悉的标准构件. 应该提到一些早期的著作,比如 1941 年雷尼柯夫(Hrenikoff)的[1], 1943 年麦克亨利(McHenry)的[2]

以及 1949 年纽马克 (Newmark) 的 [3]. 但是, 采用具有多重联结点的元素来直接逼近一个连续统, 首先应归功于 1956 年特纳 (Turner) 等人的 [4]、1960 年克拉夫的 [5] 和 1955年阿吉里斯 (Argyris) 的 [6]. 在这些文章中第一次采用了"有限元素"这个奇妙的名词, 但是基本性质的推导, 是从关于子区域中应力或位移分布的物理的推理得出的. 那时候, 计算机开始成为有效的工具, 这就很快使解决实际的复杂的弹性问题成为可能.

元素的刚度性质如何推导出来, 在企图解决这个问题时, 马上想到的方法之一是一个元素一个元素地假定位移模式, 并用节点的位移表示出来, 这样保持了连续性, 而内力则由虚功得出. 显然, 这个过程和对总势能作近似的极小化(类似于雷利—里茨 (Rayleigh—Ritz) 法) 是一致的[7]. 其实, 这种方法和以前的标准方法的主要差别在于分区连续场的确定, 这使得对不规则的边界也可以简单地拟合, 从而避免了显然的限制.

另外, 这种分区确定法的第二个主要优点是明显的. 和在"标准"的里茨过程中不一样, 由最小化得出的方程形成了带状矩阵 (或者至少是稀疏的矩阵), 它的解很容易用直接法或迭代法得出.

那个时期有两件事明确起来. 第一, 如果有限元素法可以如此简单地描写, 那么它可能是已知的数学方法的一个"再发现"; 第二, 它的范围可以推广到其他要求将(二次)泛函极小化的情况. 关于第一点, 在回顾库兰特 (Courant) 的著作以及普拉格 (Prager) 和辛格 (Synge) 的著作后很快就得到了答案. 库兰特在 1943 年的著作[8]中用公式表达了三角形有限元素的实质, 而从普拉格和辛格类似的著作[9] 中可引出 "超圆" 法[10,11].

关于第二点，有限元素法被监凯维奇 (Zienkiewicz)[12]和其他人[13–16]迅速地推广到非结构的领域中，表明这种方法可用于流体力学、热传导、以及由准调和微分形式支配的其他问题.

再则，如果变分法可用有限元素法的表达方式，则 (a) 在分析中可以包括进除节点未知量以外的其他参数；(b) 对同一个问题可以作出许多不同的表达方式.

卞学锺 (Pian)[17]证明，在弹性力学中，可以引进无节点参数，而且实际上用了另外的标准方式来处理. 但是，为了保持所需要的元素间的连续性，总还要保留一些节点参数.

在弹性分析中，还证明了可采用不同的变分形式. 乌贝克 (Veubeke)[18,19] 表明，可采用平衡态应力分布以及采用余能作为所要极小化的泛函.（乌贝克和监凯维奇[20]推导出一种特别简单的方法，可用来求出这种平衡态场以及相应的对偶.）赫尔曼 (Hermann)[21]首次成功地运用了赖斯纳 (Riessner) 泛函，而其他可能的杂交型表达法则由卞学锺详细讨论过[22]. 然而，指出这样一点也会是有益的，即在卞学锺导出这种复杂的杂交型泛函以前很久，早已引进了而且成功地运用了这种类型的元素，其根据仅仅是物理直觉[23,24].

其实，上面最后一点提醒本文作者注意到，即使在今天，虽然有些很成功的元素明显地没有适当的变分形式，却已知它是收敛的，而且给出极为精确的逼近值. 是否有限元素只能从变分形式中推导出来呢？ 将会证明，其它的可能性是存在的.

二、有限元素的一些数学问题

设要求在指定区域上极小化的一个二次泛函是 x，这个泛函由未知函数$\{\phi\}$和它的一些导数的积分所定义. 如果$\{\phi\}$

是一个元素一个元素分区地由坐标、"形状"函数[N]和(未知的)节点参数{$\bar{\phi}$}所描述,则极小化的方程组的形式为[25]

$$\frac{\partial x}{\partial\{\bar{\phi}\}}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\bar{\phi}_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial x}{\partial\bar{\phi}_n}\end{Bmatrix}=[K]\{\bar{\phi}\}+\{F\}=0, \tag{1}$$

对每一元素有

$$\{\phi\}=[N]\{\bar{\phi}\}^e, \tag{2}$$

每一元素的贡献 x^e 求得为

$$\frac{\partial\{x\}^e}{\partial\{\bar{\phi}\}^e}=[K^e]\{\bar{\phi}\}^e+\{F\}^e, \tag{3}$$

并且可应用网络拓扑集合的重要规则,即

$$[K_{ij}]=\sum_{e=1}^{m}[K_{ij}^e]\ 和\ \{F_i\}=\sum_{e=1}^{m}\{F_i^e\}. \tag{4}$$

不论这个泛函的物理性质或数学性质是什么,它和标准的结构力学问题显然是相似的.

