

21 世纪高职高专数学教材

高等应用数学学习辅导

(下 册)

主 编 朱弘毅

副主编 赵斯泓 陈宝冲

黄丽萍 俞国胜

立信会计出版社

前 言

《高等应用数学学习辅导》是《高等应用数学》(上海高校《高等应用数学》编写组编,立信会计出版社出版)配套的学习辅导书,分上、下两册。

高等数学是高职高专的一门基础课,对于刚跨进高等学府的大学生来说,该课程不同于中学数学,某些概念难以透彻理解,运算技巧不易掌握、理论性比中学强。针对这门课程的难度和特点,编者希望借助于学习辅导书做好难度的转化工作,这样,一方面有利于学生掌握知识,提高分析问题、解决问题的能力;另一方面高等学校的教师讲授的格调不同于中学教师,而且授课的进度较中学快,学习方法上学生正处于从中学类型向大学类型转变,在这种情况下,他们迫切需要一个辅导老师,帮助他们解决学习中的疑难问题,这也是我们编写这本书的目的。

《高等应用数学学习辅导》各章与相应的教材同步,每章由内容提要、例题分析、习题选解和测试题及其解答四节组成。例题分析和习题选解中的题目都是较典型的题目,测试题既考虑到知识的覆盖面,又注意到突出重点,有利于对该章学习的总结检查。上册提供高等数学模拟试题两套,下册提供线性代数、概率统计模拟试题各两套。为有利于学生自我检查,这些试题都给出详细的解题过程。

《高等应用数学学习辅导》由朱弘毅任主编、赵斯泓、陈宝冲、黄丽萍、俞国胜任下册副主编。参加编写的有(按姓氏笔画为序)车荣强、田丽、朱弘毅、苏海容、陈宝冲、张福康、赵斯泓、俞国胜、陶明诚、黄丽萍、

诸建平。本书的出版得到了立信会计出版社孙时平社长、蔡莉萍编辑的支持和帮助,在此表示衷心感谢。

限于编者的水平、书中不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

朱弘毅于香歌丽园

2007 年秋

目 录

第八章 矩阵	1
第一节 内容提要	1
第二节 例题分析	8
第三节 习题选解	15
第四节 测试题及其解答	28
第九章 线性方程组	39
第一节 内容提要	39
第二节 例题分析	40
第三节 习题选解	49
第四节 测试题及其解答	56
第十章 随机事件与概率	64
第一节 内容提要	64
第二节 例题分析	68
第三节 习题选解	73
第四节 测试题及其解答	83
第十一章 随机变量与数字特征	90
第一节 内容提要	90
第二节 例题分析	94
第三节 习题选解	100

第四节	测试题及其解答	113
第十二章	统计分析	121
第一节	内容提要	121
第二节	例题分析	127
第三节	习题选解	135
第四节	测试题及其解答	152
高等应用数学模拟试题及其解答		163
一、	线性代数(第八、第九章)模拟试题	163
二、	线性代数模拟试题解答	169
三、	概率论(第十、第十一章)模拟试题	178
四、	概率论模拟试题解答	183
五、	数理统计(第十二章)模拟试题	188
六、	数理统计模拟试题解答	192

第八章 矩 阵

第一节 内 容 提 要

1. 矩阵的概念

由 $m \times n$ 个实数 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) 排列成一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵, 其中 a_{ij} 的下标表示该数在第 i 行第 j 列交叉位置上的元素。一般用大写字母 A, B, C, \dots 表示矩阵。 A 是 m 行 n 列矩阵, 可用 $A_{m \times n}$ 表示, 或用 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 表示。

$n \times n$ 矩阵 A 称为 n 阶方阵, 可记为 A_n

具有相同行数和相同列数的矩阵, 称之为同型矩阵。

如果同型矩阵, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 在对应位置上的元素都相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij}, (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$$

则称矩阵 A 和矩阵 B 相等, 记作 $A=B$ 。

所有元素都为零的矩阵称之为零矩阵, m 行 n 列的零矩阵记作 $O_{m \times n}$, 简记为 O_0 。

主对角线上的元素均为 1, 其余元素都为零的 n 阶方阵, 称作单位矩阵, 记作 E 或 E_n 。

2. 矩阵的加法

设矩阵 A, B 是 $m \times n$ 的同型矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

