

21 世纪数学系列教材

# 工科数学分析(下)

(第二版)

李大华 林 益 汤燕斌 王德荣

华中科技大学出版社

# 前 言

---

---

随着科学技术的飞速发展,数学的科学地位发生了巨大的变化.高技术本质上是数学技术的观念已日益为人们所共识.计算机和信息技术的迅速发展正在改变着人们对数学知识的需求,冲击着传统的观念和方法.面临着培养 21 世纪人才的挑战性任务,许多高等院校理工科(非数学)专业和管理、经济类专业对数学基础课程提出了新的更高的要求.数学基础课程不再仅仅是学到某些知识,为专业课程提供数学工具,更重要的是提高学生的数学素质和数学修养水平.

本书正是在这种形势下应运而生的.本书的宗旨是,在传授知识的同时,加强和拓宽基础,加强应用;注意传授数学思想,培养学生的创造性思维;着重提高学生的数学素养和能力.本书与传统的高等数学教材的主要区别是,本书加强了微积分的理论基础,注重无穷小分析的思想的运用.在数学的逻辑性、严谨性及抽象性方面也有相应的要求和训练.但本书又与数学专业用的数学分析教材不同,在内容的深度和广度上没有数学分析教材要求那么高.我们注意了对学生的工程意识的培养,即通过典型例题的介绍及相应习题的训练,培养学生运用数学知识解决实际问题的能力.基于上述理由,我们将本书定名为《工科数学分析》.

本书有以下特点.

1. 引进一些近代数学的术语、符号和概念.如集合、映射、度量性等,这将有助于学生进一步阅读使用数学工具较多的现代科技文献.

2. 拓宽和加强数学基础.本书加强了极限理论,从确界定理出发,介绍并证明了实数理论的几个基本定理;证明了有界闭区间上连续函数的基本性质;简要介绍了欧氏空间  $\mathbf{R}^n$  中关于点集的某些基本概念,并在此基础上引进多元函数的极限与连续性概念;增加了理科数学分析中的一些重要内容,如一致连续、一致收敛、向量值函数的导数、含参变量的积分等.这些知识不仅有实用价值,而且对学生的逻辑思维训练是十分有益的.

3. 突出数学建模,培养学生把实际问题转化为数学问题并加以解决的能力.本书除介绍微积分应用的经典例子(如物理、力学、几何等方面的例子)外,还介绍了若干工程、经济、人口、生态等领域中的例子,在习题中设置了许多实际应用的问题,这些问题在提高学生对数学应用的兴趣及能力方面有较大的作用.

4. 重视数学思想方法的训练.本书注意突出无穷小分析的思想,将逼近的思想贯穿始终.尽可能将演绎与归纳的方法有机地结合起来,通过“问题(包括背景)—观察与思考—归纳总结—给出解答”这种模式来组织若干教学内容(如最优化问题—极

值与条件极值等), 以利于培养学生的创造能力.

5. 在习题的配置上, 本书把每节的习题分成(A)、(B)两类. (A)类为基本要求题, 用于巩固基础知识和基本技能; (B)类为提高题, 用于扩大视野和熟练技巧, 提高学生的综合能力. 另外, 每章还配有总习题, 供学生作综合练习或复习使用.

本书适用于理工科(非数学)专业和管理、经济类专业中对数学要求较高的专业. 但如果略去理论性较强的部分及“\*”号部分, 一般工科及经济、管理类专业也可使用本书.

在本书的编写过程中, 得到华中科技大学教务处的大力支持. 本书的第一版曾得到李楚霖教授, 李静瑶、何瑞、杨林锡和乔维佳等4位副教授的支持和具体的帮助. 华中科技大学出版社的有力支持, 以及责任编辑龙纯曼老师和周芬娜老师的辛勤劳动, 使得本书能顺利出版并再版. 在此我们一并表示衷心的感谢!

对于书中的不足和错误, 恳请专家、同行及热心的读者批评指正.

编 者

2004年3月于华中科技大学

# 目 录

第 6 章 向量代数与空间解析几何	
.....	(1)
6.1 向量及其线性运算	(1)
6.1.1 空间直角坐标系	(1)
6.1.2 向量及其坐标表示	(3)
6.1.3 向量的方向余弦	(5)
6.1.4 向量的线性运算	(5)
习题 6.1(附答案与提示)	(9)
6.2 向量的点积与叉积	(10)
6.2.1 两个向量的点积	(10)
6.2.2 点积的性质	(11)
6.2.3 $\mathbf{R}^3$ 中两个向量的叉积	(12)
.....	(12)
6.2.4 向量的混合积	(15)
习题 6.2(附答案与提示)	(16)
6.3 直线与平面	(17)
6.3.1 $\mathbf{R}^2$ 中的直线	(17)
6.3.2 $\mathbf{R}^3$ 中的平面	(18)
6.3.3 $\mathbf{R}^3$ 中的直线	(20)
习题 6.3(附答案与提示)	(21)
6.4 直线与平面的位置关系	(23)
6.4.1 两直线的夹角	(23)
6.4.2 两平面的夹角	(24)
6.4.3 直线与平面的夹角	(24)
6.4.4 点到平面的距离	(25)
6.4.5 平面束	(26)
习题 6.4(附答案与提示)	(27)
6.5 曲面	(29)
6.5.1 曲面及其方程	(29)
6.5.2 柱面	(30)
6.5.3 球面	(30)
6.5.4 椭球面	(31)
6.5.5 旋转曲面	(31)
6.5.6 其他曲面的例子	(32)
习题 6.5(附答案与提示)	(33)
6.6 曲线	(34)
6.6.1 平面曲线	(34)
6.6.2 空间曲线	(35)
6.6.3 空间曲线的投影柱面和 投影曲线	(36)
习题 6.6(附答案与提示)	(36)
总习题(6)(附答案与提示)	(37)
第 7 章 多元函数微分学	(41)
7.1 $n$ 维欧氏空间中某些基本概念	(41)
.....	(41)
7.1.1 $n$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$	(41)
7.1.2 邻域	(43)
7.1.3 内点、外点、边界点、聚点	(43)
.....	(43)
7.1.4 开集	(44)
7.1.5 闭集	(44)
7.1.6 区域	(45)
习题 7.1(附答案与提示)	(45)
7.2 多元函数的基本概念	(46)
7.2.1 二元函数	(46)
7.2.2 等高线和等位面	(47)
7.2.3 极限与连续	(50)
习题 7.2(附答案与提示)	(52)
7.3 偏导数与全微分	(54)
7.3.1 偏导数	(54)
7.3.2 全微分	(56)
7.3.3 连续性与可微性,偏导数 与可微性	(58)
习题 7.3(附答案与提示)	(61)
7.4 复合函数的求导法则	(64)
7.4.1 $z=f(x,y), x=g(t), y=h(t)$	

