前言

有限单元法(Finite Element Method，简称FEM)经历了50多年的发展，已经相当成熟并被广泛应用于各个不同学科和工程领域。有限单元法是工程科学的重要工具，是分析和研究各类复杂工程问题的十分有效的手段。在早期，有限单元法还一直限于研究生的课程，且在大多数情况下，往往要由从事有限元应用的研究者或学生们自己编写程序来完成有关的有限单元法分析任务，从而限制了有限单元法应用的推广。因此，在早期的一些有限单元法的著作和教材中，对于有限单元法的程序给予了更多的关注和讲述，而关于有限单元法的一些基础知识的讲述则较为简略。

近年来，随着计算机技术的飞速发展和应用的普及，已有多种商品化、功能强大、内容丰富的有限元分析专用软件包可供选用，操作方便的图形界面，多功能的前后处理技术，为有限单元法的广泛应用创造了十分方便的平台。对于一般工程应用和工科院校学生的学习来说，已完全无须自己动手编写程序，可以把精力更多地用在对有限单元法基础知识的学习上。

如今，有限单元法已成为许多工科院校本科生的一门必修课程。在工科院校本科学生的学习中，应当以有限单元法的基础知识(概念、原理和方法)为主，辅以有限单元法分析软件包的应用，作为有限单元法课程数学的基本内容。

鉴于上述原因，本教材以大学本科生的教学要求为依据，并兼顾到研究生学习有关课程的需要而编写。

本教材的编写是集编者多年来在研究生、本科生的教学实践经验以及从事有限单元法的工程应用研究的基础上完成的。在编写过程中，编者不拘泥于数学推导上的严谨和文字定义上的规范，更侧重于对有限单元法的基本概念、基本原理和基本方法的系统阐述，力求通过通俗易懂的讲述，使初学者对有限单元法有一个系统、完整、正确的概念，全面掌握有限单元法的基本原理和方法。此外，配合各章节的讲授，安排上机操作实践(应用 Ansys 或其他软件包)，使学生掌握有限单元法的应用，逐步具备用有限单元法分析解答工程问题的能力。

全书共分11章，以弹性力学有限单元法为主，兼顾杆系结构的分析。其中，形函数及等参数单元的内容是有限单元法的基础知识中最重要的部分之一，然而，现有的教科书中多未能涉及或仅十分简略地提及，致使学生对此知之甚少，即使是在实际的有限单元法分析中多有应用，但仍是不知其故。本书专门对其做了比较系统的阐述，不仅使学生对有限单元法方法有了更深一步的了解，也更有利于进一步深入学习有限单元法，在以后从事有限单元法应用研究中也将会发挥重要的作用。此外，在大型线性方程组求解方法一章中，包括了方程求解、一维存储、带宽优化等内容，可使学生对有关有限单元法的具体求解方法及有关软件的程序处理技术有所了解，学生虽无须再去做无意义的编程工作，但了解这些知识，更有利于其加深对有限单元法的理解和认识。第8章对板弯曲问题予以初步讲述。第9章则对工程中大量遇到的非线

性问题予以简要介绍。第10章则扼要介绍了动力问题有限单元法的基本概念。第11章介绍了有限单元法在几个重大工程问题研究中的应用实例。上述几章在教学实践中可视具体情况而取舍。

刘怀恒教授担任本教材主编，并执笔完成了本书大部分章节的编写；任建喜教授任副主编，负责组织和审核本教材的编写及出版工作，并执笔完成了第11章内容的编写；熊光红编写第2章杆系结构单元；陈方方编写第10章动力问题有限单元法。此外，全书各章的例题及习题均由熊光红、陈方方编写并进行了计算验证。

最后还必须强调指出，有限单元法课程的教学必须把课堂教学同上机实践很好地结合起来，才能达到良好的教学效果。建议课堂讲授与上机练习的学时安排以2∶1～3∶1为宜。只有保证足够上机实践时间，才能使学生能初步掌握有关软件的应用。

本教材初稿完成于2005年夏。经过2005—2007年两年的教学试用，并进一步修改、调整和补充，现作为大学本科土木类专业学生的推荐教材正式出版，并也可兼供研究生学习参考。

作为一种教学的探索和试验，本教材在编写思路、内容取舍以及章节安排上略有别于已有的教材，因此，难免有考虑不周、处理不当甚至错误之处，恳切期望阅读或应用本教材的读者及教育界同仁给予批评和指正。