一旦坐标、形状函数[N]确定后,列出方程几乎是自动的.

如果所涉及的泛函是二次的,则矩阵[K]、{F}和元素的类似贡献与节点参数无关,并且可以用显式计算出来.

然而这类形状函数的确定也不是完全任意的. 它必须遵守某些完备性准则,如果要求在减少元素尺寸时能够收敛到正确解答的话.

首先,在元素间的边界上,要遵守某些连续性要求,使得在那里对 x 没有贡献[7,25]. 其次,假设没有奇异性,x 的被积函数的任意常数值在元素尺寸减小时必须是可以得到的. 在弹性力学中,这就是贝兹利(Bazeley)等[26]给出的常应变准则. 关于收敛准则的许多推广(这些准则都符合米赫林

需要全本请访问 www.ertongbook.com

(Михлин)[27] 的“完备性”定义）的讨论可见卞学锜[28]、基(Key)[29]、奥利维拉 (Oliveira)[30]和约翰逊 (Johnson)[103]的文章.

大部分有限元素的表达法属于上述的变分类型，而有些元素虽不满足上述准则，却已知是单调收敛到正确值的，这至少对于某些网格分割是如此. 例如，一个三角形的板元素违反由贝兹利等[26]提出的（斜率）连续性要求，但却被证明是准确地收敛的(对由三族平行线组成的网格而言). 再如，一个较老的，同样是非协调的矩形[31,32]由沃尔兹（Walz）等[33]证明是收敛的. 梅洛什 (Melosh)[34] 还导出另一种极为重要的元素，它不根据任何一个现成的变分原理. 为什么这种形式会表现出通常很满意的性态，现在还不大清楚，但可能在物理上等同的模型化中有某些意义.

然而，还有更为正式的途径可用于有限元素的表达法，它们不需和变分表达法联系起来. 一旦未知函数的形状由方程(2)描述出来，一个微分方程

$$A(\{\phi\}) = 0 \tag{5}$$

的解的所有加权剩余过程将导致标准的组合形式. 点或者面积的配置（collocation）能够这样来表示，并且，如果权函数真的可由形状函数本身表示出来，那么就得到迦辽金 (Галеркин) 法. 在某些情形中，应用这种方法和用变分得到的结果完全相同[35,36]，但应用范围现在可以推广到那些变分泛函不存在或者需要人为地创造的问题中去. 它的一个典型例子是将有限元素-迦辽金表达法应用于瞬态过程中的时间域内[37]. 此外奥登 (Oden) 还提出了有限元素表达法的其他方法[38].

三、矩阵和有限元素

大概在和有限元素第一次出现的同时，矩阵方法也用来组织结构中的计算工作[6,39,40]，当时这两种不同的方法已经有

China

些地方是一致的. 显然，如果矩阵方法在建立离散的网络型问题的解时是最有效的方法，那么它们也能用于由离散化而得出的标准方程(1)的组合和求解过程. 同样明显地，有限元素法的过程将连续统的描述简化为一个离散的模型，它形成了本质上的逼近，而这个逼近与求解的技术是毫不相干的. 作者指出这一点，是想启发非结构方面的应用力学工作者，他们可能由于所谓"结构力学中的矩阵方法"的复杂形式而轻易放弃它.

（再者，澄清这一点，也是由于近三十年来，松弛法常和有限差分法混淆不清的缘故.）

最近出版的一些矩阵法方面的教科书，已经明确地提到了有限元素法，对于希望熟悉标准运算的初学者是有用的[41,104,105].

四、有限元素与有限差分的对比

在有限元素法早期，往往有种议论，认为它比用有限差分进行离散化的方法没有多大优点. 现在，偶而也还有另一种议论，认为这两种方法实际上是等同的. 这些议论是否有意义，也许先得从词义上作些说明. 如果把有限差分方法理解为对于"微分支配方程"的一个"局部的、直接的近似方法"[42]，那么(以积分形式导出的)有限元素法的优点可列举如下：

(a) 节点的定位是颇为任意的(这说明经济性)；

(b) 产生"改进"元素的可能性是无限的，只要增加元素参数的个数就可以了；

(c) 由于它的积分形式，改进了边界值的逼近；

(d) 可以随意选择不同类型和不同尺寸的元素.

以上(c)项是最重要的，最近有些文章比较了组合的有限元素和有限差分算法，评价了它们的相对精度，而没有涉

及边界条件. 这里，如果规定了任何梯度条件，标准的有限差分算子通常会引进极大的截断误差.

最近几年来,出现了不少"有限差分"法,其中只对低阶导数作直接的近似，而最后的算法则通过变分原理组合起来[43,44]. 这些方法显然把两种方法沟通起来,而实际上一些明显的优点消失了. 不过上述 (a),(b),(d) 三点还是成立的.

