Guidance and Tranning to learn Advanced Mathematics

# 高等数学学习指导与训练（下册）


◎ 主　编　张野芳　李长青

◎ 副主编　李同军　何再乐


$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$


ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

# 高等数学学习指导与训练

## （下册）

主　编　张野芳　李长青
副主编　李同军　何再乐

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

## 内容提要

本书是在总结多年教学经验的基础上精心编写而成的高等数学教学参考书，目的是指导学生结合课堂学习，系统地复习高等数学，全面地进行题解训练，为后续课程的学习及硕士研究生入学考试打下良好基础。

全书共十二章，分为上、下两册，上册内容主要是一元函数微积分学，下册内容包括微分方程、空间解析几何、多元函数微积分学、线面积分和无穷级数。每章包括知识要点、常见题型、常规训练和提高训练，使读者在熟悉本章主要内容的基础上掌握各种解题方法与技巧，同时提高学习能力及应试能力。书末附有训练题的参考答案或简单提示。

本书主要作为高等学校本科生高等数学的辅助教材和硕士研究生入学考试的复习参考用书，同时可作为本专业教师的教学参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学学习指导与训练. 下册/张野芳，李长青主编. —杭州：浙江大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-308-08977-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… ②李… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 159293 号

**高等数学学习指导与训练(下册)**

张野芳　李长青　主编

**责任编辑**　邹小宁
**文字编辑**　李凤慧
**封面设计**　王聪聪
**出版发行**　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
**排　　版**　杭州大漠照排印刷有限公司
**印　　刷**　浙江万盛达实业有限公司
**开　　本**　787mm×1092mm　1/16
**印　　张**　14
**字　　数**　341 千
**版 印 次**　2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
**书　　号**　ISBN 978-7-308-08977-7
**定　　价**　26.00 元

# 目　　录

# 前　言

高等数学是高等院校理工科专业的一门重要基础课,也是全国硕士研究生理工专业入学考试数学科目的主要组成部分。

为了帮助读者更好地学习这门课程,我们根据多年的教学经验编写了这本高等数学学习指导。本书旨在帮助广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,提高分析问题和解决问题的能力,为后续课程的学习及将来的硕士研究生入学考试打下良好的数学基础。

考虑到高等数学课程的特点,在内容上我们做了以下安排:

1. 知识要点　从本课程的知识体系出发,对各个章节的主要内容、知识要点、相互间的联系、易错点等进行了概括与总结,使知识系统化。

2. 常见题型　对各章节的常见题目类型进行解题思路的概括与分析,引导学生思考问题,熟悉多种解题方法,进而初步掌握常规的解题思路和方法。

3. 常规训练　依据教学大纲为各章节设计了常规训练题,帮助读者掌握本课程的基础知识与基本解题方法。题目类型有判断题、选择题、填空题、计算题和证明题等。

4. 提高训练　每一章配有一定数量的提高训练题。题目类型与难度的设计以硕士研究生入学试题为标准,通过这些题目的训练提高学生的应试能力。

掌握数学概念与方法的最好途径就是做题,在使用本书时,读者应尽力多做一些练习题,通过练习真正掌握每章的内容。对于本书提供的例题,力求理清解题思路与方法,做到举一反三。提高训练部分的题目对于学有余力的读者,可在本章学完后作为提高练习,一般学生可在期末复习时作为参考。

在编写本书的过程中,编者除了总结多年的教学经验外,还参考了其他的一些教材和参考书,在很多方面得到启发与教益,在此不一一指明,谨对原书作者表示由衷的感谢。限于编者水平有限,书中不妥之处恳请读者批评指正。

**编　者**

2011 年 7 月

# 第七章　微分方程

## 学习导引

微分方程有深刻而生动的实际背景，它从生产实践与科学技术中产生，而又成为现代科学技术中分析问题与解决问题的一个强有力的工具.本章主要学习了可分离变量的微分方程，齐次微分方程，齐次与非齐次微分方程，可降阶的高阶线性微分方程等一些比较简单的微分方程，让大家对微分方程有一个基本的了解.