编　者

2007年5月

目 录

第1章 绪 论

1.1 有限单元法的发展简述

许多工程物理问题（例如固体力学、流体力学、动力学、温度场、电磁场等）由于其控制微分方程在数学求解上的困难，长期以来只能求解一些十分简单的、严格理想化的情况。而更多较复杂的工程实际问题，由于求解困难而不得不依靠实验来获得对工程有用的信息。电子计算机的发展为科学运算提供了强大的物质基础。基于数字计算机的应用和离散原理，产生并发展了一系列求解复杂的数学物理问题的数值计算方法。例如，有限单元法，边界单元法、流形元法、快速拉格朗日法等。它们的共同特点是：通过离散化的处理把对基本控制方程的求解转化为一组高阶的线性代数方程，并利用数字电子计算机来完成求解。把求解在整个域内光滑连续的未知函数，转化为求解在域内有限个给定点处的待求函数的值。这种基于离散化的数值计算方法可以求解十分复杂的工程问题（复杂的求解域、复杂的边界条件、复杂的介质物理特性）并由电子计算机实现快速、高效的运算。

在上述各种方法中，有限单元法是其中最具代表性、最为成熟、也是目前应用最广泛的方法。目前，有限单元法已成为结构力学、固体力学的一种最有效的分析手段，并且在流体力学、动力学、热学、电磁学等诸多学科中得到广泛应用，涉及广泛的工程领域，成为工程设计和研究人员、工程技术人员强有力的工具。

有限单元法的基本思想源于20世纪40年代中后期至50年代初发展的用于结构分析的“矩阵分析法”。对于杆系结构，通常是把它视为由许多单一的构件在节点处相互连接，并通过节点相互传递力和位移。以节点力作为未知量在结构力学中我们称之为“力法”，以节点位移作为未知量即称为“位移法”，或者把一部分节点力和另一部节点的位移一起作为未知量即“混合法”。把待求的各节点位移和内力之间的关系用代数方程组表示出来，求解该方程组即可解得未知量，进而求得各构件的内力，这就是传统结构力学的方法。各节点的未知量以及方程组还可以用矩阵的形式十分方便地表示。通过相应的矩阵运算完成问题的求解，这就是所谓“结构矩阵分析法”。矩阵分析的方法可以有效地应用高速数字计算机来求解，从而解决了对于大型、复杂的结构手工计算难于完成的困难。利用计算机求解可以顺利、高效地求解未知量多达数百，数千甚至更多的大型方程组。所谓的“计算结构力学”正是由这种“矩阵分析法”发展起来的。

把上述结构分析的方法和思想进一步推广到连续体的力学分析就逐渐形成了“有限单元法”。这一术语是克劳夫（Clough R. W.）在1960年首先引用的，最初被用于对飞机结构的分析。在此之前，1956年克劳夫和特纳（Turner M. J.）、马丁（Martin H. C.）和托普（Topp L. C.）就曾把位移法应用到平面应力问题的求解。有限单元法这一术语为此后从事这一方面研

究的学者们所认同，并成为这一方法通用的(标准的)专业术语。

自20世纪50年代中期至70年代，有限单元法已得到相当的发展并在许多工程领域中得到应用。然而，有限单元法基本理论(数学基础)的研究则滞后于有限单元法的方法及应用实践的研究。大约在1960—1970年的10年间，国内外都有一批学者对有限单元法的数学基础进行了深入的研究，完成了基于变分原理的有限单元法基础理论及公式推导，解决了线性问题有限单元法的数学原理。

然而，有限单元法的基本原理及公式并非一定要建立在变分原理的基础上，在固体力学领域内通过能量原理、加权余量法以及迦辽金方法也可以顺利完成有限单元法的公式推导。

线性问题有限单元法数学基础的研究及理论上的完善，有力地促进了有限单元法的迅速发展和更广泛的应用。自20世纪50年代中期至80年代初，有限单元法已经发展成为相当成熟的，在广泛的科学和工程领域得到发展和应用的数值分析方法。其求解的问题包括：静力和动力问题、线性及多种非线性问题，并从力学问题到多种位势问题(电磁场、热传导及温度场、渗流场等)。

20世纪80年代以后，随着个人计算机(即PC台式机及便携机)的问世及技术的不断发展，更有力地推动了有限单元法的发展、应用和普及。促进了有限单元法在诸多工程领域中得到更广泛的应用。如今，在许多重大工程设计和工程问题的研究中，有限单元法已经成为不可缺少的工具。在有关专业的大学教学计划中它也成为一门必修的课程。有限单元法对即将走向社会的大学生们来说，更是应当具备的重要基本技能。

1.2 有限单元法的基本概念

有限单元法是当今应用最广泛的数值分析方法，其原因就在于它具有极强的适应性(对复杂的边界条件、复杂求解对象的几何形状、复杂的材料性态而言)，通用性(对各类力学问题及位势问题在计算格式及软件方面而言)、以及良好的计算精度和计算效率。适应性和通用性是由其物理概念和数学基础所赋予的；而计算精度及高效率，则得益于个人计算机技术的迅速发展，以及诸多功能强大的商品化软件为有限单元法的应用提供了支持和保障。其物理概念直观易懂，不需使用者必须具备较深的数学知识，这也是许多工程科技人员乐于接受的重要因素。

