Guidance and Tranning to learn Advanced Mathematics

高等数学学习指导与训练（上册）

◎ 主　编　张野芳　李长青

◎ 副主编　李同军　何再乐

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等数学学习指导与训练

（上册）

主　编　张野芳　李长青
副主编　李同军　何再乐

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

编 委 会

主　　编　张野芳　李长青

副主编　李同军　何再乐

编　　委　（以姓氏笔画为序）

王小双　王朝平　朱玉辉　陈丽燕

姜　静　周　杰　徐优红　徐海娜

童爱华　潘　军

内容提要

本书是编者在总结多年教学经验的基础上精心编写而成的高等数学教学参考书，目的是指导学生结合课堂学习，系统地复习高等数学，全面地进行题解训练，为后续课程的学习及硕士研究生入学考试打下良好基础。

全书共十二章，分为上、下两册，上册内容主要是一元函数微积分学，下册内容包括微分方程、空间解析几何、多元函数微积分学、线面积分和无穷级数。每章包括知识要点、常见题型、常规训练和提高训练，使读者在熟悉本章主要内容的基础上掌握各种解题方法与技巧，同时提高学习能力及应试能力。书末附有训练题的参考答案或简单提示。

本书可作为高等学校本科生高等数学的辅助教材和硕士研究生入学考试的复习参考用书，同时可作为本专业教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与训练. 上册/张野芳，李长青主编. —杭州：浙江大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-308-08978-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张…②李… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 159282 号

高等数学学习指导与训练(上册)

张野芳　李长青　主编

责任编辑　邹小宁
文字编辑　王　蕾
封面设计　王聪聪
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　浙江万盛达实业有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　11.25
字　　数　274 千
版 印 次　2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-08978-4
定　　价　24.00 元

前　言

高等数学是高等院校理工科专业的一门重要基础课，也是全国硕士研究生理工专业入学考试数学科目的主要组成部分。

为了帮助读者更好地学习这门课程，我们根据多年的教学经验编写了这本高等数学学习指导。本书旨在帮助广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，提高分析问题和解决问题的能力，为后续课程的学习及将来的硕士研究生入学考试打下良好的数学基础。

考虑到高等数学课程的特点，在内容上我们作了以下安排：

1. 知识要点　从本课程的知识体系出发，对各章节的主要内容、知识要点、相互间的联系、易错点等进行了概括与总结，使知识系统化。

2. 常见题型　对各章节的常见题目类型进行解题思路的概括与分析，引导学生思考问题，熟悉多种解题方法，进而初步掌握常规的解题思路和方法。

3. 常规训练　依据教学大纲为各章节设计了常规训练题，帮助读者掌握本课程的基础知识与基本解题方法。题目类型有判断题、选择题、填空题、计算题和证明题等。

4. 提高训练　每一章配有一定数量的提高训练题。题目类型与难度的设计以硕士研究生入学考试为标准，通过这些题目的训练提高学生的应试能力。

掌握数学概念与方法的最好途径就是做题，在使用本书时，读者应尽力多做一些练习题，通过练习真正掌握每章的内容。对于本书提供的例题，力求理清解题思路与方法，做到举一反三。提高训练部分的题目对于学有余力的读者，可在本章学完后作为提高练习，一般学生可在期末复习时作为参考。

在编写本书的过程中，编者除了总结多年的教学经验外，还参考了其他的一些教材和参考书，在很多方面得到启发与教益，在此不一一指明，谨对原书作者表示由衷的感谢。限于编者水平有限，书中不妥之处恳请读者批评指正。

编　者

2011年7月

目　　录

第一章　函数与极限

学习导引

函数是高等数学的研究对象，极限的方法是研究函数的基本方法. 本章主要学习函数及其相关概念，函数的基本性质和常见的初等函数，函数的极限，无穷小与无穷大，函数的连续性等. 本章是初等数学到高等数学的过渡篇，是高等数学的基础.