情形 .....	(64)	7.11.1 拉格朗日乘数 .....	(110)
7.4.2 $z=f(x,y), x=g(u,v),$ $y=h(u,v)$ 的情形 .....	(65)	7.11.2 拉格朗日乘数法 .....	(111)
7.4.3 一阶全微分形式的不变性 .....	(66)	习题7.11(附答案与提示) .....	(113)
7.4.4 高阶偏导数和高阶全微分 .....	(67)	7.12 偏导数计算在偏微分方程中 的应用 .....	(114)
习题7.4(附答案与提示) .....	(70)	7.12.1 验证给定函数满足某 偏微分方程 .....	(115)
7.5 方向导数与梯度 .....	(73)	7.12.2 变量代换 .....	(116)
7.5.1 方向导数 .....	(73)	习题7.12(附答案与提示) .....	(118)
7.5.2 梯度 .....	(75)	总习题(7)(附答案与提示) .....	(118)
习题7.5(附答案与提示) .....	(77)	<b>第8章 重积分</b> .....	(124)
7.6 隐函数微分法 .....	(79)	8.1 二重积分的概念 .....	(124)
7.6.1 一个方程的情形 .....	(79)	8.1.1 曲顶柱体的体积 .....	(124)
7.6.2 方程组的情形 .....	(81)	8.1.2 平面区域内昆虫群体的总量 .....	(125)
7.6.3 隐函数存在定理 .....	(83)	8.1.3 二重积分的定义 .....	(126)
习题7.6(附答案与提示) .....	(85)	8.1.4 二重积分的性质 .....	(126)
7.7 泰勒多项式 .....	(86)	习题8.1(附答案与提示) .....	(127)
习题7.7(附答案与提示) .....	(88)	8.2 二重积分的计算 .....	(128)
7.8 向量值函数的导数 .....	(89)	8.2.1 矩形区域上的二重积分 .....	(128)
7.8.1 向量值函数的概念 .....	(89)	8.2.2 一般区域上的二重积分 .....	(129)
7.8.2 向量值函数的极限与连续性 .....	(90)	8.2.3 利用极坐标计算二重积分 .....	(133)
7.8.3 向量值函数的导数 .....	(91)	8.2.4 二重积分的一般换元法 .....	(136)
习题7.8(附答案与提示) .....	(94)	习题8.2(附答案与提示) .....	(137)
7.9 偏导数在几何上的应用 .....	(95)	8.3 广义二重积分 .....	(140)
7.9.1 空间曲线的切线与法平面 .....	(95)	习题8.3(附答案与提示) .....	(142)
7.9.2 曲面的切平面与法线 .....	(97)	8.4 三重积分的概念和计算 .....	(142)
习题7.9(附答案与提示) .....	(101)	8.4.1 三重积分的概念 .....	(142)
7.10 无约束最优化问题 .....	(103)	8.4.2 利用直角坐标系计算 三重积分 .....	(143)
7.10.1 多元函数的极值概念 .....	(104)	8.4.3 利用柱坐标系计算三重积分 .....	(146)
7.10.2 极值的必要条件 .....	(104)	8.4.4 利用球坐标系计算三重积分 .....	(148)
7.10.3 极值的充分条件 .....	(105)		
7.10.4 最大(小)值的求法 .....	(106)		
习题7.10(附答案与提示) .....	(108)		
7.11 约束最优化问题 .....	(110)		

