21 世纪数学系列教材

工科数学分析（下）

（第二版）

李大华　林　益　汤燕斌　王德荣

华中科技大学出版社

前　言

随着科学技术的飞速发展，数学的科学地位发生了巨大的变化．高技术本质上是数学技术的观念已日益为人们所共识．计算机和信息技术的迅速发展正在改变着人们对数学知识的需求，冲击着传统的观念和方法．面临着培养21世纪人才的挑战性任务，许多高等院校理工科（非数学）专业和管理、经济类专业对数学基础课程提出了新的更高的要求．数学基础课程不再仅仅是学到某些知识，为专业课程提供数学工具，更重要的是提高学生的数学素质和数学修养水平．

本书正是在这种形势下应运而生的．本书的宗旨是，在传授知识的同时，加强和拓宽基础，加强应用；注意传授数学思想，培养学生的创造性思维；着重提高学生的数学素养和能力．本书与传统的高等数学教材的主要区别是，本书加强了微积分的理论基础，注重无穷小分析的思想的运用．在数学的逻辑性、严谨性及抽象性方面也有相应的要求和训练．但本书又与数学专业用的数学分析教材不同，在内容的深度和广度上没有数学分析教材要求那么高．我们注意了对学生的工程意识的培养，即通过典型例题的介绍及相应习题的训练，培养学生运用数学知识解决实际问题的能力．基于上述理由，我们将本书定名为《工科数学分析》．

本书有以下特点．

1．引进一些近代数学的术语、符号和概念．如集合、映射、度量性等，这将有助于学生进一步阅读使用数学工具较多的现代科技文献．

2．拓宽和加强数学基础．本书加强了极限理论，从确界定理出发，介绍并证明了实数理论的几个基本定理；证明了有界闭区间上连续函数的基本性质；简要介绍了欧氏空间$\mathbf{R}^n$中关于点集的某些基本概念，并在此基础上引进多元函数的极限与连续性概念；增加了理科数学分析中的一些重要内容，如一致连续、一致收敛、向量值函数的导数、含参变量的积分等．这些知识不仅有实用价值，而且对学生的逻辑思维训练是十分有益的．

3．突出数学建模，培养学生把实际问题转化为数学问题并加以解决的能力．本书除介绍微积分应用的经典例子（如物理、力学、几何等方面的例子）外，还介绍了若干工程、经济、人口、生态等领域中的例子，在习题中设置了许多实际应用的问题，这些问题在提高学生对数学应用的兴趣及能力方面有较大的作用．

4．重视数学思想方法的训练．本书注意突出无穷小分析的思想，将逼近的思想贯穿始终．尽可能将演绎与归纳的方法有机地结合起来，通过“问题（包括背景）—观察与思考—归纳总结—给出解答”这种模式来组织若干教学内容（如最优化问题—极

值与条件极值等)，以利于培养学生的创造能力.

5. 在习题的配置上，本书把每节的习题分成(A)、(B)两类.(A)类为基本要求题，用于巩固基础知识和基本技能;(B)类为提高题，用于扩大视野和熟练技巧，提高学生的综合能力.另外，每章还配有总习题，供学生作综合练习或复习使用.

本书适用于理工科(非数学)专业和管理、经济类专业中对数学要求较高的专业.但如果略去理论性较强的部分及"*"号部分，一般工科及经济、管理类专业也可使用本书.

在本书的编写过程中，得到华中科技大学教务处的大力支持.本书的第一版曾得到李楚霖教授，李静瑶、何瑞、杨林锡和乔维佳等4位副教授的支持和具体的帮助.华中科技大学出版社的有力支持，以及责任编辑龙纯曼老师和周芬娜老师的辛勤劳动，使得本书能顺利出版并再版.在此我们一并表示衷心的感谢!

对于书中的不足和错误，恳请专家、同行及热心的读者批评指正.

编　者

2004年3月于华中科技大学

目　　录

第 6 章　向量代数与空间解析几何

到目前为止,我们讨论的基本上都是一元函数,即 $y=f(x)$,这个函数关系中只有一个自变量和一个因变量. 但是在实际问题中,经常要考虑多种因素、多方面的关系,因此必须考虑有多个自变量的情形. 为此,我们需要作一些相应的准备工作. 本章所要介绍的向量代数与空间解析几何的内容,就是这种准备的一部分.