就物理概念而言，有限单元法是传统结构力学方法在连续体的推广。正如本章前面已提到的，有限单元法是借用结构力学中把一个结构整体视为由若干个基本构件组合成的这一概念。这些基本构件在此我们称它为“单元”。有限单元法将一个连续体划分成有限个微小的单元体(例如，对平面问题可采用最简单的三角形单元)，并假定各单元体之间仅在节点处相互传递节点力和位移，从而把一个具有无限个自由度的连续体简化为有限个自由度(节点处)的近似的物理模型，进而可以运用类似于结构分析的方法求解。我们用图1-1来表示有限单元法与杆系结构分析之间的类似之处。图1-1(a)为一最简单的杆系结构——由5个杆件(单元)构成的简单桁架。它们只在节点处相互连接。取出任一个构件来考虑，则其受力或位移状态可见于单元图中。图1-1(b)则为一个连续体及其离散化所用的三角形单元。尽管二者在结构及单元的几何形状上有较大差异，两种情况则都是以某种单元体的组成来构成的，在物理意义上它们是近似的。但是，要特别指出的是，对于杆系结构按照图1-1(a)的计算模型建立的

节点力和位移的关系及其求解结果同结构力学中的方法是完全一致的,因而是精确的;而把连续体离散化为图 1-1(b),以三角形单元的组合来表征原先的连续体则是近似地。从物理模型上也可以直观地看出,三角单元划分得愈细小,它将愈逼近于真实的连续体,其求解也必将收敛于精确解。

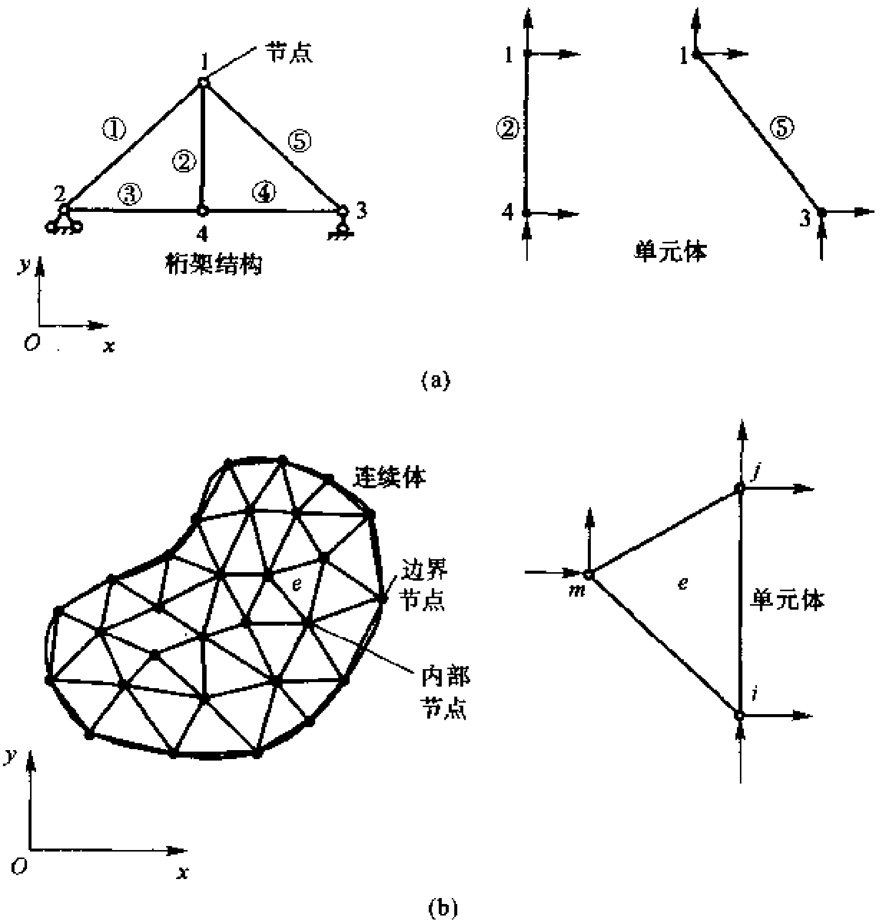


图 1-1 结构及连续体的离散化

从数学概念上来表述,有限单元法是求解偏微分方程边值问题的一种近似解法(或叫数值解)。在经典连续体力学问题以及在多种位势问题中,通常都由一组包含未知场函数的偏微分方程和相应的边界条件来表述。有限单元法就是通过离散化的处理,从变分原理和分区插值,把这类二次泛函的极值问题转化为一组多元线性代数方程组来求解。把求解在整个求解域内连续的未知场函数转化为求解仅在有限个点(离散网格的节点)处的未知函数值。而未知函数的连续、光滑性要求仅限在一个单元体内,即所谓分片光滑的函数。有关有限单元法的数学原理及其相应公式建立的进一步细节,将会在本书后面的各章节中逐步予以介绍和讨论。