第一节　映射与函数

知识要点

1. 函数

(1) 定义　设有两个变量 x 和 y，变量 x 的取值域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，变量 y 的取值集合称为函数的值域，记作 R_f.

注：

(i) 函数概念中包含定义域与对应关系两要素.

(ii) 当且仅当两个函数的定义域与对应法则完全相同时，它们才表示同一函数，否则表示两个不同的函数.

(2) 高等数学中研究的对象是函数，函数概念的实质是变量之间确定的对应关系，变量之间是否有函数关系就看是否存在一种对应法则，使得其中一个变量或几个变量的取值能唯一确定另一个变量的取值，前者是一元函数，后者是多元函数.

(3) 常量与变量、自变量与因变量是相对的. 一个量在某个过程中是常量，在另一过程中可以是变量；一个量在某个过程中是自变量，在另一个过程中可以是因变量，这一点既简单又重要.

(4) 函数表示法与变量用什么字母表示无关，即 $y = f(x)$ 和 $g = f(x)$ 表示同一函数.

2. 反函数

(1) 定义　设函数 $y = f(x)$ 为定义在数集 D 上的函数，其值域为 W. 如果对于数集 W 中的每个数 y，在数集 D 中都有唯一确定的数 x 使 $y = f(x)$ 成立，则得到一个定义在数集

W 上以 y 为自变量、x 为因变量的函数,称其为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 W,值域为 D.

通常把 $x=f^{-1}(y)$ 中的 y 换为 x,把 x 换为 y,从而得 $y=f^{-1}(x)$,并称 $y=f^{-1}(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数.由于这种符号上的改记并没有改变 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和对应法则,所以它们是相同的函数.从上面的定义很容易看出反函数的性质.

(2) 性质　① 易见反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域即是原来函数 $y=f(x)$ 的值域,而其值域即是原来函数的定义域,两者图形重合,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

② 单调函数必有反函数,且其反函数的单调性与原来函数的单调性一致.

3. 复合函数

(1) 定义　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,值域为 R_φ,当 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$ 时,$\forall x \in D_{f\circ g}=\{x \mid x \in D_\varphi, \varphi(x) \in D_f\}$,即有函数 $\varphi(x)$ 的值落在 D_f 内,这样通过变量 u 就得到 y 与 x 之间的对应关系,称为复合函数,记为 $y=f\{\varphi(x)\}$,$x \in D_{f\circ g}$,其中 x 是自变量,y 是因变量,u 称为中间变量.

(2) 构建复合函数的前提条件　内层函数的值域与外层函数的定义域的交不空.也就是说,内层函数必须有函数值落在外层函数的定义域内.否则就会成为无意义的函数.

(3) 结合律成立,即 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$,但交换律一般不成立,即 $f\circ g \neq g\circ h$.

4. 分段函数

(1) 定义　函数在定义域的不同范围内的函数表达式不同的函数称为分段函数.分段函数是用几个式子表示一个函数,不能理解为两个或多个函数.

(2) 几个特殊的分段函数

① 符号函数　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\0, & x=0,\\-1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,对任何实数 x 都有下列关系式,$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$ 成立,所以它起着一个符号的作用.

② 取整函数　函数

$$y=[x]$$

称为取整函数,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是整数集 Z.

③ 狄利克雷(Dirichlet)函数　函数

$$y=\begin{cases}1, & x\in \boldsymbol{Q},\\0, & x\in \mathbf{R}, x\notin Q\end{cases}$$

称为狄利克雷函数,它的定义域是 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域是 $R_f=\{0,1\}$.

5. 初等函数

(1) 定义　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算得到的,并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

(2) 五类基本初等函数

幂函数　$y=x^\alpha$ (α 为实数).

指数函数　$y=a^x(a>0,a\neq 1)$.

对数函数　$y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$.

三角函数　$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\csc x$.