向量是描述那些既有大小、又有方向的量,它是一种重要的数学工具,在工程技术中有着广泛的应用. 本章将介绍向量的概念及向量的几种基本运算.

我们知道,平面解析几何的知识是学习一元函数的基础. 类似地,学习多元函数微积分时,我们必须首先学习空间解析几何的基础知识. 本章将介绍空间的平面和直线的方程,平面与直线的关系,以及空间曲面、曲线的方程.

6.1　向量及其线性运算

6.1.1　空间直角坐标系

通过平面直角坐标系,可以用有序数对来表示平面上任意一点的位置. 为了确定空间中任一点的位置,我们需要建立空间直角坐标系. 为此,引进三条互相垂直的直线,称之为 x 轴、y 轴和 z 轴,它们相交于一点 O,称之为原点. 通常将这三个坐标轴按右手系规则排列(见图6.1). 当右手握拳的方向是从 x 轴的正向到 y 轴的正向时,右手大拇指的指向便是 z 轴的正向.

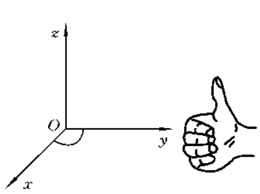

图6.1

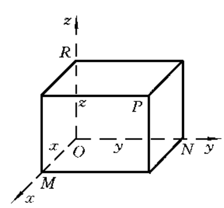

图6.2

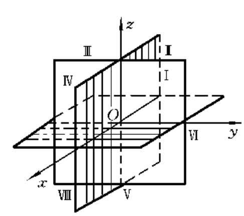

图6.3

在空间中任取一点 P,过 P 点作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴,并交 x 轴、y 轴和 z 轴于 M、N、R 三点(见图6.2). M、N、R 这三个点分别称为点 P 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影. 设 M、N、R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x、y 和 z. 于是,点 P 的坐标就可以表示成一个三元有序组 (x,y,z). 易见,xy 平面上的点满足 $z=0$.

反过来,给定一个三元有序组(x,y,z),我们可以在x轴上取坐标为x的点M,在y轴上取坐标为y的点N,在z轴上取坐标为z的点R,然后通过M、N及R分别作x轴、y轴及z轴的垂直平面,这三个垂直平面的交点P便是以有序组(x,y,z)为坐标的点. 由此可见,空间的点与有序组(x,y,z)之间便建立了一一对应的关系.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,称之为坐标面. 三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做卦限. 满足$x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$的那个卦限称为第一卦限(见图6.3). 第一到第八卦限内点的坐标的符号如下表所示:

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

我们知道,在实直线$\mathbf{R}$上,两个点a_1与b_1之间的距离定义为

$$|b_1-a_1|=\sqrt{(b_1-a_1)^2},$$

其中“$\sqrt{\quad}$”表示取非负平方根. 现在把两点间的距离公式推广到平面和空间中去.

为了表述方便,我们把由n个一维实空间(即实直线)$\mathbf{R}$构成的乘积集合称为n维实空间,记作

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}.$$

于是,平面就是二维实空间$\mathbf{R}^2$,而空间就是三维实空间$\mathbf{R}^3$. 在$\mathbf{R}^n$中,其元素称为点,它是n元有序组$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,其中$x_i(i=1,2,\cdots,n)$是实数. 现在考察$\mathbf{R}^n$中两点间的距离.

$\mathbf{R}^2$中两点间的距离公式是熟知的,即若点$(x_1,y_1)\in\mathbf{R}^2$,则该点到原点的距离为(见图6.4)

$$\sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-0)^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

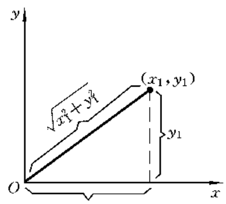

图6.4

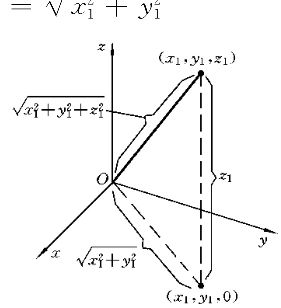

图6.5

类似地，由几何知识得知，在空间 $\mathbf{R}^3$ 中，点 (x_1,y_1,z_1) 到原点 $(0,0,0)$ 的距离为(见图 6.5) $\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$. 一般地，在空间 $\mathbf{R}^n$ 中，很自然地把点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 到原点 $(0,0,\cdots,0)$ 的距离定义为

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}.$$

由此可知，若 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点，则可定义这两点间的距离为

$$\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}.$$

6.1.2　向量及其坐标表示

我们曾把有序组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 叫做 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点，现在在 $\mathbf{R}^n$ 中引进向量的概念.