习题 8.4(附答案与提示) .....	(150)	9.6 保守场与势函数 .....	(191)
8.5 重积分的应用 .....	(152)	9.6.1 保守场与势函数的概念	
8.5.1 体积 .....	(152)	.....	(191)
8.5.2 物体的质心 .....	(153)	9.6.2 保守场的性质 .....	(192)
8.5.3 转动惯量 .....	(154)	9.6.3 保守场的判别法 .....	(195)
8.5.4 引力 .....	(155)	9.6.4 全微分方程及势函数的求法	
习题 8.5(附答案与提示) .....	(156)	.....	(196)
总习题(8)(附答案与提示) .....	(158)	习题 9.6(附答案与提示) .....	(199)
<b>第 9 章 曲线积分与曲面积分</b> .....	(161)	9.7 散度和高斯公式 .....	(201)
9.1 第一类曲线积分 .....	(161)	9.7.1 向量场的散度 .....	(201)
习题 9.1(附答案与提示) .....	(164)	9.7.2 散度的计算 .....	(202)
9.2 第二类曲线积分 .....	(165)	9.7.3 高斯公式 .....	(203)
9.2.1 第二类曲线积分的概念		习题 9.7(附答案与提示) .....	(206)
和性质 .....	(165)	9.8 旋度与斯托克斯公式 .....	(207)
9.2.2 第二类曲线积分的计算		9.8.1 向量场的旋度 .....	(207)
.....	(166)	9.8.2 斯托克斯公式 .....	(208)
9.2.3 第二类曲线积分的几个		9.8.3 旋度的计算 .....	(210)
等价形式 .....	(167)	习题 9.8(附答案与提示) .....	(212)
习题 9.2(附答案与提示) .....	(171)	9.9 梯度算子 .....	(213)
9.3 第一类曲面积分 .....	(172)	9.9.1 梯度算子的运算规则 .....	(213)
9.3.1 曲面积分 .....	(172)	9.9.2 几个基本公式 .....	(213)
9.3.2 第一类曲面积分的概念		9.9.3 例子 .....	(214)
和性质 .....	(174)	习题 9.9(附答案与提示) .....	(215)
9.3.3 第一类曲面积分的计算 ..	(175)	*9.10 向量的外积与外微分形式 .....	(215)
习题 9.3(附答案与提示) .....	(176)	9.10.1 向量的外积 .....	(216)
9.4 第二类曲面积分 .....	(177)	9.10.2 外微分形式及外微分	
9.4.1 第二类曲面积分的概念		.....	(217)
.....	(177)	9.10.3 场论基本公式的统一形式	
9.4.2 第二类曲面积分的几个		.....	(219)
等价形式 .....	(179)	习题 9.10(附答案与提示) .....	(221)
9.4.3 第二类曲面积分的计算		总习题(9)(附答案与提示) .....	(221)
.....	(180)	<b>第 10 章 无穷级数</b> .....	(225)
习题 9.4(附答案与提示) .....	(182)	10.1 数项级数的收敛与发散 .....	(225)
9.5 格林公式及其应用 .....	(184)	10.1.1 基本概念 .....	(225)
9.5.1 平面闭曲线的定向 .....	(184)	10.1.2 收敛级数的基本性质	
9.5.2 格林公式 .....	(185)	.....	(228)
9.5.3 格林公式的应用 .....	(187)	习题 10.1(附答案与提示) .....	(230)
习题 9.5(附答案与提示) .....	(190)	10.2 正项级数 .....	(231)

10.2.1 有界性准则 .....	(231)	习题 10.6(附答案与提示) .....	(274)
10.2.2 比较判别法 .....	(232)	10.7 周期函数的傅立叶级数 .....	(275)
10.2.3 比值判别法和根值判别法 .....	(235)	10.7.1 基本三角函数系 .....	(276)
10.2.4 积分判别法 .....	(238)	10.7.2 傅立叶系数 .....	(277)
习题 10.2(附答案与提示) .....	(239)	10.7.3 收敛定理 .....	(278)
10.3 任意项级数 .....	(240)	10.7.4 例子 .....	(278)
10.3.1 交错级数收敛判别法 .....	(240)	10.7.5 正弦级数和余弦级数 .....	(280)
10.3.2 绝对收敛与条件收敛 .....	(242)	习题 10.7(附答案与提示) .....	(281)
10.3.3 绝对收敛级数的性质 .....	(243)	10.8 任意区间上的傅立叶级数 .....	(283)
习题 10.3(附答案与提示) .....	(246)	10.8.1 区间 $[-\pi, \pi]$ 上的傅立叶 级数 .....	(283)
10.4 函数项级数的基本概念 .....	(247)	10.8.2 区间 $[-l, l]$ 上的傅立叶 级数 .....	(285)
10.4.1 函数列和函数项级数 .....	(247)	习题 10.8(附答案与提示) .....	(287)
10.4.2 收敛域 .....	(248)	10.9 傅立叶级数的复数形式 .....	(289)
10.4.3 几个基本问题 .....	(248)	习题 10.9(附答案与提示) .....	(291)
10.4.4 一致收敛的概念 .....	(250)	总习题(10)(附答案与提示) .....	(291)
10.4.5 一致收敛级数的性质 .....	(252)	<b>第 11 章 含参变量的积分</b> .....	(296)
习题 10.4(附答案与提示) .....	(254)	11.1 含参变量的常义积分 .....	(296)
10.5 幂级数及其收敛性 .....	(255)	习题 11.1(附答案与提示) .....	(299)
10.5.1 幂级数的收敛半径与 收敛区间 .....	(255)	11.2 广义积分收敛性判别法 .....	(300)
10.5.2 收敛半径的求法 .....	(258)	11.2.1 无穷积分收敛性判别法 .....	(300)
10.5.3 幂级数的性质 .....	(260)	11.2.2 无界函数的广义积分 收敛性判别法 .....	(302)
习题 10.5(附答案与提示) .....	(264)	习题 11.2(附答案与提示) .....	(304)
10.6 泰勒级数 .....	(266)	11.3 含参变量的广义积分 .....	(304)
10.6.1 基本定理 .....	(266)	11.3.1 一致收敛性 .....	(305)
10.6.2 几个基本初等函数的 泰勒级数 .....	(268)	11.3.2 含参变量广义积分的性质 .....	(306)
10.6.3 应用基本展开式的例子 .....	(271)	习题 11.3(附答案与提示) .....	(307)
10.6.4 微分方程的幂级数解法 .....	(272)	总习题(11)(附答案与提示) .....	(307)
		参考文献 .....	(309)

# 第6章 向量代数与空间解析几何

到目前为止,我们讨论的基本上都是一元函数,即  $y=f(x)$ ,这个函数关系中只有一个自变量和一个因变量.但是在实际问题中,经常要考虑多种因素、多方面的关系,因此必须考虑有多个自变量的情形.为此,我们需要作一些相应的准备工作.本章所要介绍的向量代数与空间解析几何的内容,就是这种准备的一部分.