最后,虽和计算效率不直接有关,对有限元素的物理解释给使用者一种真实感. 这种"心理"因素在两方面有利.其一,由列方程而引起的总体误差容易察觉到;其二,使用者会遇到这种方法意外的推广.

五、形状函数的重要性

当问题的类型和变分(或其它)的表达式决定以后,剩下的唯一主要步骤是决定形状函数的形式. 这个做好了,其余的代数和计算就可以完全按照一个标准模样办. 选择适当的形状函数的重要性是显然的.

空间分割的最简单形式对二维问题是三角形，对三维问题是四面体. 在有些问题中,最早使用的元素[4,45]里,就有这类节点在它们的顶点上的三角形和四面体,对于这些问题,决定 x 时要求未知函数本身的连续性(如弹性力学,准调和问题等).

后来看到，如果与一个元素相联系的总自由度数增加的话，那么对组合问题却可以用较少的自由度得到同样的精确度,因此导致引进更复杂的元素. 乌贝克[18]和阿吉里斯[46]分别采用了节点在边中点的三角形和四边形. 今天,显然已能推导出整套的这样或那样的元素[47],见图 1 .

数量小、形状大的元素难以严密逼近复杂的边界形状,除非元素可以成为弯曲的. 艾恩斯 (Irons)[48]引进了形状函数确

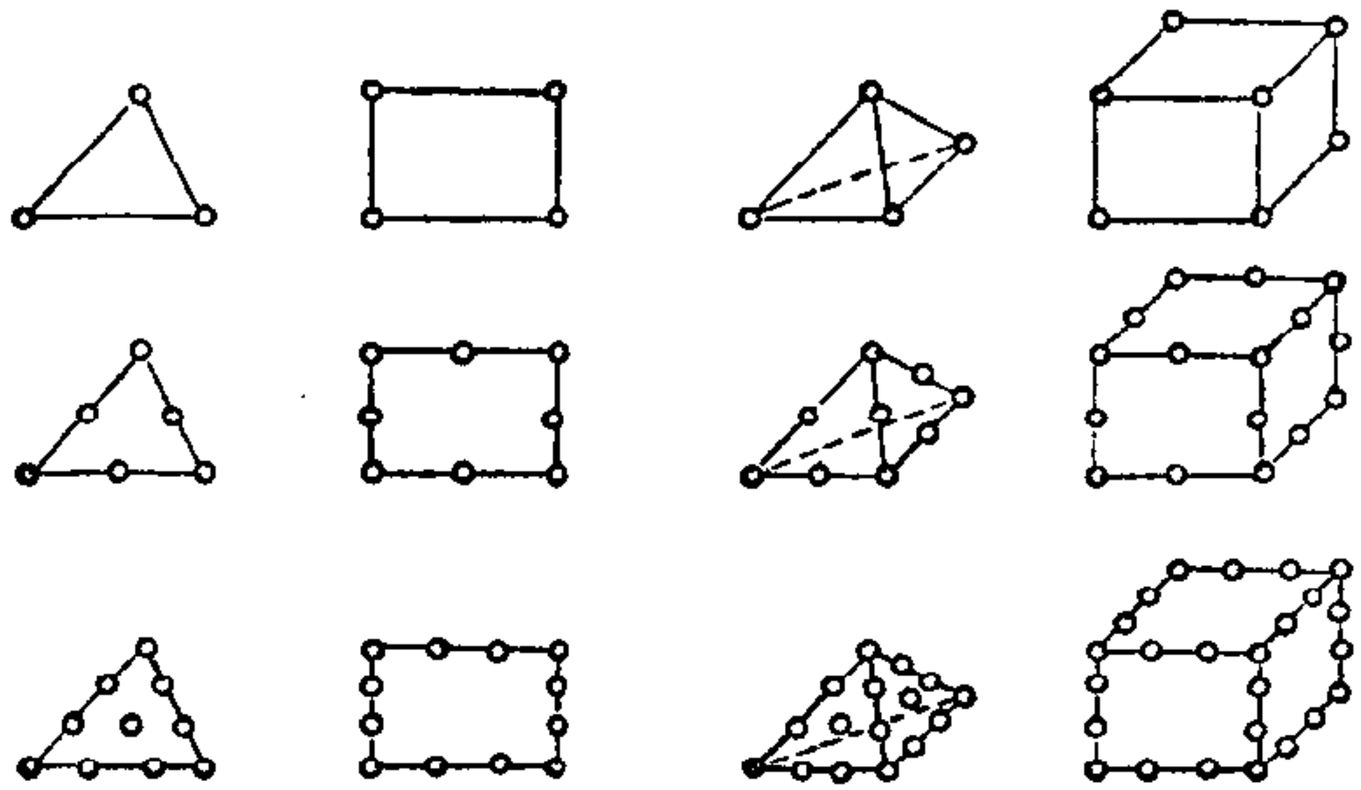


图 1　一些二维和三维元素

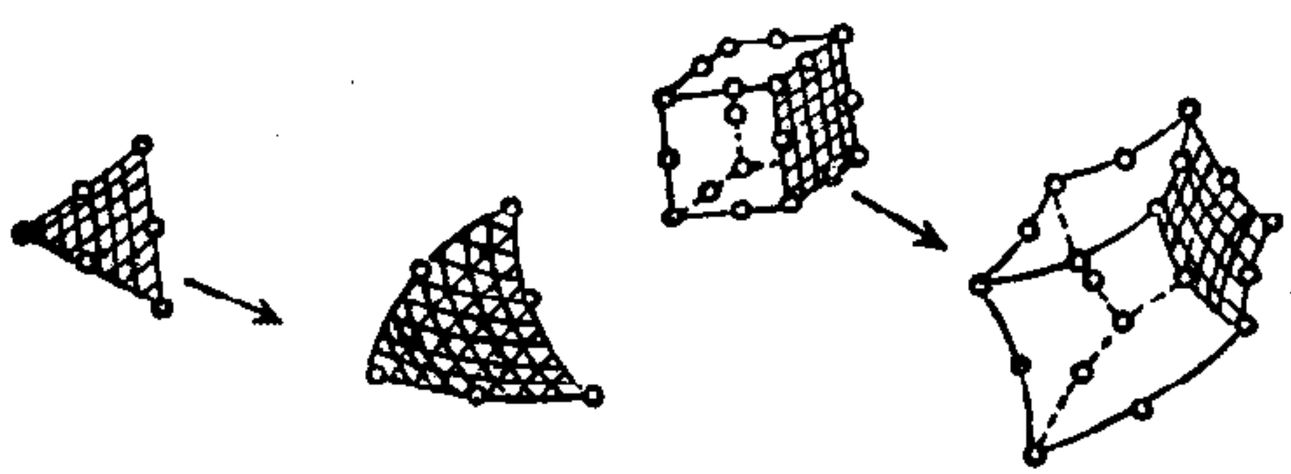