## 第一节　微分方程的基本概念

### 知识要点

1. **定义**　凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，叫做微分方程，有时也简称方程.微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫做微分方程的阶.未知函数为一元函数的微分方程为常微分方程.

2. **定义**　如果有这样的函数，代入微分方程能使其成为恒等式，则其叫做微分方程的解.如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解.确定了通解中的任意常数以后，就得到了微分方程的特解.其解是一元函数 $y=f(x)$ 或 $\Phi(x,y)=0$，若自变量多于一个，则称为偏微分方程.

3. **定义**　得到微分方程的特解的条件，如 $y|_{x=x_0}=y_0$，$y'|_{x=x_0}=y'_0$，称为微分方程的初始条件.而求微分方程满足初始条件所得的特解这样的问题，叫做这个微分方程的初值问题.

4. **定义**　微分方程的解的图形是一条曲线，叫做微分方程的积分曲线.

**注：**

(i) 如一阶微分方程的积分曲线是原方程的一阶导函数形成的曲线；

(ii) 有时微分方程的通解并不包含方程的全部解；在解常微分方程时如果在方程的两边施行了消去某一因子的运算，则可能会丢失某些解，应把这些解都求出，它们与求得的通解合起来才构成方程的全部解.

## 常见题型

1. 验证函数是否是常微分方程的解或通解

**例 1** 验证函数 $y=\sin(\arcsin x+C)$ 及 $y=\pm 1$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $(-1,1)$ 上的解,其中 $C$ 是任意常数.

**【思路点拨】** 一般将函数代入常微分方程,如果能使方程成立,则其是方程的解,否则不是;如果微分方程的阶数与任意常数的个数一致,且不可以通过变形将任意常数的个数约减,则其是方程的通解.

**解** 因为 $y=\sin(\arcsin x+C)$,所以 $(\arcsin y)'=(\arcsin x+C)'$,即

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

即 $y=\sin(\arcsin x+C)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ 的解.

对于函数 $y=\pm 1$,因为 $y'=0$,$\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}=0$,于是也有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

从而 $y=\pm 1$ 也是方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ 的解.

2. 建立已知函数族满足的微分方程

**例 2** 曲线在点 $P(x,y)$ 处的切线与 $y$ 轴的交点为 $Q$,线段 $PQ$ 的长度为 2. 求此曲线的微分方程.

**【思路点拨】** 根据已知条件,找出未知函数与其导数间的关系从而列出微分方程.

**解** 由题设切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

由此解得 $Q$ 的坐标 $(0,y-y'x)$,而 $PQ$ 间的距离为

$$|PQ|=\sqrt{x^2+(y'x)^2},$$

再由 $|PQ|=2$ 就可得出曲线方程所满足的微分方程为

$$x^2+(y'x)^2=4.$$

3. 化积分方程为微分方程

**例 3** 已知 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 为连续函数,写出相应的微分方程.

**【思路点拨】** 将方程两边同时求导,将积分方程化为微分方程,然后求解微分方程. 在

求导时注意应用变上限定积分所确定函数的导数公式.

**解**　由题设将方程整理为

$$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$

将其左右两边同时关于 $x$ 求导,可得相应的微分方程:

$$f'(x)=\cos x.$$

## 常规训练

1. 是非题

(1) $(y')^2+xy+y^2=1$ 是二阶微分方程.　(　　)

(2) 函数 $y=c_1\sin 2x+c_2\sin x\cos x$ 是方程 $y''+4y=0$ 的通解,其中 $c_1,c_2$ 为任意常数.　(　　)

(3) 微分方程的通解包含了该微分方程的所有特解.　(　　)

(4) 所有的微分方程都存在通解.　(　　)

2. 填空题

(1) $(y')^2+2\sin y'''=2y$ 的阶数为____________.

(2) $(x^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$ 的阶数为____________.

(3) 设 $f(x)$ 是可微函数.满足方程 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\int_0^x[f(t)]^2\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$ 所满足的微分方程____________.

3. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解

(1) $(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0,y=\dfrac{c^2-x^2}{2x}$;

(2) $y''+y=0,y=3\sin x-4\cos x$;

(3) $x(y')^2-1=0,y^2-4x=0$;

(4) $y''+a^2y=e^x, y=c_1\sin ax+c_2\cos ax+\frac{1}{2}e^x$;

(5) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0, y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$.

4. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程

(1) 曲线在点 $(x,y)$ 处的切线的斜率等于该点横坐标的三次方;

(2) 曲线上点 $(x,y)$ 处的法线与 $x$ 轴的交点为 $Q$,且线段 $PQ$ 被 $y$ 轴平分.

# 第二节　可分离变量的微分方程

## 知识要点

1. 定义　如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

的形式,即一端只含 $y$ 的函数和 $\mathrm{d}y$,另一端只含 $x$ 的函数和 $\mathrm{d}x$,那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

2. 解法　将微分方程 $g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$ 两端积分

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x+C,$$

上式即原微分方程的隐式解,其中 $C$ 为任意常数.

3. 解法依据　若可分离变量的微分方程 $g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $g(y)$ 与 $f(x)$ 是连续的,设函数 $y=\varphi(x)$ 是上述微分方程的解,将其代入到原微分方程中可得出如下的恒等式

$$g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x,$$

将上式两端积分，并记 $\varphi(x) = y$，有

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

设 $G(y)$ 及 $F(x)$ 依次为 $g(y)$ 及 $f(x)$ 的原函数，则有

$$G(y) = F(x) + C. \tag{2}$$

由前述讨论知，方程(1)的解满足(2)式. 反之，如果函数 $y = \Phi(x)$ 是由(2)式所确定的隐函数，则在 $g(y) \neq 0$ 的条件下，由隐函数求导法可求得 $\Phi'(x)$，即

$$\Phi'(x) = \frac{F'(x)}{G'(y)} = \frac{f(x)}{g(y)},$$

这说明函数 $y = \Phi(x)$ 满足方程(1). 由此即知，如果已分离变量的微分方程(1)中，函数 $g(y)$ 与 $f(x)$ 是连续的，且 $g(y) \neq 0$，则(1)式两端积分得到的关系式(2)就用隐函数的形式给出了方程(1)的解，通常称(2)式为微分方程(1)的隐式解. 又因为(2)式中含有一个任意常数，所以，(2)式所确定的隐函数是方程(1)的通解，而(2)式也称作微分方程(1)的隐式通解.

**注：**

(i) 在解微分方程时变量代换是重点，也是难点，应根据具体问题尽量简化方程.

(ii) 在求解微分方程时，应注意不要像求不定积分那样，最后一步才将任意常数加以整理，而应该同时施以相应的化简，目的是使解的结构更加整齐美观.

## 常见题型

1. 可分离变量的微分方程的解

**例 1**　求微分方程

$$(y^2 + xy^2)\mathrm{d}x - (x^2 + yx^2)\mathrm{d}y = 0$$

满足初始条件 $y|_{x=1} = -1$ 的特解.

**【思路点拨】**　可分离变量的微分方程很简单，把两个不同变量的函数及其微元全部分开，各自积分即可.

**解**　将原方程分离变量得

$$\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,$$

将其积分可得

$$-\frac{1}{y} + \ln|y| = -\frac{1}{x} + \ln|x| + \ln|C|,$$

整理得原方程的通解为

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{Cx}{y}\right| = 0.$$

将初始条件代入得原方程的特解

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + 2 = 0.$$

2. 用可分离变量的方法求解应用题

**例 2** 一曲线通过点 $(2,3)$，它在两坐标轴间的任一切线段均被切点所平分，求这曲线方程.

**【思路点拨】** 根据已知条件，建立起未知函数与其导数间的关系，从而得到微分方程.

**解** 设切点为 $(X,Y)$，过此切点的切线方程为

$$y-Y=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}(x-X),$$

当 $x=0$ 时，按已知可知 $y=2Y$，代入切线方程可得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=-\frac{Y}{X},$$