向量是描述那些既有大小、又有方向的量,它是一种重要的数学工具,在工程技术中有着广泛的应用.本章将介绍向量的概念及向量的几种基本运算.

我们知道,平面解析几何的知识是学习一元函数的基础.类似地,学习多元函数微积分时,我们必须首先学习空间解析几何的基础知识.本章将介绍空间的平面和直线的方程,平面与直线的关系,以及空间曲面、曲线的方程.

## 6.1 向量及其线性运算

### 6.1.1 空间直角坐标系

通过平面直角坐标系,可以用有序数对来表示平面上任意一点的位置.为了确定空间中任一点的位置,我们需要建立空间直角坐标系.为此,引进三条互相垂直的直线,称之为  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴,它们相交于一点  $O$ ,称之为原点.通常将这三个坐标轴按右手规则排列(见图6.1).当右手握拳的方向是从  $x$  轴的正向到  $y$  轴的正向时,右手大姆指的指向便是  $z$  轴的正向.

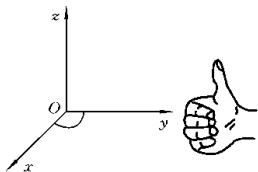


图 6.1

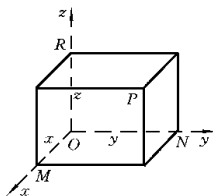


图 6.2

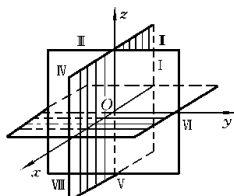


图 6.3

在空间中任取一点  $P$ ,过  $P$  点作三个平面分别垂直于  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴,并交  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴于  $M$ 、 $N$ 、 $R$  三点(见图6.2).  $M$ 、 $N$ 、 $R$  这三个点分别称为点  $P$  在  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴上的投影.设  $M$ 、 $N$ 、 $R$  在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上的坐标分别为  $x$ 、 $y$  和  $z$ .于是,点  $P$  的坐标就可以表示成一个三元有序组  $(x, y, z)$ .易见,  $xy$  平面上的点满足  $z=0$ .

反过来,给定一个三元有序组 $(x, y, z)$ ,我们可以在 $x$ 轴上取坐标为 $x$ 的点 $M$ ,在 $y$ 轴上取坐标为 $y$ 的点 $N$ ,在 $z$ 轴上取坐标为 $z$ 的点 $R$ ,然后通过 $M, N$ 及 $R$ 分别作 $x$ 轴、 $y$ 轴及 $z$ 轴的垂直平面,这三个垂直平面的交点 $P$ 便是以有序组 $(x, y, z)$ 为坐标的点.由此可见,空间的点与有序组 $(x, y, z)$ 之间便建立了一一对应的关系.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,称之为坐标面.三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做卦限.满足 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的那个卦限称为第一卦限(见图 6.3).第一到第八卦限内点的坐标的符号如下表所示:

卦限	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$x$	+	-	-	+	+	-	-	+
$y$	+	+	-	-	+	+	-	-
$z$	+	+	+	+	-	-	-	-

我们知道,在实直线 $\mathbf{R}$ 上,两个点 $a_1$ 与 $b_1$ 之间的距离定义为

$$|b_1 - a_1| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2},$$

其中“ $\sqrt{\quad}$ ”表示取非负平方根.现在把两点间的距离公式推广到平面和空间中去.

为了表述方便,我们把由 $n$ 个一维实空间(即实直线) $\mathbf{R}$ 构成的乘积集合称为 $n$ 维实空间,记作

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}.$$

于是,平面就是二维实空间 $\mathbf{R}^2$ ,而空间就是三维实空间 $\mathbf{R}^3$ .在 $\mathbf{R}^n$ 中,其元素称为点,它是 $n$ 元有序组 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ,其中 $x_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 是实数.现在考察 $\mathbf{R}^n$ 中两点间的距离.

$\mathbf{R}^2$ 中两点间的距离公式是熟知的,即若点 $(x_1, y_1) \in \mathbf{R}^2$ ,则该点到原点的距离为(见图 6.4)

$$\sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

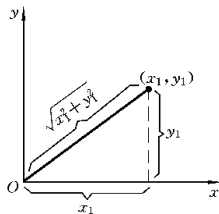


图 6.4

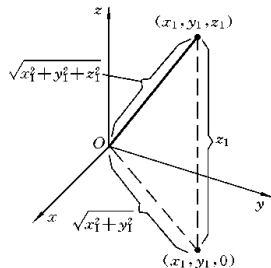


图 6.5

类似地,由几何知识得知,在空间  $\mathbf{R}^3$  中,点  $(x_1, y_1, z_1)$  到原点  $(0, 0, 0)$  的距离为 (见图 6.5)  $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ . 一般地,在空间  $\mathbf{R}^n$  中,很自然地把点  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  到原点  $(0, 0, \dots, 0)$  的距离定义为

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

由此可知,若  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  和  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  是  $\mathbf{R}^n$  中任意两点,则可定义这两点间的距离为

$$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}.$$

### 6.1.2 向量及其坐标表示

我们曾把有序组  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  叫做  $\mathbf{R}^n$  中的一个点,现在在  $\mathbf{R}^n$  中引进向量的概念.

