高等应用数学学习辅导

（上　册）

主　编　朱弘毅

副主编　张福康　车荣强　苏海容
　　　　田　丽　陶明诚　诸建平

立 信 会 计 出 版 社

前　　言

《高等应用数学学习辅导》是《高等应用数学》(上海高校《高等应用数学》编写组编,立信会计出版社出版)配套的学习辅导书,分上、下两册。

高等数学是高职高专的一门基础课,对于刚跨进高等学府的大学生来说,该课程不同于中学数学,某些概念难以透彻理解、运算技巧不易掌握、理论性比中学强。针对这门课程的难度和特点,编者希望借助于学习辅导书做好难度的转化工作,这样,一方面有利于学生掌握知识,提高分析问题、解决问题的能力;另一方面高等学校的教师讲授的格调不同于中学教师,而且授课的进度较中学快,学习方法上学生正处于从中学类型向大学类型转变,在这种情况下,他们迫切需要一个辅导老师,帮助他们解决学习中的疑难问题,这也是我们编写这本书的目的。

《高等应用数学学习辅导》各章与相应的教材同步,每章由内容提要、例题分析、习题选解和测试题及其解答四节组成。例题分析和习题选解中的题目都是较典型的题目,测试题既考虑到知识的覆盖面,又注意到突出重点,有利于对该章学习的总结检查。上册提供高等数学模拟试题两套,下册提供线性代数、概率统计模拟试题各两套。为有利于学生自我检查,这些试题都给出详细的解题过程。

《高等应用数学学习辅导》由朱弘毅任主编、苏海容、张福康、车荣强、田丽、陶明诚上册任副主编。参加编写的有(按姓氏笔画为序)车荣强、田丽、朱弘毅、苏海容、陈定冲、张福康、赵斯泓、俞国胜、陶明诚、黄

丽萍、诸建平。本书的出版得到了立信会计出版社孙时平社长、蔡莉萍编辑的支持和帮助，在此表示衷心感谢。

限于编者的水平，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

朱弘毅于香歌丽园

2007年仲夏

目　　录

第一章　函数、极限与连续

第一节　内 容 提 要

1. 函数的定义

设在某一变化过程中有 x 和 y 两个变量，如果对于变量 x 在某个变化范围 D 内的每一个确定值，按照某种对应法则 f，变量 y 有一个唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是定义在数集 D 上的变量 x 的函数，并记作

$$y=f(x)$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，自变量 x 的取值范围 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域。

函数定义中应注意以下两点：

(1) 函数定义的两个要素是：定义域 D 和对应法则 f。

(2) 两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 只有当它们的定义域相同、对应法则也相同时，才能称为两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同。

2. 函数的几何特性

(1) 有界性。设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义，如果存在一个正数 M，使得对于 (a,b) 内的任意一个 x，总有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是有界的。

(2) 单调性。设函数在区间 (a,b) 上有定义，如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时有

$$f(x_1)<f(x_2)[\text{或 } f(x_1)>f(x_2)]$$

则称函数 $f(x)$在区间(a,b)上单调增加(或单调减少)。

(3) 奇、偶性。设函数 $f(x)$在对称区间$(-a,a)$上有定义,如果对于对称区间$(-a,a)$内的任意一点 x 有

$$f(-x)=-f(x)[\text{或 } f(-x)=f(x)]$$

则称 $f(x)$为奇函数(或偶函数)。

(4) 周期性。设函数 $f(x)$的定义域为 D,若存在一个正数 T,使得 D 内的任意一个 x(必须使 $x+T\in D$)有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$为周期函数,称正数 T 为函数 $f(x)$的周期。

3. 基本初等函数

常数函数 $y=c$

幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为实常数)

指数函数 $y=a^{x}$($a>0$,且 $a\neq 1$)

对数函数 $y=\log_{a}x$($a>0$,且 $a\neq 1$)

三角函数 $y=\sin x$ $\quad y=\cos x$

$$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\qquad y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}\qquad y=\mathrm{cse}\, x=\frac{1}{\sin x}$$