将它们对应位置元素相加, 所得的 $m \times n$ 矩阵称为矩阵 A, B 的和, 记作 $A+B$, 即

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法具有下列运算性质(其中 A, B, C, O 为同型矩阵):

- (1) 交换律: $A+B=B+A$ 。
- (2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$ 。
- (3) $A+O=A$ 。

3. 数乘矩阵与矩阵的减法

设 k 为实数, 矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, 则称 $(ka_{ij})_{m \times n}$ 为数 k 与矩阵 A 的乘积, 记作 kA 或 Ak , 即

$$kA = Ak = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}。$$

设 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, 则称矩阵 $(-a_{ij})_{m \times n}$ 为矩阵 A 的负矩阵, 记作 $-A$, $-A=(-1)A$ 。

设 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, $B=(b_{ij})_{m \times n}$ 是两个同型矩阵, 称 $A+(-B)$ 为两矩阵的减法, 记作 $A-B$, 即

$$A-B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}。$$

由定义,数与矩阵的乘法运算具有如下运算性质:(设 A, B, O 是同型矩阵, k, l 是实数):

- (1) $k(A+B) = kA + kB$ 。
- (2) $(k+l)A = kA + lA$ 。
- (3) $(kl)A = k(lA)$ 。
- (4) $1A = A, A-A = 0$

4. 矩阵的乘法

设 $A = (a_{ik})$ 是一个 $m \times s$ 矩阵, $B = (b_{kj})$ 是一个 $s \times n$ 矩阵, 则由元素

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$$

所构成的 m 行 n 列矩阵 $C = (c_{ij})_{m \times n}$ 称为 A 与 B 的乘积, 记作 AB , 即 $C = AB$ 。

注意: A 与 B 相乘, 只有当矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等时, 才能定义乘积 AB 。矩阵乘法不满足交换律。

矩阵乘法具有如下性质:

- (1) $A(B+C) = AB+AC; (B+C)A = BA+CA$ 。
- (2) $(AB)C = A(BC)$ 。
- (3) $A_{m \times n}E_n = E_m A_{m \times n} = A_{m \times n}$ 。
- (4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, 其中 k 是一个实数。

设 A 是 n 阶矩阵, k 是自然数, k 个矩阵 A 相乘称为方阵 A 的 k 次幂, 记作 A^k 。

方阵的幂具有如下性质:

$$A^k A^l = A^{k+l} \quad (A^k)^l = A^{kl}$$

5. 矩阵的转置

将 A 的行和列对应互换所得的 $n \times m$ 矩阵称为 A 的**转置矩阵**, 记作 A^T , 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \text{ 则 } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}。$$

矩阵的转置具有如下运算性质:

- (1) $(A^T)^T = A$ 。
- (2) $(A+B)^T = A^T + B^T$ 。
- (3) $(kA)^T = k(A^T)$ 。(k 是实数)
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$ 。

6. 矩阵的初等行(列)变换是指下列三种变换

(1) 互换矩阵中两行(列)的位置(互换矩阵中第 i 行和第 j 行, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$; 互换矩阵中第 i 列和第 j 列, 记为 $c_i \leftrightarrow c_j$)。

(2) 用一个非零数 k 乘矩阵的某一行(列)(用一个非零数 k 乘矩阵的第 i 行, 记作 kr_i ; 用一个非零数 k 乘矩阵的第 i 列, 记为 kc_i)。

(3) 把矩阵的某一行(列)的元素都乘以数 k 加到另一行(列)对应元素(第 i 行的元素的 k 倍加到第 j 行对应元素, 记为 $kr_i + r_j$; 第 i 列的元素的 k 倍加到第 j 列对应元素, 记为 $kc_i + c_j$)。

矩阵的初等行变换与矩阵的初等列变换统称为**矩阵的初等变换**, 矩阵 A 经过初等变换化为矩阵 B , 用符号 $A \rightarrow B$ 表示。

如果矩阵的零行(元素全为零的行称为零行, 反之称为非零行)全部位于非零行的下方, 且各个非零行左起的第一个非零元素(称为首非零元)的列标严格增大, 则称此矩阵为行阶梯形矩阵。如果行阶梯形的首非零元均为“1”, 且首非零元所在列中除其首非零元外其余元素均为 0, 则称此行阶梯形矩阵为行最简阶梯形矩阵。