作为一门本科生的必修或选修课程,有限单元法教学要达到的基本要求是:在系统掌握有限单元法的基本原理和方法的基础上,能够较顺利地应用有限单元法求解一般的工程问题,并且为以后更深入地学习数值分析方法及有限单元法的高级问题作好基础准备。

本课程主要讲述弹性力学问题有限单元法,作为入门的引导,第 2 章将对杆系结构的有限单元法分析予以简略的综述。学习本课程要求具备弹性力学、线性代数以及矩阵运算方面的基础知识,建议在学习本课程前应对上述课程中的基础知识予以复习和回顾。

1.3 有限单元法中矩阵知识回顾

有限单元法分析过程及有关公式的推导，用矩阵代数表述是非常方便和容易理解的。并且也便于电子计算机程序的编写。为了各章学习的方便，在此把有限单元法中最常遇到的关于矩阵运算的简单知识予以回顾。

1. 矩阵的表示方法

在本书中对矩阵的表示方法作如下约定：

(1) m 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$。行数和列数相同的矩阵称为方阵。

(2) 列阵又称列向量或矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为 ——$\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times 1}$。只有一列的矩阵称为列阵，即 $\boldsymbol{A}$ 是一个 m 行 1 列的矩阵。在力学中总是把向量用列阵表示。因此，列阵又常被称为列向量或矢量。

(3) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行、第 j 列的元素，以 A_{ij} 表示。其中第一个下标 i 表示该元素所在的行，下标 j 表示所在的列。

(4) 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的行和列依次互换，即把行改变成列、把列变成行形成一个新的矩阵，则称它为原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，表示为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。对于一个 $m\times n$ 阶的矩阵，转置之后则变成一个 $n\times m$ 阶的矩阵。例如

设
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix},\quad 则\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 6\\ 3 & 7\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\\ 5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix},\quad 则\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & a & 5\\ 2 & b & 6\\ 3 & c & 7\\ 4 & d & 8\end{bmatrix}$$

(5) 一个 $m\times m$ 阶的方阵 $\boldsymbol{A}$，如果其元素 $A_{ij}=A_{ji}$，则称此方阵为对称方阵。

(6) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的各元素 $A_{ii}=1$，其他元素 $A_{ij}=0(i\neq j)$，则称此方阵为单位矩阵，通常用一专用符号 $\boldsymbol{I}$ 表示。

2. 矩阵的基本运算规则

(1) 矩阵的加法与减法。

设有矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}$ 相加，则

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}+\boldsymbol{B}_{m\times n}=\boldsymbol{C}_{m\times n}$$

且有
$$A_{ij}+B_{ij}=C_{ij}$$

矩阵相加必须是具有相同阶的矩阵，即 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是有相同行列数的 $m\times n$ 阶的。此外，矩阵加法符合交换律，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$$

矩阵减法可记为

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}-\boldsymbol{B}_{m\times n}=\boldsymbol{D}_{m\times n}$$

且有
$$A_{ij}-B_{ij}=D_{ij}$$

上述关于矩阵加法的规律也同样适用于矩阵减法。

(2) 矩阵乘法。

两矩阵相乘，例如

$$A_{m\times n}\times B_{n\times l}=C_{m\times l}$$

其中

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}$$

我们称上面的乘法式为 B 左乘以 A。它是由矩阵 A 的第 i 行各列的元素与矩阵 B 第 j 列的各行元素一对一地相乘并叠加而得到 C_{ij}。按照这一规则要求，矩阵 B 的行数必须同矩阵 A 的列数相同，否则不能实现矩阵相乘。所得乘积矩阵 C，其行数同于 A，其列数同于 B。

由上述可知，矩阵乘法是不能适用交换律的。例如上面的例子：$A_{m\times n}\times B_{n\times l}$ 因为矩阵 B 的行数和矩阵 A 的列数同为 n，故 $A\times B$ 是可以的，若改为 $B_{n\times l}\times A_{m\times n}$ 由于 $l\neq m$，故 B 乘 A 的积是不存在的。即使两个方阵相乘，例如有矩阵 $A_{m\times m}\times B_{m\times m}$，这时尽管 $A\times B$ 和 $B\times A$ 都是可以的，其积都是存在的，但二者的结果则是完全不同的。也就是说，这时，仍有 $A\times B\neq B\times A$。例如，若有