图 2　简单形体利用曲线坐标进行畸变

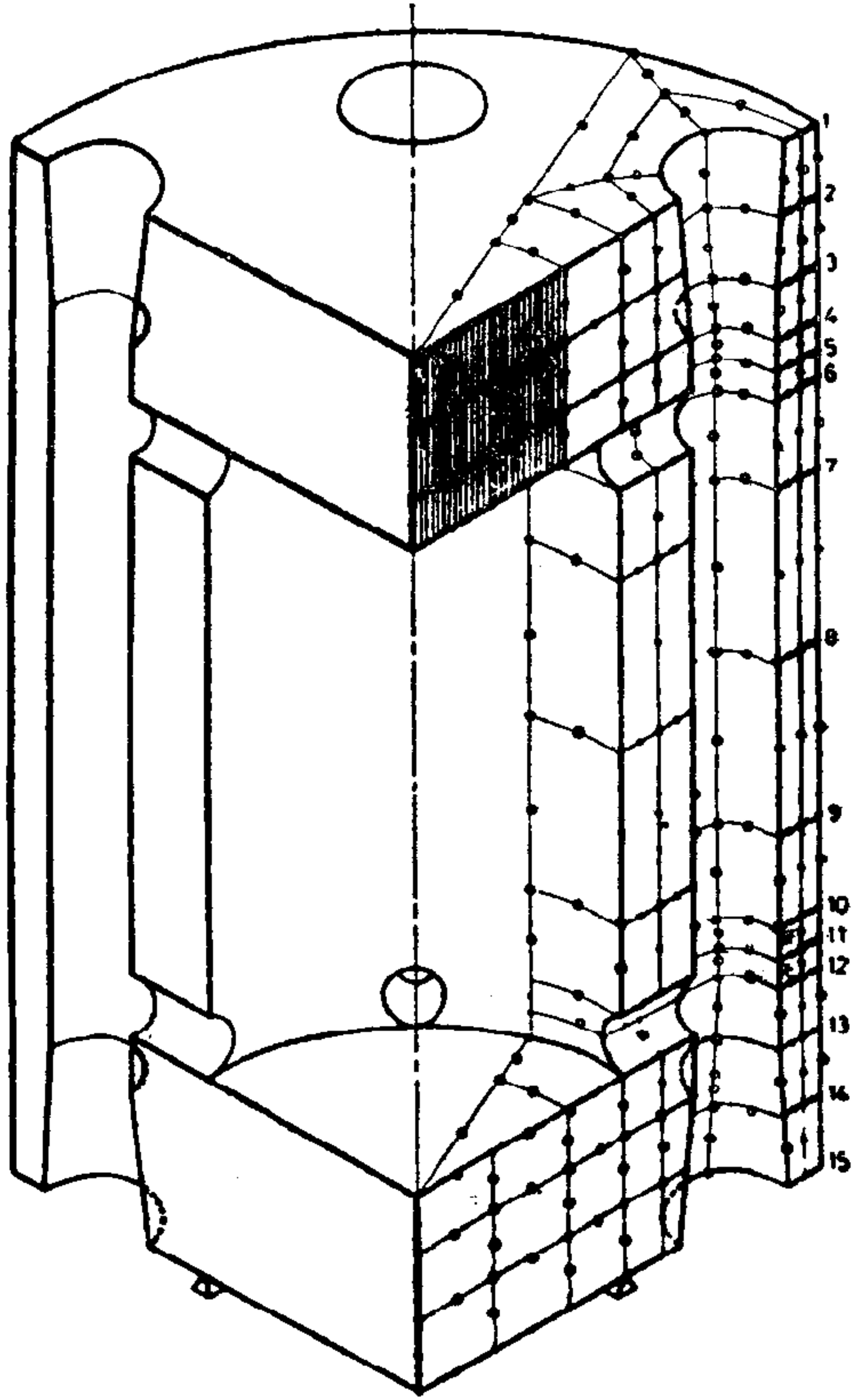


图 3a　压力容器三维应力分析中的弯曲等参数元素

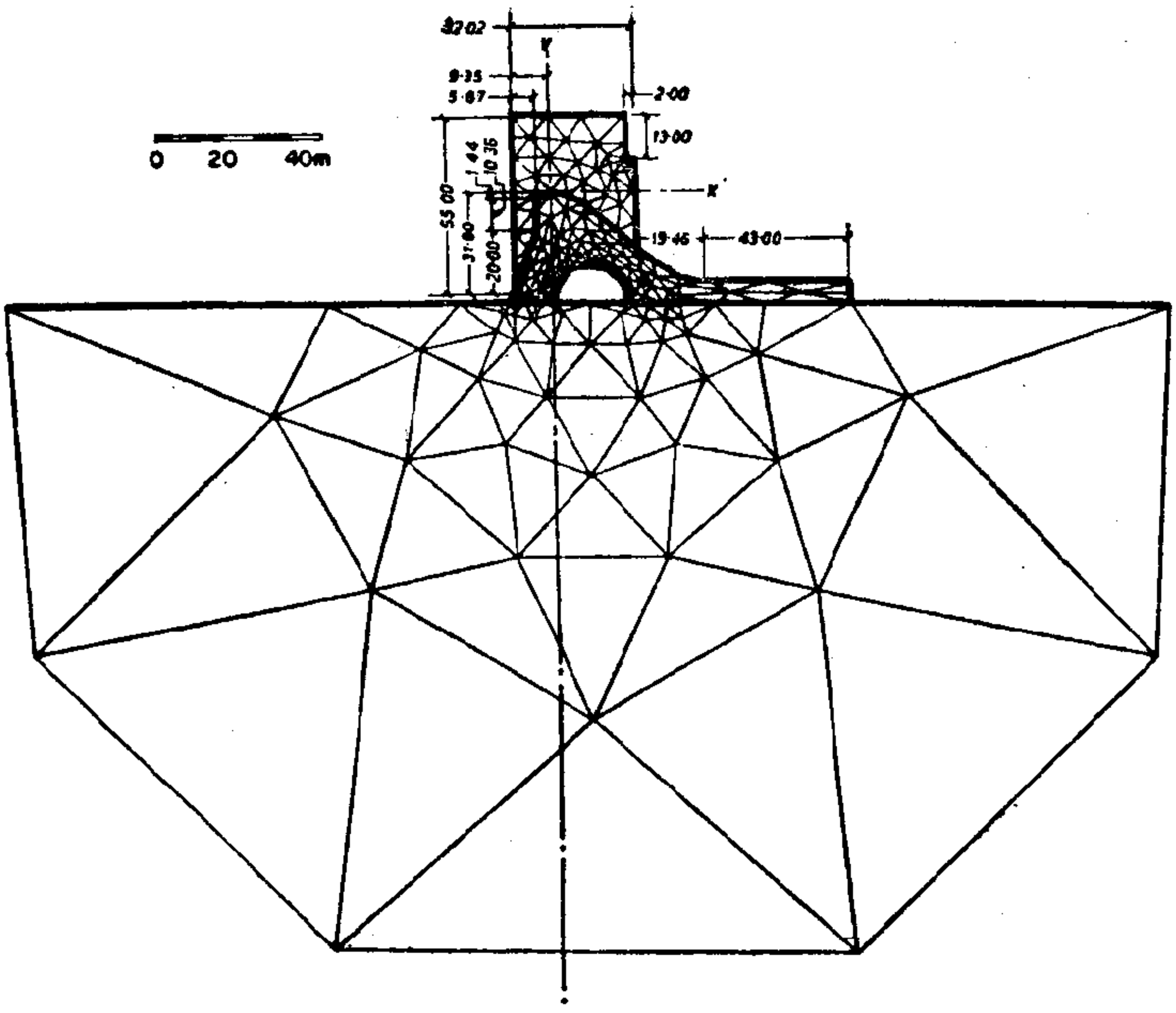


图 3b　水坝二维应力分析中的简单三角形网格

定的局部曲线坐标，其形状函数与函数逼近中采用的相同(等参数系统)，然后再运用数值积分，使这方面取得了进展（图2）．现在这种元素在二维和三维分析中已广泛使用[47,49,50]．图3(a)和(b)表明将"实际"区域分成为简单元素和弯曲元素的典型分割法(第一个有四个自由度，第二个有60个自由度)．