矩阵 A 经过若干次初等行变换化为行阶梯形矩阵 B , 行阶梯形矩阵 B 中非零行的行数称为矩阵 A 的秩, 记作 $R(A)$ 。规定零矩阵的秩为 0。

任意非行阶梯形矩阵通过若干初等行变换都能化为行阶梯形矩阵, 行最简阶梯形矩阵。

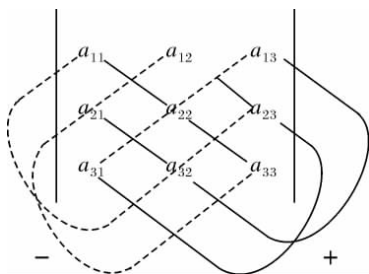
7. 行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式所表示的 6 项代数和, 可用下面画线的方法记忆。图中实线联结的 3 个元素的乘积是代数和中的一项; 虚线联结的 3 个元素的乘积是代数中的负项。此法称为对角线法。



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

其中 $A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1n}$ 分别是 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$ 对应的代数余子式。

8. 行列式的性质

(1) 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等, 即 $D = D^T$ 。

(2) 任意交换行列式的两行(或两列), 行列式变号。

我们用 $r_i(c_i)$ 表示行列式的第 i 行(列)的元素, 并用 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$) 表示交换行列式的第 i 行(列)与第 j 行(列)。

(3) 如果行列式 D 中的两行(或两列)的元素对应相等, 则 $D=0$ 。

(4) 行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和, 即

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

上式分别称为行列式按 i 行展开[记作 $r(i)$]和按 j 列展开[记作 $c(j)$]。

(5) 行列式某行(或某列)元素有公因子 k , 则 k 可提到行列式符号外面。

(6) 行列式中某行(或某列)元素全为零, 则行列式的值为零。

(7) 行列式 D 中若有两行(或两列)对应元素成比例, 则行列式 $D=0$ 。

(8) 行列式某行(或某列)的所有元素乘以常数 k 后加于另一行(或另一列)对应的元素上, 行列式的值不变。

我们用记号 kr_i+r_j 来表示第 i 行所有元素乘以常数 k 后加于第 j 行对应的元素,用记号 kc_i+c_j 表示第 i 列所有元素乘以常数 k 后加于第 j 列对应的元素。

9. 方阵的行列式

由 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 的元素按原来次序组成的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方阵 A 的行列式,记为 $|A|$ 或 $\det(A)$ 。

方阵的行列式具有如下性质。

- (1) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$ 。
- (2) A, B 为 n 阶方阵时, $|AB|=|A||B|$ 。

10. 逆矩阵

设 A 是 n 阶方阵,如果存在 n 阶方阵 B ,使得

$$AB=BA=E$$

则称矩阵 B 是矩阵 A 的逆矩阵,记为 A^{-1} ;并称 A 是可逆矩阵,(或 A 是可逆的)。

逆矩阵具有如下性质:

- (1) 如果 n 阶方阵 A 是可逆矩阵,则 A^{-1} 也是可逆矩阵,且 $(A^{-1})^{-1}=A$ 。
- (2) 如果 n 阶方阵 A, B 都是可逆矩阵,则 AB 也是可逆矩阵,且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 。
- (3) 如果 n 阶方阵 A 是可逆矩阵,则 A^T 也是可逆矩阵,且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ 。

n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 是可逆矩阵的充分必要条件是 A 的行列式 $|A| \neq 0$ 。当 A 是可逆矩阵时,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

其中, A^* 称为 A 的伴随矩阵, 它是 $|A|$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 构成的方阵。即

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

11. 解线性方程组

对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

即

$$AX = B$$

其中, $A = (a_{ij})_n$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ 。

解法一(克莱姆法则) 如果系数行列式 $D = |A| \neq 0$, 则线性方程组有解且仅有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中, D_j 是将行列式 D 中第 j 列元素换为 b_1, b_2, \cdots, b_n 所得的 n 阶行列式 ($j=1, 2, \cdots, n$)。

解法二 如果 $D \neq 0$, 于是 A^{-1} 存在, 则解 $X = A^{-1}B$ 。

第二节 例题分析

【例 1】 设 $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x-y & x-y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3y-3z & 1 \\ -2 & 6-z \end{pmatrix}$ 。