反三角函数　$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\mathrm{arccot} x$.

6. 函数的基本性质

(1) 单调性　设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对任意 $x,y\in I$,当 $x<y$ 时,有 $f(x)\leqslant f(y)$ (或 $f(x)\geqslant f(y)$) ,则称 $f(x)$ 在区间 I 上为单调增加函数(或单调减少函数);若对任意的 $x,y\in I$,当 $x<y$ 时,有 $f(x)<f(y)$ (或 $f(x)>f(y)$) ,则称 $f(x)$ 在区间 I 上为严格单调增加函数(或严格单调减少函数).

(2) 奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,即对 $\forall x\in D$,有 $-x\in D$,且若对 $\forall x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数,若对 $\forall x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

不是任何函数都有奇偶性,例如,$y=x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

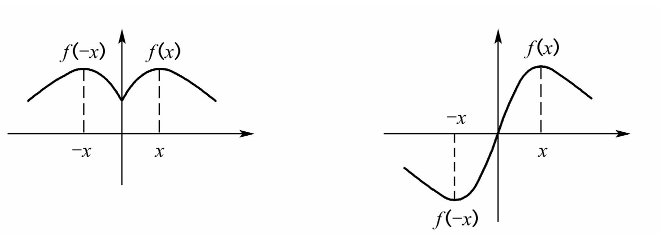

图 1-1

注:

(i) 从几何特征来说(图 1-1),偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称.

(ii) 关于奇偶性的几个结论:

① 奇(偶)函数的和仍为奇(偶)函数.

② 奇数个奇函数的积为奇函数,偶数个奇函数的积为偶函数.

③ 一偶一奇两个函数的积为奇函数.

(3) 有界性　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若存在 $M>0$,使得对任意 $x\in I$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界,否则称为无界.

如果存在 $M>0$,使得对任意 $x\in I$,恒有 $f(x)\leqslant M$ (或者 $f(x)\geqslant M$) ,那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界(或下界).其几何特征如图 1—2 所示,显然,$f(x)$ 在区间 I 上有界等价于它在区间 I 上既有上界又有下界.

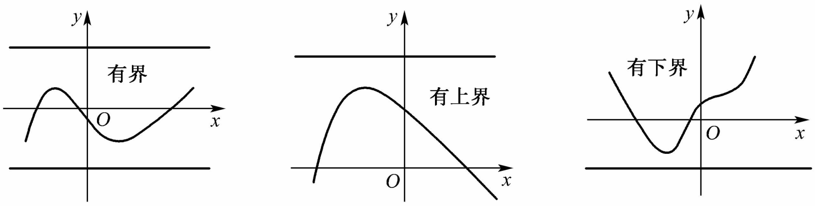

图 1-2

如三角函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 在整个数轴上有界;函数 $y=\tan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界.

(4) 函数的周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在常数 $T>0$,使得对 $\forall x\in D$,有 $x\pm T\in D$,并且有 $f(x\pm T)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,并称 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

注:

(i) 一个函数如果是周期函数则它有无穷多个周期,我们通常所说的周期,一般是指它最小的正周期.

(ii) 周期函数不一定存在最小正周期.例如,$y=2$ 就是一个以任意正实数为一个周期的周期函数,由于不存在最小正实数,所以 $y=2$ 不存在最小正周期.

常见题型

1. 判断函数是否等价

例 1　下列各组函数,哪些是同一函数,哪些不是?

(1) $\log_a x^2$ 与 $2\log_a x$　　(2) $\sec^2 x-\tan^2 x$ 与 1

(3) $\cos^2 x-\sin^2 x$ 与 $\cos 2x$　　(4) $x-1$ 与 $\dfrac{x^2-1}{x+1}$

【思路点拨】　判断两个函数是否等价一般有两种方法:第一,考虑两个函数的定义域与值域是否一致;第二,对于同一个自变量的取值,检验各自对应的函数值是否相等.