在这种元素中首先引进的数值积分法现已广泛使用．不仅可以用它很快地计算出元素性质，而且可以排除不少出现代数误差和计算误差的机会．

有些问题中的泛函定义需要附加的条件，即要求函数的一阶导数甚至于高阶导数在两元素之间是连续的．弹性力学中的板壳问题，以及流体力学中的粘性流问题，是这种情况的典型例子．这里要做出合适的形状函数就更困难了．在板的

弯曲问题中，有些文献已经提到了如何成功地避免这类连续性[26,31,32]，而在粘性流的解[51]中也采用了同样的元素。但是，要实现协调性，可以有两种办法：一种是用象克拉夫等[52,53]、贝兹利等[26]和乌贝克[19]关于简单板元素的文章中指出的奇异函数；第二种是在节点处引用高阶导数(二阶导数)的连续性，这个方法最早是由博格勒 (Bogner) 和施米特 (Schmit)[54]采用的。在当前提倡的各种复杂的板元素中[55—59]，第二种办法更为流行些。

在壳体分析中也遇到类似的问题，这里读者可以看到从最简单的用平面或锥面逼近[60,61]，一直发展到最近采用复杂的曲面壳体元素[52,62,63]。在教科书[25]中有详细的参考文献目录。

正如阿马德 (Ahmad) 等[64,65]所指出的，可以再次采用等参数概念，并由完全三维连续介质降阶得出曲面壳体元素。但值得同时提醒一下，从根本上更为正确一些的表达方式，是如何避免落入那些由物理上不可靠的近似法所产生的圈套的，而这种近似法在古典的板壳理论中却不得不采用。

六、非线性和动态问题

固体力学中的非线性问题(由于材料或几何上的原因)以及有动态项的问题，当然也可以用有限元素的离散化法来处理，如同其它方法(例如有限差分法)那样。在非线性问题中，必须采用某种形式的迭代法，而在动态问题中，必须或者应用特征值方法，或者用对时间逐段积分法。随着有能力求解复杂的、线性的边界值问题，这类应用显然正变得越来越多，以致本文无法综合评述。这里再次证明，在有限元素的物理表达式中采用的简单、直接的方法，对于处理这样复杂的问题是非常有价值的。其实，对现象进行仔细的推敲，带来了迭代法

需要全本请访问 www.ertongbook.com

的发展，而这在数学上也许不那么明显。

例如，对材料性质的非线性，系统地调整线性弹性问题中的初应变、初应力或者弹性常数，就可使一些本质上非线性的方程很快地收敛。数学上，这就等同于牛顿-拉夫森（Newton-Raphson）法或者其他已知的方法，但并不减少在选取收敛的最快途径中的有用性。文献[25,45,66—77,104]只是用有限元素法来解决这类问题的广泛尝试中选出的几个例子，其中涉及到的物理性质的范围很广，由理想的金属塑性、各种各样的蠕变现象，一直到象岩石和混凝土所具有的那些特殊性质。文献[77]给出了所用各种方法的综述。

对于几何非线性问题，例如细长结构的稳定性和大变形问题，可采用实质上相类似的方法。虽则古典的线性化的稳定性特征值问题——在分析文献中如此普遍——是最早的研究对象[78—82]，但现在考虑大变形的影响终于成为可能了[40,83—89]1)。

马卡尔（Marcal）[86]指出了把材料非线性和大变形性态结合起来的可能性，无疑还会出现对这类问题的进一步研究。这个方法在大应变问题上的一些有兴趣的应用由奥登[90,91]给出。

关于有限元素法在动态问题方面的应用，特别是在研究固有频率问题方面的应用，文献浩繁，这里不再引述。其实，这里略去不讲是说得过去的，因为一旦离散化实现后，就可采用标准的方法。关于一些典型的应用，可参见监凯维奇的教科书[25]，或者参见 1965 和 1968 年两次结构力学矩阵方法会议（在俄亥俄州莱特-帕特逊（Wright-Patternson）空军基地召开的）的论文集。但是关于线性和非线性的瞬态响应还有不

1）这样一来，数学上感兴趣的、而物理上不能维持的歧点稳定性的研究，最终将被更真实的准则所取代。

少工作要做，无疑在最近的将来会听到这方面更多的成绩.

七、前　　途

从以上简单的述评可以看到:(a)这个方法应用甚广;(b)已运用该法的问题大多是结构-固体力学类型的.

也许可以并不过分夸张地说：目前计算机的规模已经在实际的基础上能为所有固体力学和结构问题求出解来. 当然这方面的工作还得继续下去，但至少在基本表达法方面已经达到了不必走回头路的地步. 关于新型元素的论文也不再会戏剧性地发展(当然壳体结构可能是例外). 也许目前最应做的工作是研究并引进真实的材料参数和构成描述，当这类工作进展时会有许多新颖的应用.