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 7\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 9 & 8\end{bmatrix}$$

则

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 9 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & 20\\ 78 & 76\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 9 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23 & 34\\ 49 & 74\end{bmatrix}$$

因此，遇到矩阵相乘时，必须十分注意其顺序，不能随意倒换。

(3) 逆矩阵。

设有两方阵 $A_{m\times m}B_{m\times m}=I_{m\times m}$，$I_{m\times m}$ 为一个单位矩阵。则称 B 为 A 的逆矩阵，记为 $B=A^{-1}$，因此有

$$AA^{-1}=I$$

应当注意，只有方阵才存在逆矩阵，但并非所有方阵都存在逆矩阵。还要指出，在前面我们强调矩阵乘法是不能适用交换律的，但逆矩阵是个例外。对于逆矩阵则有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

(4) 矩阵乘积的转置。

在讲述有限单元法中，我们会经常遇到这种情况。矩阵乘积的转置公式如下

$$(ABC\cdots MN)^{T}=N^{T}M^{T}\cdots C^{T}B^{T}A^{T}$$

(5) 矩阵的微分与积分。

矩阵的微分即是对矩阵各元素分别进行微分运算，例如，若

$$\frac{\partial}{\partial s}A_{m\times n}=B_{m\times n}$$

则 B 中任一元素，$B_{ij}=\dfrac{\partial A_{ij}}{\partial s}$。

同理，矩阵的积分也是对被积分矩阵中的各元素分别进行积分，即可得到矩阵的积分。例如

$$\int A_{m\times n}\mathrm{d}s=C_{m\times n}$$

其中，$C_{ij}=\int A_{ij}\,\mathrm{d}s$。

1.4 弹性力学基本方程

弹性力学问题有限单元法基本公式的推导及基本方程的建立，都是在经典弹性力学的基本概念及基本方程的基础上的。在此把有关基本方程予以回顾，并采用矩阵的方法给予表述。这些用矩阵表述的基本概念及公式，在以后各章中将会多次重复的用到。

1. 位移、应力、应变

对于一个处于三维空间中的弹性体，在外力（包括面力及体积力）的作用下，体内的任一点将产生位移。在不计转动的情况下，任一点的位移可用其沿坐标轴 x,y,z 方向的位移分量来表示，分别记为 u,v,w，通常用一个列阵来表示。可写成

$$\boldsymbol{u}=[u\quad v\quad w]^{\mathrm{T}} \tag{1-1}$$

称它为位移列阵或位移矢量。一般情况下，u,v,w 均为坐标 x,y,z 的函数。即 $u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$，$w=w(x,y,z)$。

在外力作用下，弹性体内任一点将产生相应的应力，用弹性体内取出的单元体（边长为单位长度的正六面体）来表示一点的应力状态，如图 1-2 所示，共有 9 个应力分量。根据剪力互等定律则有：$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$，$\sigma_{yz}=\sigma_{zy}$，$\sigma_{zx}=\sigma_{xz}$，因此弹性体内任一点只有 6 个独立的应力分量。用矩阵形式表示，则应力列阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_x\quad \sigma_y\quad \sigma_z\quad \sigma_{xy}\quad \sigma_{yz}\quad \sigma_{zx}]^{\mathrm{T}} \tag{1-2}$$

式中，$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 称为正应力，$\sigma_{xy},\sigma_{yz},\sigma_{zx}$ 称为剪应力。

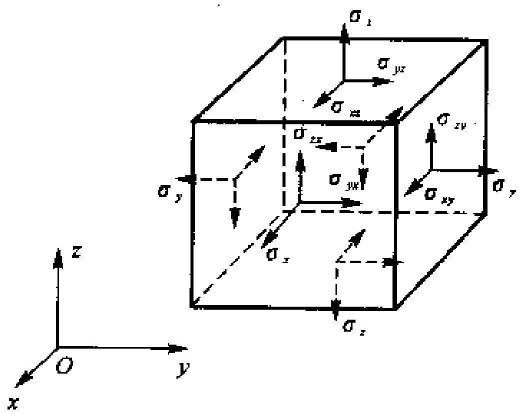


图 1-2　弹性体应力状态

与应力及位移相对应，弹性体内任意一点的应变状态可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_x\quad \varepsilon_y\quad \varepsilon_z\quad \varepsilon_{xy}\quad \varepsilon_{yz}\quad \varepsilon_{zx}]^{\mathrm{T}} \tag{1-3}$$

式中，$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$ 为正应变或线应变，$\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx}$ 为剪应变。