分离变量求积分可得

$$XY=C,$$

替换成一般变量为

$$xy=C,$$

将 $(2,3)$ 点代入曲线，可得曲线方程为

$$xy=6.$$

## 常规训练

1. 是非题

(1) 在解代数方程时，可能因将方程变形导致丢根，但用分离变量法对微分方程进行变形时，不会丢解. ( )

(2) 对可分离变量的微分方程 $g(x)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$，通过两边积分 $\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$ 得 $G(y)=F(x)+c$，其中 $G(y),F(x)$ 分别是 $g(y),f(x)$ 的原函数，则这样得到的原微分方程的解是错误的，因为左边是对 $y$ 积分，而右边是对 $x$ 积分. ( )

2. 填空题

(1) 微分方程 $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$ 的通解为____________.

(2) 已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$，且其上任一点 $(x,y)$ 处切线的斜率为 $x\ln(1+x^2)$，则 $f(x)=$________.

3. 选择题

设 $y=f(x)$ 是要使 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解. 若 $f(x_0)>0,f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0$ ( )

A. 取得极大值 B. 取得极小值

C. 某邻域内单调增 D. 某邻域内单调增

4. 求下列微分方程的解

(1) $y'=2xy+xy^2$；

(2) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$，满足条件 $x = 0, y = 1$ 的解；

(3) $3e^x \tan y \mathrm{d}x + (2 - e^x) \sec^2 y \mathrm{d}y = 0$.

5. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t = nf(x)$ $(n \neq 1)$，求 $f(x)$.

6. 设函数 $f(u)$ 与 $g(u)$ 连续，证明方程 $yf(xy)\mathrm{d}x + xg(xy)\mathrm{d}y = 0$ 经过代换 $u(x) = xy$ 可化为可分离变量的微分方程.

# 第三节　齐次方程

## 知识要点

1. 定义　如果一个一阶微分方程能写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的形式，则称此方程为齐次方程.

2. 解法　令 $\dfrac{y}{x} = u$，即 $y = ux$，求导，有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{x}\right)$，代入原微分方程，有

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u) - u,$$

这是变量可分离的方程，分离变量求解即可.

*3. 可化为齐次方程的微分方程　形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \tag{3}$$

的方程通过变换可将其化为齐次方程. 其解法如下.

令 $x = X + h, y = Y + k$，令 $h, k$ 为待定的常数，于是 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}X, \mathrm{d}y = \mathrm{d}Y$，从而方程变为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1} \tag{4}$$

考察方程组

$$\begin{cases} ah+bk+c=0, \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases} \tag{5}$$

解的情况. 记 $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$, 则有

(1) 若 $D\neq 0$, 则由(5)可求得 $h,k$, 此时代换 $x=X+h, y=Y+k$ 把方程(3)变为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y},$$

等式右边分子分母同除 $X$ 可将其化为齐次方程,按齐次方程解法可得结果.

(2) $D=0$, 此时由方程组(5)求不出 $h,k$, 令 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$, 方程(3)变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1},$$

引入新变量 $v=ax+by$, 则

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{b}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-a\right),$$

代入上方程,得到

$$\frac{1}{b}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-a\right)=\frac{v+c}{\lambda v+c_1},$$

这是可分离变量的微分方程.

## 常见题型

1. 求解齐次方程

**例 1** 求微分方程

$$y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

的通解.

**【思路点拨】** 此类微分方程首先要将方程进行简单变形,判定此方程是否为齐次方程,然后利用 $\frac{y}{x}=u$ 或 $\frac{x}{y}=u$ 进行换元,得到可分离变量的微分方程,再对其进行求解.

**解** 把原方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1},$$

令 $\frac{y}{x}=u, y=ux$, 求导,得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 从而原方程化为

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u^2}{u-1}.$$

分离变量，得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两端积分，得

$$u - \ln u = \ln x + \ln c,$$

即

$$\ln uxC = u,$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入并化简，得

$$Cy = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}.$$

2. 求解可化为齐次型的方程

**例 2**[*] 求微分方程

$$(6x+y-1)\mathrm{d}x = -(4x+y-2)\mathrm{d}y$$

的通解.