先考虑 $\mathbf{R}^2$ 中的情形. 设 P、Q 是平面 $\mathbf{R}^2$ 中的两个点，它们确定一条有向线段，记作 $\overrightarrow{PQ}$. 我们称这样的有向线段为平面向量，P 称为向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的起点，Q 称为这个向量的终点. $\overrightarrow{PQ}$ 的指向是这个向量的方向，而 $\overrightarrow{PQ}$ 的长短则表示这个向量的大小. 如果 $\overrightarrow{P_1Q_1}$ 和 $\overrightarrow{P_2Q_2}$ 是两个有向线段，它们有相同的长度和方向，则认为它们表示了同一个向量. 这就是说，这两个有向线段是互相平行的，且长度、方向完全相同. 有向线段具有确定的、特殊的位置，而向量则不然，图 6.6 中所有的箭头均表示同一个向量. 这正如分数 $\frac{2}{3}$ 与 $\frac{4}{6}$ 表示同一个有理数那样，两个长度相等、方向相同的有向线段 $\overrightarrow{P_1Q_1}$ 和 $\overrightarrow{P_2Q_2}$ 表示同一个向量. 因此，若一个向量能够由另一个向量经平行移动得到，则认为这两个向量相等.

我们可以根据不同场合的需要来选取向量的某种表示方式. 有时把向量的起点放在直角坐标系的原点 O 上(见图 6.7(a))，有时则可以把向量放在平面上的任何地方(见图 6.7(b)).

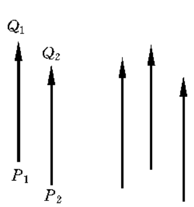

图 6.6

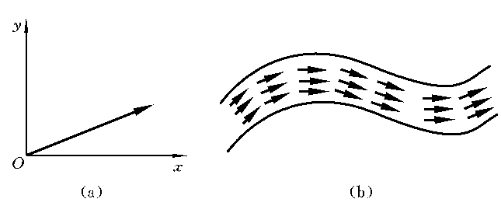

图 6.7

一般地，我们把具有大小和方向的量称为向量. 例如质点运动的速度，拖曳重物

的作用力等. 在物理上,向量常用有向线段来作为几何表示,因此,前面所述的平面向量的概念可以推广到三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中以及一般的 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中.

我们用黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{F},\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}$ 等表示向量,向量的长度则表示为 $|\boldsymbol{A}|=A$, $|\boldsymbol{r}|=r$ 等. 向量的长度又称为向量的模,向量的模是一个数量. 模为 1 的向量称为单位向量.

如果把向量 $\boldsymbol{A}$ 的起点放在原点 O 处,则向量 $\boldsymbol{A}=\overrightarrow{OA}$ 就与点 A 有一一对应的关系. 即给定向量 $\boldsymbol{A}$,把它的起点放在 O 点,就可以得到它的终点 A. 反之,给定一点 A,则 $\overrightarrow{OA}$ 确定一个向量. 如果平面向量 $\boldsymbol{A}$ 的起点放在坐标原点处,终点坐标是 (x,y),则称数 x 和 y 为向量 $\boldsymbol{A}$ 的(数量)分量. 在几何上,$|\boldsymbol{x}|$ 及 $|\boldsymbol{y}|$ 是向量 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴及 y 轴上的投影线段的长度(见图 6.8). 因此,我们亦称 x 是向量 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴上的投影,y 为 $\boldsymbol{A}$ 在 y 轴上的投影. 于是,又可将向量 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{A}=\{x,y\}$$

并称之为 $\boldsymbol{A}$ 的坐标表示,由勾股定理知,向量 $\boldsymbol{A}$ 的模 $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{x^2+y^2}$. 类似地,在 $\mathbf{R}^3$ 中,若向量 $\boldsymbol{A}$ 的起点在坐标原点 O 处,终点坐标为 (x,y,z),则 $\boldsymbol{A}$ 的坐标表示为

$$\boldsymbol{A}=\{x,y,z\},$$

其模 $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$(见图 6.9). 推而广之,我们把

$$\boldsymbol{A}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

称为 $\mathbf{R}^n$ 中起点在原点 $O=(0,0,\cdots,0)$、终点在 $A=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 n 维向量,其模 $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$.