先考虑  $\mathbf{R}^2$  中的情形. 设  $P, Q$  是平面  $\mathbf{R}^2$  中的两个点,它们确定一条有向线段,记作  $\overrightarrow{PQ}$ . 我们称这样的有向线段为平面向量,  $P$  称为向量  $\overrightarrow{PQ}$  的起点,  $Q$  称为这个向量的终点.  $\overrightarrow{PQ}$  的指向是这个向量的方向,而  $\overrightarrow{PQ}$  的长短则表示这个向量的大小. 如果  $\overrightarrow{P_1Q_1}$  和  $\overrightarrow{P_2Q_2}$  是两个有向线段,它们有相同的长度和方向,则认为它们表示了同一个向量. 这就是说,这两个有向线段是互相平行的,且长度、方向完全相同. 有向线段具有确定的、特殊的位置,而向量则不然,图 6.6 中所有的箭头均表示同一个向量. 这正如分数  $\frac{2}{3}$  与  $\frac{4}{6}$  表示同一个有理数那样,两个长度相等、方向相同的有向线段  $\overrightarrow{P_1Q_1}$  和  $\overrightarrow{P_2Q_2}$  表示同一个向量. 因此,若一个向量能够由另一个向量经平行移动得到,则认为这两个向量相等.

我们可以根据不同场合的需要来选取向量的某种表示方式. 有时把向量的起点放在直角坐标系的原点  $O$  上(见图 6.7(a)),有时则可以把向量放在平面上的任何地方(见图 6.7(b)).

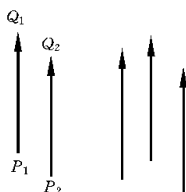


图 6.6

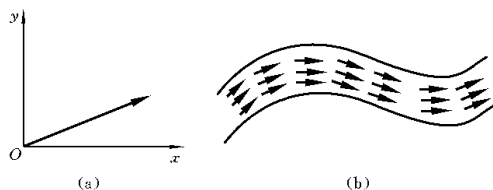


图 6.7

一般地,我们把具有大小和方向的量称为向量. 例如质点运动的速度,拖曳重物

的作用力等. 在物理上, 向量常用有向线段来作为几何表示, 因此, 前面所述的平面向量的概念可以推广到三维空间  $\mathbf{R}^3$  中以及一般的  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  中.

我们用黑体字母  $A, B, F, r, v$  等表示向量, 向量的长度则表示为  $|A| = A, |r| = r$  等. 向量的长度又称为向量的模, 向量的模是一个数量. 模为 1 的向量称为单位向量.

如果把向量  $A$  的起点放在原点  $O$  处, 则向量  $A = \overrightarrow{OA}$  就与点  $A$  有一一对应的关系. 即给定向量  $A$ , 把它的起点放在  $O$  点, 就可以得到它的终点  $A$ . 反之, 给定一点  $A$ , 则  $\overrightarrow{OA}$  确定一个向量. 如果平面向量  $A$  的起点放在坐标原点处, 终点坐标是  $(x, y)$ , 则称数  $x$  和  $y$  为向量  $A$  的(数量)分量. 在几何上,  $|x|$  及  $|y|$  是向量  $A$  在  $x$  轴及  $y$  轴上的投影线段的长度(见图 6.8). 因此, 我们亦称  $x$  是向量  $A$  在  $x$  轴上的投影,  $y$  为  $A$  在  $y$  轴上的投影. 于是, 又可将向量  $A$  表示为

$$A = \{x, y\}$$

并称之为  $A$  的坐标表示, 由勾股定理知, 向量  $A$  的模  $|A| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . 类似地, 在  $\mathbf{R}^3$  中, 若向量  $A$  的起点在坐标原点  $O$  处, 终点坐标为  $(x, y, z)$ , 则  $A$  的坐标表示为

$$A = \{x, y, z\},$$

其模  $|A| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (见图 6.9). 推而广之, 我们把

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

称为  $\mathbf{R}^n$  中起点在原点  $O = (0, 0, \dots, 0)$ 、终点在  $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  的  $n$  维向量, 其模

$$|A| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

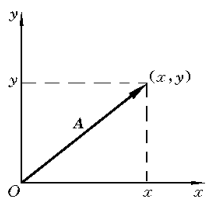


图 6.8

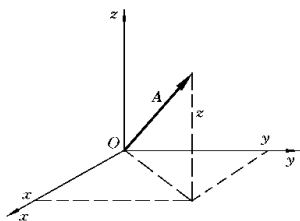


图 6.9

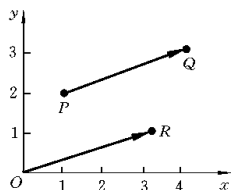


图 6.10

有固定起点  $O$  的向量称为点  $A$  的向径, 或称为位置向量.  $A$  点的向径的分量就是  $A$  点的坐标. 分量均为零的向量称为零向量, 记作  $\mathbf{0}$ , 它的长度是零而没有方向(或者认为它的方向是任意的). 例如, 在  $\mathbf{R}^n$  中, 零向量  $\mathbf{0} = \{0, 0, \dots, 0\}$ .

如果向量  $a$  与  $b$  的夹角等于  $0$  或  $\pi$ , 则称向量  $a$  与  $b$  共线(或平行), 记作  $a \parallel b$ . 由于零向量的方向可看作任意的, 于是可以认为零向量与任何向量都平行.

**例 6.1.1** 设向量  $\overrightarrow{PQ}$  的起点为  $P(1, 2)$ , 终点为  $Q(4, 3)$ , 求  $\overrightarrow{PQ}$  的坐标表示.

**解** 把  $\overrightarrow{PQ}$  的起点移到原点  $O$  处, 而将向量  $\overrightarrow{PQ}$  平行地移动成  $\overrightarrow{OR}$ (见图 6.10), 并

取  $|\overrightarrow{OR}| = |\overrightarrow{PQ}|$ . 则  $\overrightarrow{OR}$  和  $\overrightarrow{PQ}$  表示同一个向量. 易见点  $R$  的坐标是  $(3, 1)$ . 因此向量  $\overrightarrow{PQ}$  可表示为  $\overrightarrow{PQ} = \{3, 1\}$ . □

**例 6.1.2** 设  $P = (4, 1, -1), Q = (7, -3, 1)$ . 求三维向量  $\overrightarrow{PQ}$  的模.

**解**  $\overrightarrow{PQ}$  的三个数量分量分别为

$$x = 7 - 4 = 3, \quad y = -3 - 1 = -4, \quad z = 1 - (-1) = 2,$$

因此  $\overrightarrow{PQ} = \{3, -4, 2\}$ , 它的模为

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{29}. \quad \square$$

### 6.1.3 向量的方向余弦

现在我们进一步找出向量的坐标与向量的模、方向之间的联系.