反三角函数 $y=\arcsin x$ $\quad -1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$

$y=\arccos x$ $\quad -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\pi$

$y=\arctan x$ $\quad -\infty<x<+\infty,-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$

$y=\mathrm{arc}\cot x$ $\quad -\infty<x<+\infty,0<y<\pi$

4. 复合函数

设 $y=f(u)$是 u 的函数,而 $u=\varphi(x)$是 x 的函数,如果 $u=\varphi(x)$的

值域或值域的一部分包含在 $f(u)$ 的定义域中，y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，则称 y 为 x 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

5. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算得到的且能用一个解析式表达的函数，称为初等函数。

6. 数列的极限

对于数列$\{f(n)\}$，如果当 $x\to\infty$ 时，对应值 $f(n)$ 无限接近于某一个常数 A，则称这个常数 A 为数列$\{f(n)\}$的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(n)\to A(n\to\infty\text{时})$$

存在极限 A 的数列$\{f(n)\}$称为收敛数列。

7. 函数的极限

(1) 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$的极限。设函数 $f(x)$在$|x|>a(a>0)$时有定义，如果当 $x\to\infty$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个常数 A，则称这个常数 A 为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty\text{时})$$

(2) 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$的极限。设函数 $f(x)$在 x_0 点的某个去心邻域内有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个常数 A，则称这个常数 A 为函数 $f(x)$在 x_0 点的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0 \text{ 时})$$

(3) 左、右极限的定义。设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一左邻域$(x_0-\delta,x_0)$内有定义，如果当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$，$x\to x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个常数 A，则称这个常数 A 为函数 $f(x)$在 x_0 的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一右邻域$(x_0, x_0+\delta)$内有定义，如果当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$，且 $x\to x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$无限接近于某一个常数 A，则称这个常数 A 为函数 $f(x)$在 x_0 点的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

定理　极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在的充要条件是：左、右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

8. 无穷小与无穷大

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$的极限为零，则称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小。

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$的绝对值$|f(x)|$无限增大，则称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \text{ 或 } \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

无穷小与无穷大的性质：

性质1　两个无穷小之和仍是无穷小。

推论　有限个无穷小之和仍是无穷小。

性质2　无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小。

性质3　极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是

$$f(x)=A+\alpha(x)$$

其中：$\alpha(x)$是当 $x\to x_0$ 时的无穷小。

性质4　无穷小与无穷大的关系是：

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$为无穷小$[f(x)\neq 0]$，则$\dfrac{1}{f(x)}$

为无穷大。

9. 极限的四则运算

定理　　**如果** $\lim f(x)=A$ **与** $\lim g(x)=B$ **都存在,则**

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]$**也存在,且**

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

(2) $\lim[kf(x)]$**也存在,且**

$$\lim[kf(x)]=kA=k\lim f(x)$$

(3) $\lim[f(x)g(x)]$**也存在,且**

$$\lim[f(x)g(x)]=AB=\lim f(x)\lim g(x)$$

(4) **当** $B\neq0$ **时**,$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$**也存在,且**

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

10. 两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

推广: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan kx}{x}=k$, $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

11. 连续函数的概念

设函数 $f(x)$**在** x_0 **点的某邻域内有定义,如果**

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$**在** $x=x_0$ **点连续**。

注意: **函数** $f(x)$**在** x_0 **点连续,应包含下列三个含义**:

(1) $f(x)$**在** x_0 **点有定义**。

（2）极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 存在。

（3）$A = f(x_0)$。

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点及其某左邻域 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点左连续。

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点及其某右邻域 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点右连续。

定理　函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充要条件是：函数 $f(x)$ 在 x_0 点左、右连续。

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续；如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。