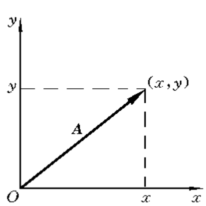

图 6.8

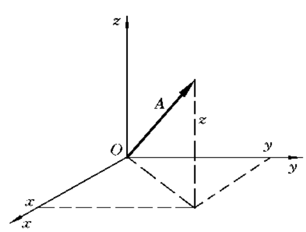

图 6.9

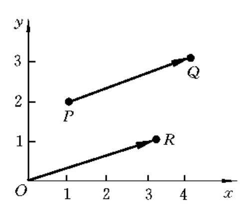

图 6.10

有固定起点 O 的向量称为点 A 的向径,或称为位置向量. A 点的向径的分量就是 A 点的坐标. 分量均为零的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$,它的长度是零而没有方向(或者认为它的方向是任意的). 例如,在 $\mathbf{R}^n$ 中,零向量 $\mathbf{0}=\{0,0,\cdots,0\}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 0 或 π,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(或平行),记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可看作任意的,于是可以认为零向量与任何向量都平行.

例 6.1.1　设向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的起点为 $P(1,2)$,终点为 $Q(4,3)$,求 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标表示.

解　把 $\overrightarrow{PQ}$ 的起点移到原点 O 处,而将向量 $\overrightarrow{PQ}$ 平行地移动成 $\overrightarrow{OR}$(见图 6.10),并

取 $|\overrightarrow{OR}|=|\overrightarrow{PQ}|$. 则 $\overrightarrow{OR}$ 和 $\overrightarrow{PQ}$ 表示同一个向量. 易见点 R 的坐标是 $(3,1)$. 因此向量 $\overrightarrow{PQ}$ 可表示为 $\overrightarrow{PQ}=\{3,1\}$. □

例 6.1.2　设 $P=(4,1,-1)$, $Q=(7,-3,1)$. 求三维向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的模.

解　$\overrightarrow{PQ}$ 的三个数量分量分别为

$$x=7-4=3,\quad y=-3-1=-4,\quad z=1-(-1)=2,$$

因此 $\overrightarrow{PQ}=\{3,-4,2\}$，它的模为

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{29}.$$ □

6.1.3　向量的方向余弦

现在我们进一步找出向量的坐标与向量的模、方向之间的联系.

将向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ 的起点放在坐标原点，向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的正向的夹角分别设为 α、β、γ，并规定 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, $0\leqslant\gamma\leqslant\pi$，则称 α、β、γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角（见图 6.11).

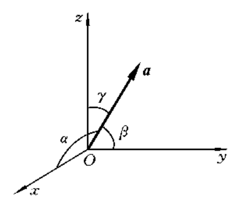

图 6.11

因为向量的坐标就是向量在坐标轴上的投影，所以有

$$a_1=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\quad a_2=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\quad a_3=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma. \qquad (6.1.1)$$

而

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$

因此得

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\quad \cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

我们称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

例 6.1.3　设有两点 $P(1,2,\sqrt{2})$ 和 $Q(2,1,0)$，求向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　$\overrightarrow{PQ}=\{2-1,1-2,0-\sqrt{2}\}=\{1,-1,-\sqrt{2}\}$；

则

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2;$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=-\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \beta=\frac{2\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$ □

6.1.4　向量的线性运算

现在我们引进向量的加法和数乘这两种运算，称之为向量的线性运算.

(1) 向量的加法

根据力学中两个力或两个速度的合成法则，我们用平行四边形法则来定义两个

向量的相加.

