序

我国的高等教育已逐步从精英教育进入大众化教育，因此近年来很多高校对高等数学教学的深度和广度都相应降低了要求．然而，高校中也有不少学生希望能够加深对高等数学内容的理解和掌握，提高空间想象能力、逻辑推理能力，以及分析问题与解决问题的能力．这本《高等数学学习指导》就是为满足这一需求而编写的．

本书的作者，都是在高校担任高等数学教学多年、教学经验丰富、工作敬业的教师，他们力求将多年的教学经验和学生在学习高等数学时遇到的疑难问题融入书中，并按照同济大学应用数学系编写的《高等数学》（第五版）的各章顺序，每章均设计了五个板块：

（1）本章教学内容、要求、重点及难点；

（2）学习提示；

（3）释疑解难；

（4）本章方法总结及典型例题分析；

（5）本章自测题及参考答案．

仔细研读这本书后，发现它与一般的"习题集"或"解题指南"不同，它不但包含解题方法和解题思路的分析，而且包含对《高等数学》中基本概念、基本理论、重要思想方法的总结与释疑解难，从而，不仅有助于提高读者解题的能力，而且能使读者更深入系统地理解、掌握《高等数学》的主要知识，提高读者的数学素养和能力．

我和本书的作者都希望，读者通过研读此书，能更好地理解、掌握高等数学的基本概念、基本理论、基本方法，将高等数学的内容进一步融会贯通．

本书内容翔实、论述清晰、文字流畅、便于自学．它既是正在学习高等数学的学生和有志考研的朋友的良师益友，也是从事高等数学教学工作的教师的一本颇具特色的参考书．

李心灿

2006年夏于北京航空航天大学

前　言

《高等数学》是高等院校理工科、经济、管理学科等门类各专业学生必修的一门重要基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目．为了帮助在校大学生及考研的同学学好《高等数学》，扩大课堂信息量，提高空间想象能力、逻辑推理能力、分析问题与解决问题的能力以及提高应试能力，根据作者多年从事《高等数学》课程教学的经验，按照“高等数学课程教学基本要求”，结合教育部“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求，融学习指导与考研为一体编写了此书．为满足经济管理类各专业同学的学习及考研需求，本书增加了差分方程、边际函数和弹性函数等经济数学内容、例题及习题．

本书前十二章按照同济大学应用数学系编《高等数学》（第五版）（由高等教育出版社出版）的章节次序来编写，每章均设计了以下五个板块．

（1）章教学内容、要求、重点及难点．

这一板块提纲挈领地归纳了本章的主要内容，并按照本科高等数学课程教学的基本要求，确定对各节教学内容的具体要求（注：带 * 号内容为经济管理类学生选学，带 * * 号内容为理工类学生选学）．沿用惯例，按“理解”“了解”“知道”或“熟练掌握”“掌握”“会”或“能”的次序表示程度上的差异，并指出重点及难点，旨在帮助学生深入理解基本概念，抓住事物的主要矛盾，理清思路．

（2）学习提示．

这一板块介绍了章节的内在联系，是学前准备材料，侧重于帮助读者透视脉络，从细节到全盘对内容进行认识．

（3）释疑解难．

针对读者在学习本章内容时常常问及的一些带有共同性的、又有较大意义的问题，这一板块选出若干个给以分析、解答，以帮助读者释疑解难．有些问题的解答还对教学内容作了补充和提高，以供一些学有余力的学生阅读．

（4）本章方法总结及典型例题分析．

这一板块对本章的各个概念、性质、定理进行了详细地说明并指出了注意事项．这是作者为读者特别提供的一种科学且行之有效的学习方法，运用这种“厚书薄读”的方法，读者可以从厚厚的两本教材中迅速切入重点，全面、系统、提纲挈领、事半功倍地掌握所学知识．其次，典型例题涉及内容广、类型多、技巧性强，从而达到提高同学的分析能

力、掌握基本概念和理论、开拓解题思路、熟练掌握解题技巧的目的.

(5) 本章自测题及参考答案.

自测旨在进一步强化解题技巧，反映考试的重点、难点，培养综合能力和应变能力，巩固和提高复习效果. 同步自测题Ⅰ适合于经济管理类学生；同步自测题Ⅱ适合于理工类学生.

第十三章是为经济管理类学生补充的教学内容.