**【思路点拨】** 这是可化为齐次方程的方程，按前述方法作代换 $x=X+h, y=Y+k$ 就可将其化为可分离变量的微分方程，然后按可分离变量的方程的解法求解即可.

**解** 在这种情形下 $a=6, b=1, a_1=4, b_1=1$，$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. 因此，可以应用代换 $x=X+h, y=Y+k$，$h, k$ 为待定的常数，于是 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X, \mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$，从而方程变为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{6X+Y+6h+k-1}{-4X-Y-4h-k+2}$$

解方程组 $\begin{cases} 6h+k-1=0, \\ 4h+k-2=0, \end{cases}$ 可得 $h=-\dfrac{1}{2}, k=4$. 因此作代换 $x=X-\dfrac{1}{2}, y=Y+4$ 后，原方程化为齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\dfrac{6X+Y}{-4X-Y}$，对方程右边分子分母同除 $X$，可得齐次方程，令 $\dfrac{Y}{X}=u, Y=uX$，则方程化为

$$\frac{6u+1}{6u^2+5u+1}\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}X}{X},$$

两端积分，得

$$(2u+1)^2 = C\frac{3u+1}{X},$$

以 $Y/X$ 代替上式中的 $u$，再将 $X$ 与 $Y$ 还原为 $x, y$ 可得原方程的通解为

$$(2x+y-3)^2 = C\left(3x+y-\frac{5}{2}\right).$$

## 常规训练

1. 填空题

齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 作变换 $u=$________化为可分离变量的微分方程__________，进而求得原齐次方程的通解为____________________.

2. 选择题

微分方程设 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)$ 的通解为 (  )

A. $y=xe^{Cx-1}$ B. $y=(x-1)e^{Cx}$

C. $y=(x+1)e^{Cx}$ D. $y=Cxe^{x}$

3. 求下列微分方程的通解：

(1) $x\dfrac{dy}{dx}-y=x\tan\dfrac{y}{x}$；

(2) $(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$；

(3) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$；

*(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4-2x-y}{x+y-1}$.

# 第四节　一阶线性微分方程

## 知识要点

1. 一阶线性微分方程

(1) 定义　如果一个一阶的微分方程能写成 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$ 的形式，则此方程称为一阶线性微分方程. 当 $Q(x)\equiv 0$ 时，称为齐次方程，否则称为非齐次方程.

(2) 解法

(a) 公式法　一阶线性微分方程的通解为 $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$.

(b) 常数变易法

先求解方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$ 对应的齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0$，用分离变量法求得通解为 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$，将常数 $C$ 变易为 $C(x)$，代入非齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$，可求得一阶线性微分方程的通解 $y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$.

**注**　在求解一阶线性微分方程时一定要化为标准形式 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$（即 $y'$ 的系数为 1）.

2. 伯努利方程

(1) 定义　形如 $y'+p(x)y=Q(x)y^k$（$k$ 是不为 0,1 的任意实数）的方程称为伯努利方程.

(2) 解法

**步骤 1**　两端同除以 $y^k$ 得 $y^{-k}y'+p(x)y^{1-k}=Q(x)$；

**步骤 2**　令 $z=y^{1-k}$，得 $z$ 的一阶线性微分方程 $\dfrac{dz}{dx}+(1-k)p(x)z=(1-n)Q(x)$，求出其通解；

**步骤 3**　以 $y^{1-k}$ 代 $z$ 便得到伯努利方程的通解.

## 常见题型

1. 解一阶线性微分方程

**例 1**　求解微分方程

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$$

的通解.

**【思路点拨】**　使用公式求解或直接用常数变易法求解.

**解**　使用常数变易法求解. 对应的齐次方程为

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0,$$

它的通解为

$$y=\frac{C}{x}.$$

设非齐次方程的通解为

$$y=\frac{C(x)}{x},$$

将其代入非齐次方程，得

$$\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=\frac{\sin x}{x},$$

由此求得 $C'(x)=\sin x$，积分可得 $C(x)=-\cos x+C$，从而有