在外力作用下处于平衡状态的弹性体，其体内任一点的位移、应力及应变存在着内在的联系和固有的规律，这些关系和规律我们可统称为弹性力学的基本方程。

2. 几何方程（应变-位移关系）

由弹性力学知识已知，在小变形的假定条件下，位移和应变间的关系，符合如下的线性微

分关系：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

矩阵表达式为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

或简写为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \tag{1-4}$$

式中

$$\boldsymbol{L}_{6\times 3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

3. *物理方程(应力-应变关系)*

对于匀质各向同性的线弹性材料，其应力-应变关系符合广义的胡克定律，其表达式可写为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{G}\sigma_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{G}\sigma_{zx} \end{aligned} \tag{1-5a}$$

式中，$G = E/2(1+\mu)$，E，G 分别为材料的弹性模量和剪切模量。由式(1-5a)可以解出各应力分量的表达式，即物理方程的另一种形式，为

$$\sigma_x = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_z\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_z\right)$$

$$\sigma_z = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_y\right)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\varepsilon_{yz}, \quad \sigma_{zx} = \frac{E}{2(1+\mu)}\varepsilon_{zx}$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1-5b}$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵，其具体形式为

$$\boldsymbol{D}_{6\times6}=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \text{(对称)} & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix} \tag{1-6}$$

式(1-5a)及(1-5b)是物理方程的两种表示形式。弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$ 完全由材料的弹性参数所决定，表征材料的弹性特征，故被称为"弹性矩阵"。在有限单元法中，通常是以位移作为基本未知量，首先解得离散化网格中各节点的位移，继而由位移求单元应变，再由单元应变求得单元应力。因此，上面的式(1-5b)更被经常采用。

本节所述各基本方程，在后续各章节中经常要用到，因此，建议读者充分理解和牢记。

4. 边界条件

弹性力学问题的边界条件可分为位移边界和应力边界两种情况。位移边界是指在全部或部分边界上的位移为已知，即

$$u=\bar{u}(x,y,z),\qquad v=\bar{v}(x,y,z),\qquad w=\bar{w}(x,y,z) \tag{1-7}$$

式中，$\bar{u}(x,y,z)$，$\bar{v}(x,y,z)$，$\bar{w}(x,y,z)$，是已知的边界位移，分别是坐标 x,y,z 的已知函数。最简单的情况为 $u=\bar{u}$，$v=\bar{v}$，$w=\bar{w}$ 即已知位移为常量。

应力边界是指在全部或部分边界上，各边界点上的应力分量与相应的外力(面力)分量之间的平衡关系。因此，应力边界条件也可以称为荷载条件，按照边界上的平衡条件，则有

$$\left.\begin{aligned}l(\sigma_x)+m(\sigma_{yx})_s+n(\sigma_{zx})_s&=\bar{X}\\ m(\sigma_y)+n(\sigma_{zy})_s+l(\sigma_{xy})_s&=\bar{Y}\\ n(\sigma_z)+l(\sigma_{xz})_s+m(\sigma_{yz})_s&=\bar{Z}\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

式(1-8)就是以应力表示的应力边界条件。若把式(1-5b)的物理方程及式(1-4)的几何方程代入式(1-8)就可以得到以位移表示应力边界条件。式中，$\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}$ 为已知的分布面力。l，m，n 分别为应力作用面外法线与对应坐标轴方向上的方向余弦。

5. 基本平衡方程

在外力作用下处于平衡状态的弹性体，在物体内任一点 P 处，取出一个其长×宽×高为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的微小六面体，考察其微元体的平衡条件即可得到如下的以应力表示的平衡微分方程或叫基本平衡方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}+X&=0\\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+Y&=0\\ \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+Z&=0\end{aligned}\right\} \tag{1-9a}$$

利用式(1-5b)的物理方程及式(1-4)的几何方程代入式(1-9a)即可得到以位移表示的平衡微方程，经整理后可写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\nabla^2u\right)+X=0\\\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+\nabla^2v\right)+Y=0\\\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}+\nabla^2w\right)+Z=0\end{aligned}\right\}\tag{1-9b}$$

式中，$\varepsilon=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$为体积应变；$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$为拉普拉斯微分算子。

方程(1-9a)常被称为纳维尔(Navier)方程，方程(1-9b)则常被称为拉梅(Lame)方程。

弹性力学问题的求解通常是在满足给定的应力边界条件及位移边界条件下求解基本微方程(1-9a)或(1-9b)得到应力或位移的连续解析解。许多工程实际问题，由于求解对象的几何形状、材料性态，或者边界条件比较复杂而难以得到解答。有限单元法则是通过位移变分或能量原理，把问题的基本方程及应力边界条件(荷载条件)转化为等价的代数方程组来求解，从而避免了求解偏微分方程组的困难。