将向量  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  的起点放在坐标原点, 向量  $\mathbf{a}$  与三个坐标轴的正向的夹角分别设为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 并规定  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ ,  $0 \leq \gamma \leq \pi$ , 则称  $\alpha, \beta, \gamma$  为向量  $\mathbf{a}$  的方向角 (见图 6.11).

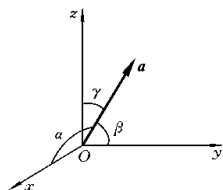


图 6.11

因为向量的坐标就是向量在坐标轴上的投影, 所以有

$$a_1 = |\mathbf{a}| \cos \alpha, \quad a_2 = |\mathbf{a}| \cos \beta, \quad a_3 = |\mathbf{a}| \cos \gamma. \quad (6.1.1)$$

而

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

因此得  $\cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$

且

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

我们称  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为向量  $\mathbf{a}$  的方向余弦.

**例 6.1.3** 设有两点  $P(1, 2, \sqrt{2})$  和  $Q(2, 1, 0)$ , 求向量  $\overrightarrow{PQ}$  的模、方向余弦和方向角.

**解**  $\overrightarrow{PQ} = \{2-1, 1-2, 0-\sqrt{2}\} = \{1, -1, -\sqrt{2}\}$ ;

则  $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4} = 2$ ;

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \frac{2\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}. \quad \square$$

### 6.1.4 向量的线性运算

现在我们引进向量的加法和数乘这两种运算, 称之为向量的线性运算.

(1) 向量的加法

根据力学中两个力或两个速度的合成法则, 我们用平行四边形法则来定义两个

向量的相加.

将两向量  $a, b$  平移至同一起点  $O$  (原点), 以此两向量为邻边作平行四边形, 定义由起点  $O$  到平行四边形对顶点  $B$  所作成的向量  $\overrightarrow{OB}$  为向量  $a$  与  $b$  之和 (见图 6.12(a)), 即

$$a + b = \overrightarrow{OB}.$$

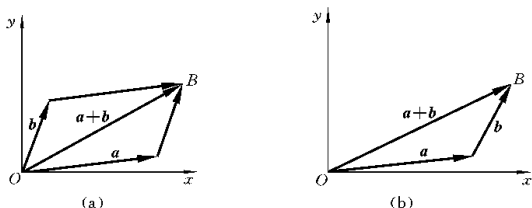


图 6.12

为了解决两个平行向量相加的问题, 我们进一步引进下面的三角形法则.

将两向量  $a, b$  首尾相接, 则由起点到终点的向量  $\overrightarrow{OB}$  为向量  $a, b$  之和 (见图 6.12(b)), 即

$$a + b = \overrightarrow{OB}.$$

不难看出, 三角形法则蕴含了平行四边形法则.

下面我们给出向量加法的坐标表示. 不妨先考察平面向量的情形. 设  $a = \overrightarrow{OA} = \{a_1, a_2\}$ ,  $b = \overrightarrow{AB} = \{b_1, b_2\}$ , 并设  $B$  点的坐标为  $(x, y)$  (见图 6.13), 则

$$a + b = \overrightarrow{OB} = \{x, y\}.$$

由于  $A$  点的坐标为  $(a_1, a_2)$ , 因此

$$\overrightarrow{AB} = \{x - a_1, y - a_2\}.$$

由向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标的唯一性知,

$$b_1 = x - a_1, \quad b_2 = y - a_2,$$

亦即有  $x = a_1 + b_1, \quad y = a_2 + b_2.$

由此可得向量  $a + b$  的坐标表示为

$$a + b = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}. \quad (6.1.2)$$

类似地, 对于  $\mathbf{R}^3$  中的向量  $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ ,  $a + b$  的坐标表示为

$$a + b = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}. \quad (6.1.3)$$

而对于  $\mathbf{R}^n$  中的向量  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  及  $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ,  $a + b$  的坐标表示为

$$a + b = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n\}.$$

这就是说, 两向量和的坐标等于两向量对应坐标之和.

## (2) 向量的数乘

数  $k$  与向量  $a$  的乘积 (称为数乘) 定义为一个向量, 记作  $ka$ , 其大小为  $|ka| =$

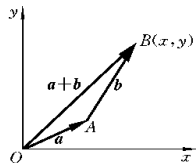


图 6.13

$|k||a|$ , 方向与  $a$  平行. 当  $k > 0$  时,  $ka$  与  $a$  同向; 当  $k < 0$  时,  $ka$  与  $a$  反向(见图 6.14), 即

$$ka = \begin{cases} |k|a, & k > 0, \\ -|k|a, & k < 0; \end{cases}$$

当  $k=0$  时,  $ka=0a=0$ .

由向量的数乘可以导出向量的减法, 即  $a$  与  $b$  相减定义为

$$a - b = a + (-1)b,$$

也就是将  $b$  变成  $-b$  再和  $a$  相加(见图 6.15).