定理　初等函数在其定义区间上是连续的。

12. 极限计算方法总结

（1）如果 $f(x)$ 为初等函数，由于初等函数在定义域上是连续的，所以当 x_0 为其定义域上的点时，

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

（2）应用极限的四则运算法则。

（3）对于 $\frac{0}{0}$ 型极限，应先分解因式或分子、分母有理化。

（4）应用公式。即

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} & \text{当 } n = m \\ 0 & \text{当 } n < m \\ \infty & \text{当 } n > m \end{cases}$$

(5) 对于$\infty-\infty$型极限,应先通分或分子、分母有理化。

(6) 利用两个重要极限。

(7) 利用无穷小的性质。

(8) 利用无穷大与无穷小的关系。

13. 闭区间上连续函数的性质

有界性定理 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$必定是$[a,b]$区间上的有界函数,即存在 $M>0$,使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对于$[a,b]$上的任意 x 均成立。

最大值、最小值定理 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则函数 $f(x)$在$[a,b]$上有最大值 M 和最小值 m,即在闭区间$[a,b]$上必存在两点 x_1 和 x_2,使得

$$f(x_1)=M,\ f(x_2)=m$$

介值定理 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,c 是介于最大值M 和最小值 m 之间的任一实数,则在闭区间$[a,b]$上至少存在一点 x_0,使得

$$f(x_0)=c$$

推论 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)$与 $f(b)$异号,则在开区间(a,b)内至少存在一点 x_0,使得

$$f(x_0)=0$$

第二节 例 题 分 析

【例 1】 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-4}$; (2) $y=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$。

分析：对于用解析式表示的函数来说，函数的定义域是指：使解析式有意义的那些实数的全体。对于第(1)题，要求被开方数 $x-1\geqslant 0$，分母 $x-4\neq 0$，同时满足这两个要求的数集。对于第(2)题，要求被开方数 $16-x^2\geqslant 0$，分母 $\ln x\neq 0$，且对数的真数 $x>0$，同时满足这三个要求的数集。

解：(1) $\begin{cases} x-1\geqslant 0 \\ x-4\neq 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x\geqslant 1 \\ x\neq 4 \end{cases}$

所以定义域为 $1\leqslant x<4$ 或 $x>4$，用区间表示为 $[1,4)\cup(4,+\infty)$。

(2) $\begin{cases} 16-x^2\geqslant 0 \\ \ln x\neq 0 \\ x>0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -4\leqslant x\leqslant 4 \\ x\neq 1 \\ x>0 \end{cases}$

所以定义域为 $0<x<1$ 或 $1<x\leqslant 4$，用区间表示为 $(0,1)\cup(1,4]$。

【例 2】 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，求 $f(x^2)$ 的定义域。

分析：因为 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，即 $0<x<1$，所以对于函数 $f(x^2)$，必须满足 $0<x^2<1$，解此不等式得 $f(x^2)$ 的定义域。

解：$f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，所以对于 $f(x^2)$，必须满足 $0<x^2<1$，得 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$

所以 $f(x^2)$ 的定义域为 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$，用区间表示为：

$$(-1,0)\cup(0,1)$$

【例 3】 设 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{x}{2x-1}$，求 $f(x)$。

分析：解此题一般采用换元法：令 $\dfrac{1}{x}-1=t$，解出 $x=\dfrac{1}{1+t}$，然后将原式中的 x 都换成 $\dfrac{1}{1+t}$。

解：令 $\dfrac{1}{x}-1=t$，得 $x=\dfrac{1}{1+t}$，原式化为

$$f(t)=\frac{\dfrac{1}{1+t}}{\dfrac{2}{1+t}-1}=\frac{1}{2-(1+t)}=\frac{1}{1-t}$$

最后将上式中的 t 换成 x 得：$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$。

【例 4】 判别下列函数的奇、偶性：

（1）$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$；　　　　（2）$g(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$。