思考及练习题

1. 什么是有限单元法？
2. 试说明弹性力学中应力、应变、位移三者之间的关系。
3. 弹性力学问题中有哪几类位移边界条件？
4. 弹性力学中以应力求解和以位移求解两类基本解法各有何特点，你能写出它们的基本方程吗？

第 2 章　杆系结构有限单元法

2.1　概述

结构力学课程的主要研究对象是由若干杆件构成的结构，如桁架、刚架、网架等结构。此类由杆件（轴力杆、刚架、梁等）组成的结构通常称为杆系结构。杆系结构是一类常见且应用广泛的结构。

杆系结构的有限单元法分析方法源于结构矩阵分析并有更进一步的发展，其分析步骤统一、规范，便于编制分析程序。对于板、壳以及三维弹性体，一旦单元的力学特性确定后，全部分析过程与杆系结构分析是类似的，因此，对杆系结构的有限单元法分析过程的学习也是学习弹性连续介质有限单元法分析的引导。

杆系结构的矩阵分析方法采用的是结构力学中的位移分析方法，其主要力学原理仍然是静力平衡和位移协调，并借助于矩阵这一数学工具使得全部计算过程变得统一、规范，便于编制通用程序。

一、杆系结构有限单元法求解的基本过程及主要任务

1. 结构离散化

在力学分析之前，先将给定结构以恰当的方式划分成若干个杆件单元，用杆件的轴线表示这一单元，各杆件单元的交点称为节点，按照自然数的顺序对所有单元和节点进行编号。

2. 单元分析

每个杆件单元都是在其两端的连接点处断开，从结构中取出的一个分离体。作用在单元两端节点的结构内力称为单元节点力，而单元两端节点的位移称为单元节点位移。单元分析的中心任务就是建立单元节点力和单元节点位移之间的关系表达式。

3. 整体分析

整体分析是将离散化分析所获得的各单元节点力和节点位移之间的关系，按照静力平衡与变形协调条件组集在一起，形成整个结构节点力和节点位移之间的关系表达式，即以整个结构中各节点的位移分量作为基本未知量的总体刚度方程。求解此方程组即得到各节点的位移，进而可求得各单元的内力。

二、杆系结构有限元分析基本假定

本章中所研究的杆系结构均为线弹性杆件结构，其满足以下假定：

1. 小变形假定

假定在荷载或其他外因作用下，结构内各点位移都远小于结构原来的尺寸，在建立平衡方

程时，可不考虑结构的几何尺寸改变，按照未发生位移前的结构几何形状建立力平衡关系。同时，还假定结构内各点的应变和转角也是很小的，在研究结构变形时，可以忽略应变和转角的二次幂及乘积项。

2. 胡克定律

各杆件单元的应力-应变关系服从胡克定律，即在外界因素作用下，单元内各点的应力和应变保持线性关系。

3. 叠加原理

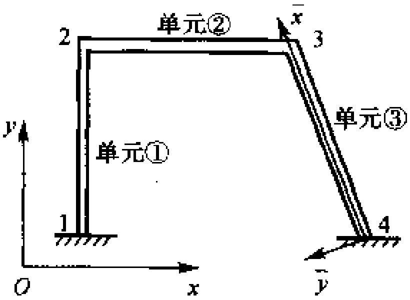
对线性弹性结构而言，叠加原理成立，即若干组荷载同时作用产生的效果等于各组荷载分别作用产生的效果之和。

2.2　杆系结构的离散化及单元类型

一、杆系结构的离散化

如图 2-1 中给出的平面刚架结构和平面桁架结构。以每一自然杆件为一单元，单元节点为各杆件的连接点，这样就可将结构划分为有限个单元组成的集合体。分析时对单元和节点进行编号，编号既不能重复也不能遗漏，单元编号外加小圆圈以示和节点编号相区别。

一般情况下，划分单元的节点除杆件的连接点外，截面的突变点、结构的支撑点或自由端也应作为节点，有时为了计算上的需要，杆件上的某些特殊点，如集中荷载作用点等也被认为是节点（桁架除外，否则桁架结构将变为瞬变体系）。



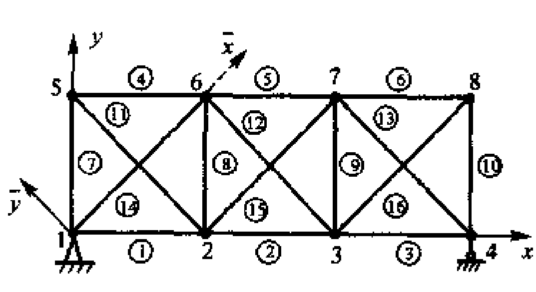


图 2-1　平面刚架与平面桁架结构的离散化示意图
(a) 平面刚架结构；(b) 平面桁架结构

在离散化过程中，单元和节点的编码分别被称做单元码和节点码，它们都是从 1 开始按照自然数的顺序编制到最后一个单元或节点的。单元码和节点码的编号原则上是任意的，对同一结构可以有不同的编号方式，不会影响计算结果。但编号顺序对计算时占用内存的多少及计算所花费的时间产生影响，所以在编码时应尽可能使得相邻节点编号的差值小一些。应当指出的是，不同的单元及节点编码顺序不会影响对整个结构的分析计算的最终结果。