解　(1) 不等同,两者定义域不同.

(2) 不等同,两者定义域不同,前者在 $\cos x\neq 0$ 时才有意义.

(3) 两者等同.

(4) 不等同,两者定义域不同.

2. 求函数的定义域

例 2　求下列函数的定义域

(1) $y=\log_a(\sin x)(a>1)$　　(2) $y=\sqrt{6+x-x^2}+\ln(x+1)$

【思路点拨】　这类题目所求的是复合函数 $f(x)=u(v(x))$ 的定义域,按照复合函数的定义,只要求出 x 的取值集合 D,使得对 $\forall x\in D$,$v(x)$ 的取值均在外层函数 $u(\cdot)$ 的定义域内即可.

解　(1) $y=\log_a(\sin x)(a>1)$ 的定义域为 $\{x\mid 2k\pi<x<(2k+1)\pi,k\in Z\}$.

(2) $\begin{cases}6+x-x^2\geqslant 0\\ x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 3\\ x>-1\end{cases}$,所以定义域为 $x\in(-1,3]$.

例 3　设函数 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求函数 $\varphi(x)$ 的定义域.

【思路点拨】　先确定函数 $\varphi(x)$ 的解析表达式,再求其定义域.

解　由函数 $f(x)$ 的表达式知,$f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$,从而有 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$,由此解得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},$$

易知,$\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

3. 求函数的表达式

例 4　已知 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(1/x)=c/x$(a,b,c 均为常数,且 $|a|\neq|b|$),求 $f(x)$.

【思路点拨】 由已知条件的形式知，如果作变量代换 $x=1/t$，则在已知条件中会出现关于 $f(t)$ 和 $f(1/t)$ 的关系式，再将其根据函数表示的“变量无关性”，将其变量改用 x 表示，从而得到关于 $f(x)$ 和 $f(1/x)$ 的方程组，解此方程组就可得 $f(x)$.

解 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则已知条件变为 $af(1/t)+bf(t)=ct$，将 t 改记为 x 得

$$af(1/x)+bf(x)=cx,$$

将上式与已知条件联立，得

$$\begin{cases} af(x)+bf(1/x)=c/x, \\ af(1/x)+bf(x)=cx, \end{cases}$$

解此函数方程组得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right).$$

例 5 汽车在笔直的公路上行驶 10 小时，首先用 1 小时做匀加速运动，使得汽车的速度由零加速到 50km/h，匀速行驶 8 小时后，再用 1 小时做匀减速运动将速度减至零. 试将汽车行驶的路程表示为时间的函数.

【思路点拨】 对于应用题式的求解函数表达式的问题，关键要根据目标函数与讨论变量之间的逻辑关系，构造函数表达式，此类问题，一般分段函数较为常见.

解 设路程函数为 $s(t)$，则

$$s(t)=\begin{cases} 25t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1, \\ 25+50(t-1), & 1<t\leqslant 9, \\ 425+50(t-9)-25(t-9)^2, & 9<t\leqslant 10. \end{cases}$$

即 $s(t)$ 为定义在闭区间 $[0,10]$ 上的分段函数.

4．讨论函数的奇偶性、单调性、有界性和周期性

例 6 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$；　　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(3) $f(x)=4x+\cos x$.

【思路点拨】 讨论函数的奇偶性，一般分两个步骤：第一步，检查函数定义域是否对称，定义域不对称，没有奇偶性；第二步，检验 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 以及 $-f(x)$ 的关系，判别奇偶性. 当然，还可以根据函数图形的对称性来识别函数的奇偶性.

解 (1) 函数的定义域是 $(-\infty,\infty)$，且 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 函数的定义域是 $(-\infty,\infty)$，且 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$，又

$$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$f(-x)+f(x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})=0,$$

即 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

(3) 函数的定义域是 $(-\infty,\infty)$，因为 $f(-x)=4(-x)+\cos(-x)=-4x+\cos x$，显然，$f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以函数 $f(x)=4x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

例 7 证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内无界.