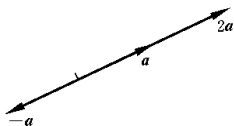


图 6.14

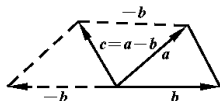


图 6.15

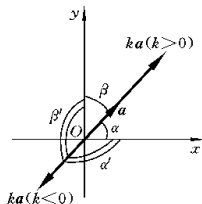


图 6.16

如果用记号  $e_a$  表示与向量  $a$  同方向的单位向量, 则依向量的数乘的定义, 有

$$a = |a|e_a.$$

因此, 一个非零向量除以它的模便可得到一个同方向的单位向量, 即

$$\frac{a}{|a|} = e_a. \quad (6.1.4)$$

根据(6.1.1)式, 单位向量  $e_a$  又可以用方向余弦表示为

$$e_a = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}. \quad (6.1.5)$$

下面我们给出向量的数乘的坐标表示. 还是以平面向量为例. 令  $a = \{a_1, a_2\}$ ,  $k$  为任意实数, 设  $a$  的方向角为  $\alpha, \beta$ ,  $ka$  的方向角为  $\alpha', \beta'$ . 当  $k > 0$  时, 向量  $ka$  与  $a$  同方向, 故  $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$  (见图 6.16). 因此,  $ka$  的坐标为

$$x = |k||a|\cos\alpha, \quad y = |k||a|\cos\beta.$$

而  $a_1 = |a|\cos\alpha, a_2 = |a|\cos\beta$ , 故有

$$x = ka_1, \quad y = ka_2.$$

当  $k < 0$  时, 向量  $ka$  与  $a$  反方向, 故  $\alpha = \pi - \alpha', \beta = \pi - \beta'$ . 这时,  $ka$  的坐标应为

$$\begin{aligned} x &= |ka|\cos\alpha' = -k|a|(-\cos\alpha) = ka_1, \\ y &= |ka|\cos\beta' = -k|a|(-\cos\beta) = ka_2. \end{aligned}$$

因此, 不论  $k$  是正数还是负数, 均有

$$ka = \{ka_1, ka_2\}.$$

类似地, 对于  $\mathbf{R}^3$  中的向量  $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ , 有

$$ka = \{ka_1, ka_2, ka_3\}.$$

对于  $\mathbf{R}^n$  中的向量  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 则有

$$ka = \{ka_1, ka_2, \dots, ka_n\}.$$

可以证明, 对于向量  $a, b$ , 若  $a \neq \mathbf{0}$ , 则  $a \parallel b$  的充要条件是存在实数  $k$ , 使得  $b = ka$ . (证明留作习题)

**例 6.1.4** 在  $\mathbf{R}^2$  中, 向量  $a = \{1, -3\}$  与向量  $b = \{2, -6\}$  是平行的, 并且它们有相同的方向. 而向量  $a = \{1, -3\}$  与向量  $d = \{2, -7\}$  是不平行的.  $\square$

**例 6.1.5** 设  $|a| = 5$ , 则

$$|3a| = |3||a| = 3 \cdot 5 = 15,$$

且  $3a$  与  $a$  同向. 但是,  $-7a$  与  $a$  的方向相反, 而

$$|-7a| = |-7||a| = 7 \cdot 5 = 35. \quad \square$$

**例 6.1.6** 设有  $\mathbf{R}^4$  中的向量  $a = \{1, -2, 0, 4\}$ ,  $b = \{2, 3, -1, 1\}$ , 则

$$3a - 5b = \{3, -6, 0, 12\} - \{10, 15, -5, 5\} = \{-7, -21, 5, 7\}. \quad \square$$

下面我们给出向量加法和数乘的运算律, 其证明留作练习.

**定理 6.1.1** 对于任意向量  $a, b, c$  以及任意的数  $\alpha, \beta$ , 以下的运算律成立:

- (1)  $a + b = b + a$  (交换律);
- (2)  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (结合律);
- (3)  $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$  (数乘的结合律);
- (4)  $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$  (分配律);
- (5)  $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$  (分配律).

有了向量的加法和数乘运算后, 我们还可以给出向量的分解表达式. 为此, 以  $\mathbf{R}^3$  为例, 我们在空间直角坐标系  $Oxyz$  中的三个坐标轴上分别取单位向量

$$i = \{1, 0, 0\}, \quad j = \{0, 1, 0\}, \quad k = \{0, 0, 1\},$$

称之为  $\mathbf{R}^3$  中的单位坐标向量. 于是任何向量  $a = \{a_1, a_2, a_3\}$  可有如下的分解表达式:

$$\begin{aligned} a &= \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, 0, 0\} + \{0, a_2, 0\} + \{0, 0, a_3\} \\ &= a_1\{1, 0, 0\} + a_2\{0, 1, 0\} + a_3\{0, 0, 1\}, \end{aligned}$$

即 
$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k. \quad (6.1.6)$$

(6.1.6) 式称为向量  $a$  的按单位坐标向量的分解表达式, 而向量  $a_1 i, a_2 j, a_3 k$  分别称为  $a$  在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上的分向量.

**例 6.1.7** 设向量  $a$  的起点为  $P(5, 1, 2)$ , 终点为  $Q(7, 2, 4)$ . 求单位向量  $e_a$  关于单位坐标向量的分解式.

解 
$$a = \overrightarrow{PQ} = \{7-5, 2-1, 4-2\} = \{2, 1, 2\},$$

故 
$$|a| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3,$$

因此,

$$e_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\},$$

即

$$e_a = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

□

## 习 题 6.1

(A)

1. 回答下列问题:

- (1)  $\mathbf{R}^3$  的空间直角坐标系是怎样建立的?
- (2)  $\mathbf{R}^n$  中两点的距离如何定义?
- (3) 向量是怎样的量? 向量与有向线段有什么不同?
- (4) 什么叫单位向量? 给定一个非零向量  $\mathbf{a}$ , 你能写出一个与  $\mathbf{a}$  同方向的单位向量吗?
- (5) 向量的模及方向余弦怎样定义?
- (6) 向量的加法与数乘是怎样定义的?