将两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平移至同一起点 O(原点),以此两向量为邻边作平行四边形,定义由起点 O 到平行四边形对顶点 B 所作成的向量 $\overrightarrow{OB}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和(见图 6.12(a)),即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}.$$

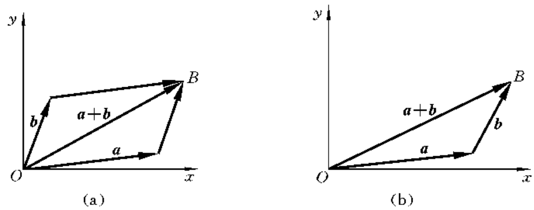

图 6.12

为了解决两个平行向量相加的问题,我们进一步引进下面的三角形法则.

将两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 首尾相接,则由起点到终点的向量 $\overrightarrow{OB}$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之和(见图 6.12(b)),即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}.$$

不难看出,三角形法则蕴含了平行四边形法则.

下面我们给出向量加法的坐标表示. 不妨先考察平面向量的情形. 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=\{a_1,a_2\}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}=\{b_1,b_2\}$,并设 B 点的坐标为 (x,y)(见图 6.13),则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=\{x,y\}.$$

由于 A 点的坐标为 (a_1,a_2),因此

$$\overrightarrow{AB}=\{x-a_1,y-a_2\}.$$

由向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标的唯一性知,

$$b_1=x-a_1,\quad b_2=y-a_2,$$

亦即有

$$x=a_1+b_1,\quad y=a_2+b_2.$$

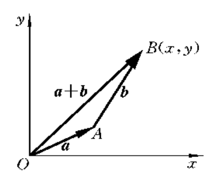

图 6.13

由此可得向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标表示为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_1+b_1,a_2+b_2\}. \tag{6.1.2}$$

类似地,对于 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标表示为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\}. \tag{6.1.3}$$

而对于 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 及 $\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标表示为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\}.$$

这就是说,两向量和的坐标等于两向量对应坐标之和.

(2) 向量的数乘

数 k 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积(称为数乘)定义为一个向量,记作 $k\boldsymbol{a}$,其大小为 $|k\boldsymbol{a}|=$

$|k||\boldsymbol{a}|$，方向与$\boldsymbol{a}$平行. 当$k>0$时，$k\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同向；当$k<0$时，$k\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$反向(见图6.14)，即

$$k\boldsymbol{a}=\begin{cases}|k|\boldsymbol{a}, & k>0,\\ -|k|\boldsymbol{a}, & k<0;\end{cases}$$

当$k=0$时，$k\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

由向量的数乘可以导出向量的减法，即$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相减定义为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b},$$

也就是将$\boldsymbol{b}$变成$-\boldsymbol{b}$再和$\boldsymbol{a}$相加(见图6.15).

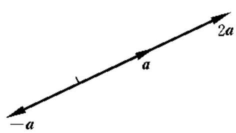

图6.14

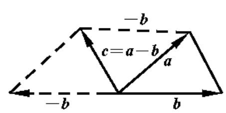

图6.15

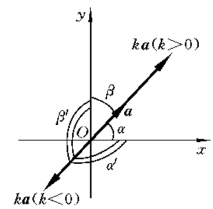

图6.16

如果用记号$\boldsymbol{e}_a$表示与向量$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量，则依向量的数乘的定义，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

因此，一个非零向量除以它的模便可得到一个同方向的单位向量，即

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a. \tag{6.1.4}$$

根据(6.1.1)式，单位向量$\boldsymbol{e}_a$又可以用方向余弦表示为

$$\boldsymbol{e}_a=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}. \tag{6.1.5}$$

下面我们给出向量的数乘的坐标表示. 还是以平面向量为例. 令$\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2\}$，$k$为任意实数，设$\boldsymbol{a}$的方向角为$\alpha,\beta$，$k\boldsymbol{a}$的方向角为$\alpha',\beta'$. 当$k>0$时，向量$k\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同方向，故$\alpha=\alpha',\beta=\beta'$(见图6.16). 因此，$k\boldsymbol{a}$的坐标为

$$x=|k||\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\quad y=|k||\boldsymbol{a}|\cos\beta.$$

而$a_1=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha, a_2=|\boldsymbol{a}|\cos\beta$，故有

$$x=ka_1,\quad y=ka_2.$$

当$k<0$时，向量$k\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$反方向，故$\alpha=\pi-\alpha',\beta=\pi-\beta'$. 这时，$k\boldsymbol{a}$的坐标应为

$$x=|k\boldsymbol{a}|\cos\alpha'=-k|\boldsymbol{a}|(-\cos\alpha)=ka_1,$$
$$y=|k\boldsymbol{a}|\cos\beta'=-k|\boldsymbol{a}|(-\cos\beta)=ka_2.$$