【思路点拨】 讨论函数 $f(x)$ 的有界性,常常联系函数图形来判断,也有比较多的利用有界函数的定义来证明函数是有界的,判别函数无界,除了用无界的定义来讨论外,使用更多的一种方法就是取一个符合函数定义要求的函数子列,若该子列是无界的,则函数在讨论的区间上也是无界的.

解 取数列 $\left\{x_k \mid x_k=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}},k=0,1,2,\cdots\right\}$. $\{x_k\}\in(0,1)$,且对 $\forall M>0$,只要 k 充分大,就有 $f(x_k)=\frac{1}{x_k}\sin\frac{1}{x_k}=2k\pi+\frac{\pi}{2}>M$,故 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内无界.

例 8 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有定义,且 $f(x)/x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减小,证明:对任意两点 $x_1>0,x_2>0$,有 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【思路点拨】 $f(x)/x$ 单调是唯一的条件,因此,要从 $f(x)/x$ 出发,逐步构造和结论联系的桥梁.

解 不妨设 $0<x_1\leqslant x_2$,由已知 $f(x_2)/x_2\leqslant f(x_1)/x_1$,即 $x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$. 又因为 $x_2<x_1+x_2$,所以有

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2},$$

由此可得

$$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)\leqslant x_2[f(x_1)+f(x_2)],$$

即

$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

5. 反函数以及复合函数的讨论

例 9 求 $y=f(x)=\begin{cases}3-x^3, & x<-2,\\ 5-x, & -2\leqslant x\leqslant 2,\\ 1-(x-2)^2, & x>2\end{cases}$ 的值域,并求它的反函数.

【思路点拨】 求分段函数 $y=f(x)$ 的反函数,首先要检查 $y=f(x)$ 在定义域内的每个分段区间内是否严格单调,如果不是严格单调的,则 $y=f(x)$ 没有反函数,其次再求出 x 关于 y 的表达式 $x=f^{-1}(y)$.

解 当 $x<-2$ 时,$y>3+8=11$,由 $y=3-x^3$ 解得 $x=\sqrt[3]{3-y}$;当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时,$3\leqslant y\leqslant 7$,由 $y=5-x$ 解得 $x=5-y$;当 $x>2$ 时,$y<1$,由 $y=1-(x-2)^2$ 解得 $x=2+\sqrt{1-y}$,从而有

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}2+\sqrt{1-y}, & y<1,\\ 5-y, & 3\leqslant y\leqslant 7,\\ \sqrt[3]{3-y}, & y>11,\end{cases}$$

将上式中 x 与 y 的地位互换,得 $y=f(x)$ 的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}2+\sqrt{1-x}, & x<1,\\ 5-x, & 3\leqslant x\leqslant 7,\\ \sqrt[3]{3-x}, & x>11.\end{cases}$$

例 10　设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的图形关于 $x=a,x=b$ 均对称 $(a<b)$，求证：函数 $y=f(x)$ 是周期函数并求其周期.

【思路点拨】　从已知条件出发寻求正数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 即可.

解　对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，由已知可得 $f(a+x)=f(a-x)$ 及 $f(b+x)=f(b-x)$，所以有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x+a-a)=f(x+(x-a))\\&=f(a-(x-a))=f(2a-x)\\&=f(2a-x+b-b)=f(b+(2a-b-x))\\&=f(b-(2a-b-x))=f(x+2b-a)\end{aligned}$$

因为 $b>a$，所以 $2b-a>0$，由此知函数 $f(x)$ 是周期函数，它的一个周期为 $2b-a$.

常规训练

1. 填空题

(1) 设函数 $f(x)=x^2-2x+3$，则 $f(2)=$ ____，$f(a)=$ ____，$f(x+1)=$ ____.