分析：根据奇、偶函数的定义来判定。

如果 $f(-x)=-f(x)$[**或** $f(-x)=f(x)$]，**则** $f(x)$ **为奇函数**（**或偶函数**）。

解：（1）**因为** $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{\dfrac{1}{e^x}-1}{\dfrac{1}{e^x}+1}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

$$=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ **为奇函数**

（2）**因为** $g(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$

$$=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=-g(x)$$

所以 $g(x)$ **为奇函数**

【例 5】 求 $y=\dfrac{e^x}{2+e^x}$ **的反函数。**

分析：据反函数的定义，先从原式 $y=f(x)$ **中解出** x，**得到用** y **表示** x **的表达式** $x=\tilde{f}(y)$，**于是** $y=\tilde{f}(x)$ **为所求的反函数。**

解：由 $y=\dfrac{e^x}{2+e^x}$ **得** $2y+ye^x=e^x$，

即 $e^x=\dfrac{2y}{1-y}$

所以 $x=\ln \dfrac{2y}{1-y}$，

于是 $y=\ln \dfrac{2x}{1-x}$ 为所求的反函数。

【例 6】 设 $f(x)=2+\ln(x+1)$，求 $f(x)$ 的反函数 $\widetilde{f}(x)$，并求 $\widetilde{f}(3)$。

分析：据反函数的定义，先从 $y=2+\ln(x+1)$ 中解出 x，然后求出反函数 $\widetilde{f}(x)$，最后求 $\widetilde{f}(3)$。

解：先从 $y=2+\ln(x+1)$ 解出 x：

$x+1=e^{y-2}$

得 $x=-1+e^{y-2}$

所以反函数为 $\widetilde{f}(x)=-1+e^{x-2}$，$\widetilde{f}(3)=-1+e$。

【例 7】 指出下列初等函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\sqrt{1+\ln x}$；　　(2) $y=\ln\cos\dfrac{x}{2}$；

(3) $y=e^{-\sin^2 x}$。

分析：所谓简单函数是指基本初等函数或由基本初等函数经有限次四则运算得到的函数，我们从函数的最后一步运算开始进行分析。对于第(1)题，最后的运算是幂运算 $y=\sqrt{u}$，而 $u=1+\ln x$；对于第(2)题，最后运算是对数运算 $y=\ln u$，$u=\cos\dfrac{x}{2}$，而 $u=\cos\dfrac{x}{2}$ 不是简单函数，它的最后运算是余弦运算 $u=\cos v$，$v=\dfrac{x}{2}$；对于第(3)题，类似地进行分析。

解：(1) $y=\sqrt{u}$，$u=1+\ln x$

(2) $y=\ln u$，$u=\cos v$，$v=\dfrac{1}{2}x$

(3) $y=e^{u}$，$u=-v^2$，$v=\sin x$

【例 8】 求下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+5}{4x^2+x-6}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+5}{(x^2-1)(2x+5)}$。

分析：本例属$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限，据第一章第五节公式$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$**求解。**

解：（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+5}{4x^2+x-6}=\dfrac{3}{4}$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+5}{(x^2-1)(2x+5)}=0$

【例9】　求下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$。

分析：由于分母的极限等于零，故不能用极限四则运算的公式，考虑到分子的极限也是零，所以本例属$\dfrac{0}{0}$型极限，一般采用先分解因式，然后消去极限为零的因子求解。

解：（1）$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x-2}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

（2）$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x-1)(x+3)}{x(x+1)(x+3)}$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x-1}{x(x+1)}$$

$$=-\frac{2}{3}$$

【例10】　求下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-5x})$。

分析：对于第（1）题，本题属$\dfrac{0}{0}$型极限，由于有根式，故不能用[例9]的方法求解，由于分子为无理式，可以进行有理化；对于第（2）题，本题属$\infty-\infty$型极限，不能通分，可用有理化的方法。

解：（1）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{1}{3}$$

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-5x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-5x})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-5x})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-5x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+5x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-5x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+5}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}}=\frac{5}{2}$$

【例 11】 求下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 3x}{x+\sin 5x}$。

分析：这几个例子都需要利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ **及** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan kx}{x}=k$ **来求解。**

解：（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\sin 4x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}}=\dfrac{5}{4}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\tan 5x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x}}=\dfrac{3}{5}$