2. 在空间直角坐标系中, 定出下列各点的位置:

$$A(1, 2, 3); \quad B(-1, 2, 4); \quad C(2, -3, -4); \quad D(3, 4, 0); \quad E(0, 2, 1); \quad F(4, 0, 0).$$

3. 求下列各点间的距离:

$$(1) (0, 0, 0), (2, 3, 4); \quad (2) (4, -1, 2), (-2, 1, 3).$$

4. 求点  $M(2, -1, 3)$  与原点及各坐标轴间的距离.

5. 证明: 以三点  $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6), C(2, 4, 3)$  为顶点的三角形是等腰直角三角形.

6. 给定一点  $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ , 试写出该点关于 (1) 各坐标面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点的对称点的坐标.

7. 求下列向量的模:

$$(1) \{1, 2, 3\}; \quad (2) \{-1, 0, 5\}; \quad (3) \{2, -4, 7\}.$$

8. 求下列向量的和, 并画出  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ :

$$(1) \mathbf{a} = \{2, 1\}, \mathbf{b} = \{1, 4\}; \quad (2) \mathbf{a} = \{2, 2\}, \mathbf{b} = \{1, -1\};$$

$$(3) \mathbf{a} = \{1, 2, 0\}, \mathbf{b} = \{2, 3, 5\}; \quad (4) \mathbf{a} = \{3, -2, 1\}, \mathbf{b} = \{-4, 3, 2\}.$$

9. 求下列向量的差, 并画出  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ :

$$(1) \mathbf{a} = \{4, 3\}, \mathbf{b} = \{2, 0\}; \quad (2) \mathbf{a} = \{1, 1\}, \mathbf{b} = \{-2, 4\};$$

$$(3) \mathbf{a} = \{2, 3, 4\}, \mathbf{b} = \{1, 5, 0\}; \quad (4) \mathbf{a} = \{3, 4, 2\}, \mathbf{b} = \{0, 0, 0\}.$$

10. 计算并画出  $k\mathbf{A}$ , 假设  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ , 而  $k$  为

$$(1) 2; \quad (2) -2; \quad (3) \frac{1}{2}; \quad (4) -\frac{1}{2}.$$

11. 求一个单位向量, 使它与向量  $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  同方向.

12. 求向量  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$  的方向余弦.

13. 设  $\mathbf{A} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}, \mathbf{B} = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$ . 试用  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  表示向量  $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$ .

(B)

1. 设风速为每小时 48 km, 风向为东北. 一架飞机相对于风以每小时 160 km 的速度飞行, 由飞机的

尾部到飞机头部的指向是东南方向(见图6.17).

- (1) 求飞机相对于地面的速度大小;  
 (2) 飞机相对于地面的飞行方向是什么?

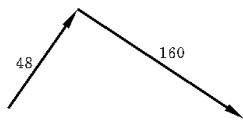


图 6.17

2. 证明本节定理 6.1.1 中的各条运算律.  
 3. 证明,若  $a \neq 0$ , 则向量  $a$  与  $b$  平行的充要条件是存在实数  $k$ , 使得  $b = ka$ .

## 答案与提示

### (A)

3. (1)  $\sqrt{29}$ ; (2)  $\sqrt{41}$ .  
 4.  $\overline{MO} = \sqrt{14}, d_x = \sqrt{10}, d_y = \sqrt{13}, d_z = \sqrt{5}$ .  
 5.  $\overline{AB} = \sqrt{49}, \overline{BC} = \sqrt{98}, \overline{CA} = \sqrt{49}, \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ .  
 6. (1)  $(a, b, -c), (-a, b, c), (a, -b, c)$ ; (2)  $(a, -b, -c), (-a, b, -c), (-a, -b, c)$ ;  
 (3)  $(-a, -b, -c)$ .  
 7. (1)  $\sqrt{14}$ ; (2)  $\sqrt{26}$ ; (3)  $\sqrt{69}$ .  
 8. (1)  $\{3, 5\}$ ; (2)  $\{3, 1\}$ ; (3)  $\{3, 5, 5\}$ ; (4)  $\{-1, 1, 3\}$ .  
 9. (1)  $\{2, 3\}$ ; (2)  $\{3, -3\}$ ; (3)  $\{1, -2, 4\}$ ; (4)  $\{3, 4, 2\}$ .  
 10. (1)  $4i + 6j + 2k$ ; (2)  $-4i - 6j - 2k$ ; (3)  $i + \frac{3}{2}j + \frac{1}{2}k$ ; (4)  $-i - \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k$ .  
 11.  $l^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}i + \frac{2}{\sqrt{14}}j + \frac{3}{\sqrt{14}}k$ .  
 12.  $\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$ .

### (B)

1. (1) 速度大小为 167(km/h); (2) 方向为东偏南  $28.3^\circ$ .

## 6.2 向量的点积与叉积

### 6.2.1 两个向量的点积

我们先来看一个简单的物理问题. 设一物体在常力  $F$  的作用下, 沿直线从  $P$  点移动到  $Q$  点. 令  $r = \overrightarrow{PQ}$ . 由物理学的知识可知, 力  $F$  所作的功为

$$W = |F| |r| \cos \theta,$$

其中  $\theta$  为  $F$  与  $r$  的夹角(见图 6.18).

由于功  $W$  是数量, 这个实例表明两个向量可能产生一个数量. 这是两个向量间的一种特殊运算, 它在理论和实际中是经常遇到的. 为此, 我们给出下面的定义.

**定义 6.2.1(点积)** 向量  $a$  与  $b$  的点积(或称为数量积)定义为