(2) 函数 $y=\sqrt{\ln(x-1)}$ 的定义域为________.

(3) 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$ 的定义域为________.

(4) 判断下列函数的奇偶性

$f(x)=3x^4-5x^2+7$ ________.

$f(x)=2x^2+\sin x$ ________.

$f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$ ________.

(5) 指出下列函数的复合过程：

$y=\sqrt[3]{2x+1}$ ________.

$y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ ________.

(6) 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[2,5]$，则 $f(2x+1)$ 的定义域为________.

2. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，求 $f(\ln x)$ 的定义域.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$ 求 $f(-2)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(2)$，并作出图形.

4. 电力部门规定,居民每月用电不超过30度时,每度电按0.5元收费,当用电超过30度但不超过60度时,超过的部分每度按0.6元收费,当用电超过60度时,超过部分按每度0.8元收费,试建立居民月用电费 G 与月用电量 W 之间的函数关系.

5. 当鸡蛋的收购价格为4.5元/kg时,某收购站每月能收购5000kg.若收购价每kg提高0.1元,则收购量可增加400 kg,求鸡蛋的线性供给函数.

第二节　数列的极限

知识要点

1. 数列极限

(1) 定义 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$,总 $\exists$ 正整数 $N>0$,当 $n>N$ 时,都有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

(2) 数列极限的两点说明

① 上述定义中 ε 对极限全过程而言,要多小就可以取多小,而 N 是指由 ε 而确定存在的正整数,它不是唯一的,一般而言,ε 越小,所取的 N 越大.

② 若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则其任一子列必收敛,且收敛于同一极限.

2. 收敛数列的性质及其判别法则

(1) 收敛数列的性质

① 唯一性　若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则其极限值唯一.

② 有界性　若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 必有界,其逆不真.

③ 保序性　设有两个收敛数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$,恒有 $x_n\leqslant y_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

④ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,且 $A\leqslant B$,则一定存在自然数 N,当 $n>N$ 时,有不等式 $x_n\leqslant y_n$ 成立.

（2）数列收敛的判别法

① 柯西(Cauchy)收敛准则　数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数 N，当 m、$n > N$ 时，总有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$ 成立.

② 单调有界准则　单调有界数列必有极限.

③ 夹逼准则　若存在正整数 N，当 $n > N$ 时，总有 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

3. 几个常见的极限

① $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0(|q| < 1)$　　② $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$

③ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0(|a| > 1)$　　④ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1(a > 0)$

⑤ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

常见题型

1. 求解数列极限

例 1　设数列 $x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$（其中 q 是常数，且满足 $|q| < 1$），求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

【思路点拨】　本题主要是利用等比数列的求和递推公式来讨论数列的极限.

解　我们知道

$$x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

由于 $|q| < 1$，所以当 n 无限增大时，q^{n+1} 无限趋近于零，所以 $\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ 无限趋近于 $\dfrac{1}{1 - q}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{1 - q}$.

例 2　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)\right]$.

【思路点拨】　对于一些数列通项，我们可以利用交换两项的位置、去括号等方法对它进行等价变换，将比较复杂的极限问题转化成比较简单的问题，进而求出相应的极限.

解　$\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. 证明数列极限存在

例 3 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

【思路点拨】 对数列的一般项进行适当的放缩，利用夹逼准则求其极限.

证

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},$$

即

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

常规训练

1. 填空题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+4\right)=$________________.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=$________________.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=$________________.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[4+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]=$________________.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-1}=$________________.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos n\pi=$________________.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=$________________.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}=$________________.

(9) 数列 $\left\{2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots\right\}$ 的通项表达式是________________.

(10) $n\to\infty$ 时，数列 $x_n=\frac{n+\cos n}{n}$ 的极限是________________.

2. 设 $\alpha_1=1,\alpha_2=2,3\alpha_{n+2}-4\alpha_{n+1}+\alpha_n=0(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_n$.