二、杆件单元的类型和节点力与节点位移

根据结构类型的划分，杆系结构可分为连续梁、平面桁架、格栅、空间桁架及网架和空间刚

架等几种基本类型。对于其中任何一种类型，有限单元法分析的过程都是相同的，区别仅在于单元刚度矩阵的不同。这里着重说明这几类杆件单元的受力及节点位移情况。

本节所分析的杆件均假定为等截面直杆或近似的等截面直杆，单元弹性系数均为常量，所有外荷载仅仅作用在节点上。

1. 连续梁

图 2-2 所示为一连续梁，xOy 平面为梁的一个纵向对称面。$Oxyz$ 坐标系为取定的右手直角坐标系。所有荷载均为作用于 xOy 平面内的荷载，外力矩按右手螺旋法则确定正负号，所有外力矩均为绕 z 轴的矩。这时，xOy 面即为梁的弯曲平面。

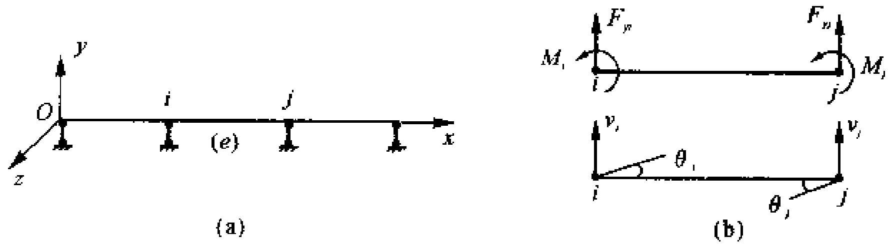


图 2-2　连续梁结构及节点位移、节点荷载图

(a) 结构(局部) 图；(b) 节点内力及位移分量

把给定的连续梁划分为若干个梁单元，所有支承点均取为节点。

连续梁结构的内力分析通常不考虑杆件的轴力。因此，任何一个不受支座约束的节点，其位移自由度为 2，即一个沿 y 方向的线位移(挠度)、一个绕 z 轴的角位移(截面转角)，所以，任一节点 i 的位移 $\boldsymbol{\delta}_i$ 可表示为

$$\boldsymbol{\delta}_i = [v_i \quad \theta_i]^{\mathrm{T}} \tag{2-1}$$

式中，v_i 为 y 方向的线位移；θ_i 为绕 z 轴的角位移。所有位移分量均以与坐标的正方向相同为正。角位移按右手螺旋法则与坐标轴正方向相同者为正。

同理，任一节点所承受的荷载情况也仅为沿 y 方向的剪力 F_{yi} 和一个绕 z 轴的弯矩 M_i，所以任一节点 i 的荷载分量 $\boldsymbol{F}_i$ 可表示为

$$\boldsymbol{F}_i = [F_{yi} \quad M_i]^{\mathrm{T}} \tag{2-2}$$

对各节点而言，荷载分量编号顺序与节点位移分量的编号顺序相同。对其他几类杆系结构，节点位移分量和节点荷载分量的符号规定均采用同样的方法。

2. 平面桁架

图 2-3 为一平面桁架结构。各杆件之间的连接假定为理想铰，各杆仅能承受轴向力，因此节点位移仅为轴向位移。对平面桁架而言，任一不受约束的节点其位移自由度为 2，即沿两个平面坐标轴方向的线位移。任一节点 i 的位移 $\boldsymbol{\delta}_i$ 可表示为

$$\boldsymbol{\delta}_i = [u_i \quad v_i]^{\mathrm{T}} \tag{2-3}$$

式中，u_i，v_i 分别为节点 i 沿 x 轴和 y 轴方向的线位移。同理，在平面桁架结构中，所有外荷载假定均为作用在 xOy 平面内的节点荷载。因假定节点均为铰结，不能承受力矩，故节点荷载分量即沿坐标轴方向的集中力，与节点位移的表示方法类似，任一节点荷载 $\boldsymbol{F}_i$ 可表示为

$$\boldsymbol{F}_i = [F_{xi} \quad F_{yi}]^{\mathrm{T}} \tag{2-4}$$

式中，F_{xi} 为节点 i 沿 x 轴方向的轴向力；F_{yi} 节点 i 沿 y 轴方向的剪力。