限于编者的水平，错漏不当之处，恳请同行和读者批评指正.

编　者

2006 年 6 月

目　录

第一章　映射与函数

一、本章教学内容、要求、重点及难点

(一)教学内容

1. 函数的概念与特性：

1) 集合；2) 映射；3) 函数的概念；4) 函数的几种特性；5) 反函数.

2. 初等函数：

1) 幂函数；2) 指数函数与对数函数；3) 三角函数与反三角函数；4) 复合函数；5) 初等函数；6) 双曲函数与反双曲函数.

3. 数列的极限.

4. 函数的极限：

1) 自变量趋于有限值时的极限；2) 自变量趋于无穷大时的极限.

5. 无穷小与无穷大：

1) 无穷小；2) 无穷大.

6. 极限运算的法则.

7. 极限存在的准则　两个重要的极限.

8. 无穷小的比较.

9. 函数的连续性与间断点.

10. 连续函数的运算与初等函数的连续性.

11. 闭区间上连续函数的性质.

(二)教学要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法.

2. 掌握函数的奇偶性、单调性、周期性、有界性，以及复合函数.

3. 了解分段函数、反函数、隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图像.

5. 会建立应用问题中的函数关系.

6. 理解极限、左极限、右极限的概念以及它们之间的关系.

7. 掌握极限的性质以及运算法则.

8. 掌握极限存在的两个准则和两个重要的极限，并能利用它们求极限、判断极限存在与否.

9. 理解无穷大、无穷小的概念，掌握它们的比较方法，会利用等价无穷小求极限.

10. 理解函数连续的概念，会判断函数间断点的类型.

11. 掌握闭区间上连续函数的性质，会利用这些性质做简单的证明题.

(三)教学重点

函数的概念，初等函数的概念，极限的计算，复合函数的分解与组合.

(四)教学难点

建立函数关系，极限的定义，间断点的分类.

二、学习提示

从中学我们就开始学习与研究函数，但那时只是用初等数学的方法研究函数的部分宏观形态，如函数的奇偶性、周期性、单调性等，而对函数在某一点邻近处的变化情况(即微观形态)没有涉及，更无从谈起由微观形态来把握函数的宏观性态，也就是说，我们对于函数的认识还是很肤浅的.

微积分是以函数为计算和研究的对象，用极限的思想和方法(或者说以极限作为基本工具)来研究函数的微分和积分的理论和应用的一门学科.

本章的第一节主要是复习中学数学的知识，目的在于让同学理解函数的概念，并了解函数的奇偶性、周期性、单调性和有界性. 有界性是一个新概念，也是初学者较难理解的概念. 证明或判断某个函数的有界性是经常出现的题型. 复合函数、初等函数的概念也在本节出现，准备进行复合函数的复合与分解是进一步学习复合函数的导数与积分的基础.

从第二节至第四节介绍的极限概念是微积分中最重要、最基本的概念之一，需要同学们加深理解. 极限包括数列极限和函数极限. 前者是训练和培养极限思维模式的基础，如果数列极限的有关概念、性质和方法掌握好了，不但学习函数极限轻而易举，而且有助于全部微积分内容的学习. 虽然大纲不要求同学利用ε-N、ε-δ语言证明极限，但是利用它们将有助于你理解极限及其相关内容. 无穷小量只不过就是极限为零的变量罢了.

第五节至第七节重在介绍求极限的方法. 我们给大家总结出七种求极限的方法，这当中还不包括诸如分解因式、约分、通分、分子(分母)有理化、变量替换等一些小技巧. 在求极限的过程中，如上所说的小技巧也不能忽视. 高阶无穷小和等价无穷小也是很重要的概念.

第八节至第十节是有关函数的连续性问题. 函数的连续性是用极限为工具研究函数微观形态与宏观形态的开始. 函数在一点处连续的概念描述了函数的微观形态，而在一个区间上的连续性则描述了一个函数的宏观性态，刻画了函数的全局性态. 而且，闭区间上连续函数具有很好的性质，如：有界性与最大值最小值定理、零点定理与介值定理. 掌握住这些定理对于研究函数的有界性、最值情况和函数的零点情况都大有好处.

总之，这一章是微积分的入门，涉及概念较多、方法较多. 希望同学们加强概念之间的区别与联系的总结，比如极限与连续两个概念之间有何区别与联系，极限与连续怎样为研究函数的性质服务；还希望同学之间多交流学习与理解解题方法.