在工程活动的其他领域中情况还不大一样.已经提到过，在流体力学中[92—94]，在热传导和电磁现象中[12,13,15,16,37,51,95,96]已有简单应用的可能性. 有些更为复杂的问题如结构和流体的相互作用等，已经列出方程并得到解决[97—100]. 在其他方面，如有涡的流动现象、纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程的解,非牛顿型物质的流动等等，本文作者所在的学校(威尔士大学)以及其他单位正在研究中. 正是在这种新的应用方面，以及在尚未建立公式的问题方面，从一般的应用力学的意义上来说,才还有潜在发展的可能性.

说了所有这些,从工程技术人员的观点看来,重要的是最大效率问题,即使对当前能够求解的问题也是如此. 这里,采用强有力的方法理应引起日常设计工作的改进. 最重要的是经济性和易于接受. 在许多正在进行这类工作的大学的研究中心里和大工业机构中已经做了不少工作(例如，文献[101,102] 指明了方程求解方法的发展对于整个过程是十分重要的). 网格的自动建立过程、数据的简易处理方法、足以冲破

"成本障"的有效程序、最后是简单的输出方法等等，这些都是尚需继续努力的项目. 如果希望出现什么新突破，它们将在这些领域中发生.

参 考 文 献

[1] Hrenikoff, A., "Solution of problems in elasticity by the framework method." *J. Appl. Mech.* 8, A 169—175, 1941.

[2] McHenry, D., "A lattice analogy for the solution of plane stress problems,"*J. Inst. Civ. Eng.* 21, 59—82, 1943.

[3] Newmark, N. M., "Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies." "Numerical Methods of Analysis in Engineering." edited by L. E. Grinter, MacMillan (1949).

[4] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures," *J. Aero Sci.* 23, 805—823, 1956; AMR 10 (1957), Rev. 1776.

[5] Clough, R. W., "The finite element in plane stress analysis." Proc. 2nd. ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.

[6] Argyris, J. H., "Energy theorems and structural analysis," Butterworth, London (1960). (Reprinted from Aircraft Eng. 1954—55); AMR 15 (1962), Rev. 2705.

[7] Clough, R. W., "The finite element method in structural mechanics," (Ch. 7 "Stress Analysis", O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, edited by J. Wiley & Son (1965); chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.

[8] Courant, R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration," *Bull. Am. Math. Soc.* 49, 1—23, 1943.

[9] Prager, W., and Synge, J. L., "Approximation in elasticity based on the concept of function space," *Quart. Appl. Math.* 5, 241–69, 1947.

[10] Synge, J. L., "The hypercircle in mathematical physics," Cambridge Univ. Press (1957); AMR 11 (1958), Rev. 733.

[11] Schmelter, J., "The energy method of networks of arbitray shape in problems of theory of elasticity," Proc. IUTAM Symp. on Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, W. Olszak, edited by, Pergamon Press (1959).

[12] Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite elements in the solution of field problems," *Engineer*, 200, 507—510, Sept.

China

1965.

[13] Wilson, E. L., and Nickell, R. E., "Application of finite element method to heat conduction analysis," *Nuclear Eng. and Design* **3**, 1—11, 1966.

[14] Herrman, L., "Elastic and torsional analysis of irregular shapes," *J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE* **91**, EM6, 11—19, 1965; AMR **19** (1966), Rev. 3444.

[15] Zienkiewicz, O. C., Arlett, P. L., and Bahrani, A. K., "Solution of three-dimensional field problems by the finite element method," *Engineer*, **224**, 547—550, Oct. 1967; AMR **21** (1968), Rev. 7898.

[16] Winslow, A. M., "Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in a non-uniform triangle mesh," *J. Comp. Physics* **1**, 149—172, 1967.

[17] Pian, T. H. H., "Derivation of element stiffness matrices," *J. AIAA* **2**, 576—577, 1964; AMR 17 (1964), Rev. 5128.

[18] Fraeijs de Veubeke, B., "Displacement and equilibrium models in the finite element method," (Ch. 9 "Stress analysis"), O. C. Zienkiewicz and G. Holister, edited by, J. Wiley & Son (1965); Chapter in AMR **20** (1967), Rev. 3942.

[19] Fraeijs de Veubeke, B., "Bending and stretching of plates," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

[20] Fraeijs de Veubeke, B., and Zienkiewicz, O. C., "Strain energy bounds in finite element analysis by slab analogy,"*J. Strain Analysis* **2**, 265—271, 1967.

[21] Herrmann, L. R., "A bending analysis of plates," Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

[22] Pian, T. H. H., and Tong, P., "Basis of finite element methods for solid continua," *Int. J. Num. Meth. in Eng.* **1**, 3—28, 1969.

[23] Pian, T. H. H., "Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution," *J. AIAA* **2**, 1232—1336, 1964.