因此，不论k是正数还是负数，均有

$$k\boldsymbol{a}=\{ka_1,ka_2\}.$$

类似地，对于$\mathbf{R}^3$中的向量$\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，有

$$k\boldsymbol{a}=\{ka_1,ka_2,ka_3\}.$$

对于 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,则有

$$k\boldsymbol{a}=\{ka_1,ka_2,\cdots,ka_n\}.$$

可以证明,对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 k,使得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.(证明留作习题)

例6.1.4 在 $\mathbf{R}^2$ 中,向量 $\boldsymbol{a}=\{1,-3\}$ 与向量 $\boldsymbol{b}=\{2,-6\}$ 是平行的,并且它们有相同的方向. 而向量 $\boldsymbol{a}=\{1,-3\}$ 与向量 $\boldsymbol{d}=\{2,-7\}$ 是不平行的. □

例6.1.5 设 $|\boldsymbol{a}|=5$,则

$$|3\boldsymbol{a}|=|3||\boldsymbol{a}|=3\cdot 5=15,$$

且 $3\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向. 但是,$-7\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反,而

$$|-7\boldsymbol{a}|=|-7||\boldsymbol{a}|=7\cdot 5=35.$$ □

例6.1.6 设有 $\mathbf{R}^4$ 中的向量 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,0,4\}$,$\boldsymbol{b}=\{2,3,-1,1\}$,则

$$3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}=\{3,-6,0,12\}-\{10,15,-5,5\}=\{-7,-21,5,7\}.$$ □

下面我们给出向量加法和数乘的运算律,其证明留作练习.

定理6.1.1 对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 以及任意的数 α,β,以下的运算律成立:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律);

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律);

(3) $\alpha(\beta\boldsymbol{a})=(\alpha\beta)\boldsymbol{a}$(数乘的结合律);

(4) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$(分配律);

(5) $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$(分配律).

有了向量的加法和数乘运算后,我们还可以给出向量的分解表达式. 为此,以 $\mathbf{R}^3$ 为例,我们在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的三个坐标轴上分别取单位向量

$$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\},\quad \boldsymbol{j}=\{0,1,0\},\quad \boldsymbol{k}=\{0,0,1\},$$

称之为 $\mathbf{R}^3$ 中的单位坐标向量. 于是任何向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ 可有如下的分解表达式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,0,0\}+\{0,a_2,0\}+\{0,0,a_3\}\\&=a_1\{1,0,0\}+a_2\{0,1,0\}+a_3\{0,0,1\},\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.\tag{6.1.6}$$

(6.1.6)式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的按单位坐标向量的分解表达式,而向量 $a_1\boldsymbol{i}$、$a_2\boldsymbol{j}$、$a_3\boldsymbol{k}$ 分别称为 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分向量.

例6.1.7 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $P(5,1,2)$,终点为 $Q(7,2,4)$. 求单位向量 $\boldsymbol{e}_a$ 关于单位坐标向量的分解式.

解

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}=\{7-5,2-1,4-2\}=\{2,1,2\},$$

故

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3,$$

因此，
$$e_a = \frac{a}{|a|} = \{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\},$$
即
$$e_a = \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k. \quad \square$$

习　题　6.1

(A)

1. 回答下列问题：

(1) $\mathbf{R}^3$ 的空间直角坐标系是怎样建立的？

(2) $\mathbf{R}^n$ 中两点的距离如何定义？

(3) 向量是怎样的量？向量与有向线段有什么不同？

(4) 什么叫单位向量？给定一个非零向量 a，你能写出一个与 a 同方向的单位向量吗？

(5) 向量的模及方向余弦怎样定义？

(6) 向量的加法与数乘是怎样定义的？

2. 在空间直角坐标系中，定出下列各点的位置：

$A(1,2,3)$；　$B(-1,2,4)$；　$C(2,-3,-4)$；　$D(3,4,0)$；　$E(0,2,1)$；　$F(4,0,0)$.

3. 求下列各点间的距离：

(1) $(0,0,0),(2,3,4)$；　　(2) $(4,-1,2),(-2,1,3)$.