若 $A=B$, 求 x, y, z 的值。

分析 根据矩阵 A 与 B 相等的定义, A 与 B 对应的元素应该相等, 由此得方程组, 求得 x, y, z 的值。

解 由 $A=B$, 得方程组

$$\begin{cases} x=3y-3z \\ 2x-y=-2 \\ x-y=6-z \end{cases}$$

解方程组, 得解 $x=9, y=20, z=17$ 。

【例 1】 已知 $\begin{pmatrix} 1 & y \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & w \\ z & 2 \end{pmatrix}$, 求 z, y, z, w 。

分析 首先根据矩阵乘法计算 $\begin{pmatrix} 1 & y \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, 得 $\begin{pmatrix} 2+3y & x+2y \\ 2 & 4-2x \end{pmatrix}$ 。

然后由 $\begin{pmatrix} 2+3y & x+2y \\ 2 & 4-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & w \\ z & 2 \end{pmatrix}$, 求 x, y, z, w 。

解 因为 $\begin{pmatrix} 1 & y \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3y & x+2y \\ 2 & 4-2x \end{pmatrix}$

所以 $\begin{pmatrix} 2+3y & x+2y \\ 2 & 4-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & w \\ z & 2 \end{pmatrix}$

得方程组

$$\begin{cases} 2+3y=-4 \\ x+2y=w \\ 2=z \\ 4-2x=2 \end{cases}$$

解方程组, 得解 $x=1, y=-2, z=2, w=-3$ 。

【例 3】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, 求 AB, BA

$-A^T B^T$ 。

分析 根据矩阵的乘法,转置和减法的定义进行计算。

$$\text{解 } AB = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -1 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 12 & 10 & 18 \\ -2 & 14 & 20 & 6 \\ 11 & 13 & 15 & 12 \\ -5 & -19 & -25 & -12 \end{pmatrix}$$

$$BA - A^T B^T = BA - (BA)^T = \begin{pmatrix} 24 & 12 & 10 & 18 \\ -2 & 14 & 20 & 6 \\ 11 & 13 & 15 & 12 \\ -5 & -19 & -25 & -12 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 24 & -2 & 11 & -5 \\ 12 & 14 & 13 & -19 \\ 10 & 20 & 15 & -25 \\ 18 & 6 & 12 & -12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 14 & -1 & 23 \\ -14 & 0 & 7 & 25 \\ 1 & -7 & 0 & 37 \\ -23 & -25 & -37 & 0 \end{pmatrix}$$

【例 4】 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^n (n 是正整数)。

分析 首先计算 A^2 、 A^3 , 从中找出规律, 得 A^n 。

$$\text{解 } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.....

$$A^n = A^{n-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (n-1)a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【例 5】 把矩阵化为行阶梯矩阵, 并求矩阵的秩。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 8 \\ -2 & -10 & 0 & -16 \\ 5 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$(2) B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

分析 按行阶梯形矩阵的定义, 通过矩阵的初等行变换将矩阵化为零行, 全部位于零行的下方, 且各个非零行的左起第一个非零元素的列标严格增大。矩阵的秩是指行阶梯形矩阵的非零行的行数。

$$\text{解 } (1) A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 8 \\ -2 & -10 & 0 & -16 \\ 5 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & -10 & 0 & -16 \\ 5 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} (-4)r_1+r_2 \\ 2r_1+r_3 \\ (-5)r_1+r_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & -17 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 1 & -34 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)r_2+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & -17 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=2$

$$(2) B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} (-3)r_1+r_2 \\ (-4)r_1+r_3 \\ (-2)r_1+r_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-1)r_2+r_3 \\ \frac{1}{2}r_2+r_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(B)=3$

【例 6】 计算行列式 $\begin{vmatrix} 34 & 215 & 35 & 215 \\ 28 & 092 & 29 & 092 \end{vmatrix}$ 。

分析 直接计算太繁,由于第一行的元素差为 1 000,第二行的元素也是 1 000,利用性质较方便。

解 $\begin{vmatrix} 34 & 215 & 35 & 215 \\ 28 & 092 & 29 & 092 \end{vmatrix} \xrightarrow{-c_1+c_2} \begin{vmatrix} 34 & 215 & 1 & 000 \\ 28 & 092 & 1 & 000 \end{vmatrix}$
 $= 1\,000 \begin{vmatrix} 34 & 215 & 1 \\ 28 & 092 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} 1\,000 \begin{vmatrix} 6 & 123 & 0 \\ 28 & 092 & 1 \end{vmatrix}$
 $= 6\,123\,000$

【例 7】 计算行列式 D 的值。

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$