[24] Severn, R. T., and Taylor, D. R., "The finite element method for flexure of slabs when stress distributions are assumed," *Proc. Inst. Civ. Eng.* **34**. 153—170, 1966; AMR **20** (1967), Rev. 3213.

[25] Zienkiewicz, O. C., "The finite element method," McGraw-Hill (1967).

[26] Bazeley, G. P., Cheung, Y. K., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Triangular elements in bending-contorming and non-

China

comforming solutions," Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

[27] Mikhlin, S. G., "The problem of the minimum of a quadratic functional," Holden Day, San Francisco (1966).

[28] Pian, T. H. H., and Tong, Ping, "The convergence of finite element method in solving linear elastic problems," *Int. J. Solids Struct.* 3, 865—880, 1967.

[29] Key, S. W., "A convergence investigation of the direct stiffness method," Ph. D. thesis, Univ. of Washington, Seattle, 1966.

[30] de Arrantes e Oliveira, E. R., "Theoretical foundation of the finite element method," *Int. J. Solids Struct.* 4, 929—952, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 7609.

[31] Adini, A., and Clough, R. W., "Analysis of plate bending by the finite element method," Nat. Sci. Found Rep. G. 7337, Univ. of Calif., Berkelev, 1961.

[32] Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs, *Proc. Inst. Civ. Eng.* 28, 471—488, 1964.

[33] Walz, J. E., Fulton, R. E., and Cyrus, N. N. J., Accuracy and convergence of finite element approximation, *Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech.*, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.

[34] Melosh, R. J., "A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending." *J. Aero Sci.* 28, 34—42, 1961: AMR 14 (1961), Rev. 3489.

[35] Crandall, S. H., "Engineering analysis," McGraw-Hill, NY (1956); AMR 12 (1959), Rev. 1122.

[36] Szabo, B. A., and Lee, G. C., "Derivation of stiffness matrices for problems on plane clasticity by Galerkin method," *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1, 301—310, 1969.

[37] Zienkiewicz, O. C., and Parekh, C. J., "Transient field problems—two- and three-dimensional analysis by iso-parametric finite elements," *Int. J. Num. Meth. in Engr.* 2, 61—71, 1970.

[38] Oden, J. T., "A general theory of finite elements: I—Topological considerations, II—Application," *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1, 205—221; 247—260, 1969.

[39] Gallagher, R. H., "A correlation study of methods of matrix structural analysis," *AGARDograph* 69, Pergamon Press (1962).

[40] Argyris, J. H., "Matrix methods of structural analysis," Proc. 14th meeting of AGARD, *AGARDograph* 72, 1962.

[41] Martin, H. C., "Introduction to matrix methods of structural

China

analysis," McGraw-Hill, NY (1966).
[42] Southwell, R. V., "Relaxation methods in theoretical physics," Clarendon Press, Oxford (1946).
[43] Varga, R. S., "Matrix iterative analysis" Prentice-Hall, (1962).
[44] Griffin, D. S., and Kellog, R. B., "A numerical solution of axially symmetrical and plane elasticity problems," *In. J. Solids and Structures* **3**, 781—794, 1967;AMR **21**, (1968), Rev. 3185.
[45] Gallagher, R. H., Padlog, J., and Bijlard, P. P., "Stress analysis in heated, complex shapes," *J. Aero-Space Science* **29**, 700—707, 1962.
[46] Argyris, J. H., "Matrix analysis of three-dimensional elastic media. Small and large displacements," *J. AIAA* **3**, 45—51, 1965; AMR **18** (1965), Rev. 3951.
[47] Zienkiewicz, O. C., Irons, B. M., Ergatoudis, J., Ahmad, S., and Scott, F. C., "Iso-parametric and associated element families for two- and three-dimensional analysis," (Ch. 13 of "Finite element method in stress analysis"), I. Holand and K. Bell, edited by, Tapir, Trondheim, Norway (1969).
[48] Irons, B. M., "Engineering application of numerical integration in stiffness method," *J. AIAA* **4**, 2035—2037, 1966.
[49] Ergatoudis, J., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Curved, isoparametric quadrilateral elements in finite element analysis," *Int. J. Solids & Struct.* **4**, 31—42, 1968; AMR **21** (1968), Rev. 6347.
[50] Ergatoudis, J., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Three-dimensional analysis of arch dams and their foundations," Proc. Sym. on Arch Dams, Inst. Civ. Eng. London, 1968.
[51] Atkinson, B., Brocklebank, M. P., Card, C. C. M., and Smith, J. M., "Low Reynolds number developing flows," *A. I. Chem. Eng. Journ.* **15**, 548—553, 1969.
[52] Clough, R. W., and Tocher, J. L., "Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
[53] Clough R. W., and Fellipa, C. A., "A refined quadrilateral element for analysis of plate bending," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.
[54] Bogner, F. K., Fox, R. L., and Schmit, A. L., "The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by use of interpolation formulas," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

China 需要全本请访问 www.ertongbook.com