4. 求点 $M(2,-1,3)$ 与原点及各坐标轴间的距离.

5. 证明：以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

6. 给定一点 $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$，试写出该点关于(1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.

7. 求下列向量的模：

(1) $\{1,2,3\}$；　　(2) $\{-1,0,5\}$；　　(3) $\{2,-4,7\}$.

8. 求下列向量的和，并画出 $a+b$：

(1) $a=\{2,1\}, b=\{1,4\}$；　　(2) $a=\{2,2\}, b=\{1,-1\}$；

(3) $a=\{1,2,0\}, b=\{2,3,5\}$；　　(4) $a=\{3,-2,1\}, b=\{-4,3,2\}$.

9. 求下列向量的差，并画出 $a-b$：

(1) $a=\{4,3\}, b=\{2,0\}$；　　(2) $a=\{1,1\}, b=\{-2,4\}$；

(3) $a=\{2,3,4\}, b=\{1,5,0\}$；　　(4) $a=\{3,4,2\}, b=\{0,0,0\}$.

10. 计算并画出 kA，假设 $A=2i+3j+k$，而 k 为

(1)2；　(2)-2；　(3)$\frac{1}{2}$；　(4)$-\frac{1}{2}$.

11. 求一个单位向量，使它与向量 $i+2j+3k$ 同方向.

12. 求向量 $a=2i+3j+4k$ 的方向余弦.

13. 设 $A=a-b+2c$，$B=-a+3b-c$. 试用 a、b、c 表示向量 $2A-3B$.

(B)

1. 设风速为每小时48 km，风向为东北. 一架飞机相对于风以每小时160 km 的速度飞行，由飞机的

尾部到飞机头部的指向是东南方向(见图6.17).

(1) 求飞机相对于地面的速度大小;

(2) 飞机相对于地面的飞行方向是什么?

2. 证明本节定理6.1.1中的各条运算律.

3. 证明,若$\boldsymbol{a}\neq 0$,则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行的充要条件是存在实数k,使得$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

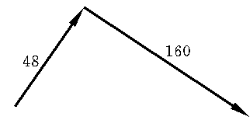

图6.17

答案与提示

(A)

3. (1) $\sqrt{29}$;　(2) $\sqrt{41}$.

4. $\overline{MO}=\sqrt{14}, d_x=\sqrt{10}, d_y=\sqrt{13}, d_z=\sqrt{5}$.

5. $\overline{AB}=\sqrt{49}, \overline{BC}=\sqrt{98}, \overline{CA}=\sqrt{49}, \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$.

6. (1) $(a,b,-c),(-a,b,c),(a,-b,c)$;　(2) $(a,-b,-c),(-a,b,-c),(-a,-b,c)$;　(3) $(-a,-b,-c)$.

7. (1) $\sqrt{14}$;　(2) $\sqrt{26}$;　(3) $\sqrt{69}$.

8. (1) $\{3,5\}$;　(2) $\{3,1\}$;　(3) $\{3,5,5\}$;　(4) $\{-1,1,3\}$.

9. (1) $\{2,3\}$;　(2) $\{3,-3\}$;　(3) $\{1,-2,4\}$;　(4) $\{3,4,2\}$.

10. (1) $4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$;　(2) $-4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$;　(3) $\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$;　(4) $-\boldsymbol{i}-\frac{3}{2}\boldsymbol{j}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$.

11. $\boldsymbol{l}^0=\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}$.

12. $\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{3}{\sqrt{29}},\frac{4}{\sqrt{29}}$.

(B)

1. (1)速度大小为167(km/h);　(2)方向为东偏南28.3°.

6.2　向量的点积与叉积

6.2.1　两个向量的点积

我们先来看一个简单的物理问题.设一物体在常力$\boldsymbol{F}$的作用下,沿直线从P点移动到Q点.令$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{PQ}$.由物理学的知识可知,力$\boldsymbol{F}$所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos\theta,$$

其中θ为$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{r}$的夹角(见图6.18).

由于功W是数量,这个实例表明两个向量可能产生一个数量.这是两个向量间的一种特殊运算,它在理论和实际中是经常遇到的.为此,我们给出下面的定义.

定义6.2.1(点积)　向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的点积(或称为数量积)定义为