三、释疑解难

1. (§1.1)请详细解释映射概念并解释函数是映射的一个特例.

答　对于映射 $f:X\to Y$,教材第 5 页已经解释得很清楚了,请大家详细阅读定义及对定义的注.需要再次强调的是:(1)映射 X 中的任意一个元素都有像,并且像唯一,因此这个映射的定义域就是 X,记为 $D_f=X$;(2)Y 中的每一个元素不一定都有原像,且 Y 中的元素如果它有原像,则原像不一定唯一,把 Y 中所有有原像的元素组成的集合称为映射 f 的值域,记为 R_f 或 $f(X)$,所以有 $R_f\subseteq Y$,因此 Y 只能称为"值域的范围",而不能叫做"值域";(3)一些特殊映射,如果值域 $R_f=Y$,这样的映射称为满射,原像唯一的映射称为单射.既单又满的映射称为一一映射(或双射).

对于一个映射 $f:X\to Y$,在这里只强调 X,Y 是非空的集合,对其中的元素没有任何限制,集合中的元素可以是数,可以是点,可以是函数,也可以是几何图形,等等.而函数作为映射的一个特例,要求 X,Y 都是实数集,换句话说,函数其实就是实数集到实数集的映射.

2. (§1.1)如何理解教材第 6 页中逆映射的定义?

答　所谓逆映射实际也是一个映射,它是在原映射的基础上定义的,若原映射为 $f:X\to Y$,要使从 R_f 到 X 也形成一个映射,即 $g:R_f\to X$,即对每一个 $y\in R_f$,按照对应法则 g,在 X 中有唯一确定的元素 x 与之对应,这 x 满足 $f(x)=y$.这就要求 f 必须是单射,才能有 g 存在,此时 g 就叫做 f 的逆映射,记为 f^{-1}.因此,教材中有这样一句话,"按上述定义,只有单射才存在逆映射".

3. (§1.1)单调函数必存在反函数,不单调的函数是不是一定没有反函数?

答　不是的.一个函数在其定义区间内单调,从映射的角度看,这个函数一定是单射,从而它的反函数一定存在.但是反过来,是单射不意味着函数就是单调函数,因此函数单调是它的反函数存在的充分而非必要条件.

例如,函数
$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

在区间$[-1,1]$上不单调(见图 1-1),但它存在反函数 $f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$(见图 1-2).

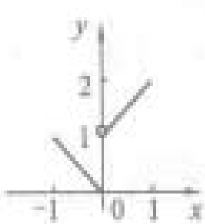

图 1-1

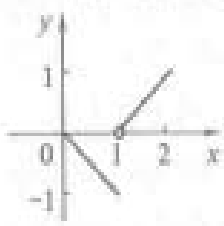

图 1-2

4. (§1.1)对类似 $f(x+2)$, $f(\sin x)$这样的函数记号不大理解,请解释一下.

答　$f(x+2)$, $f(\sin x)$等这样的记号都是表示复合函数的记号.以 $f(x+2)$为例,若令

$u=x+2$，则 $f(x+2)$ 表示由 $f(u)$ 及 $u=x+2$ 复合而成的函数. 例如，若 $f(x+2)=x^2+2x+3$，则由于 $x^2+2x+3=(x+2)^2-2(x+2)+3$，若令 $u=x+2$，则 $f(u)=u^2-2u+3$，这就是说，$f(x+2)=x^2+2x+3$ 是由 $f(u)=u^2-2u+3$ 和 $u=x+2$ 复合而成的函数，这类记号以后用得很多，要注意掌握.

5.（§1.1）举例说明"分段函数一定不是初等函数"这种说法是不对的.

答　例如，函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 有相同的定义域和对应法则，因此它们表示同一个函数，显然 $y=\sqrt{x^2}$ 是初等函数，从而分段函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是初等函数，故"分段函数一定不是初等函数"这种说法是错误的.

6.（§1.2）数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 定义中 ε-N 各自的作用与关系.

答　ε 是衡量 x_n 和 a 接近程度的，ε 愈小，表示 x_n 和 a 接近得愈好，它除限于正数外，不受任何限制，正是 ε 的任意性说明 x_n 和 a 能够接近到任何程度. 然而，尽管 ε 有它的任意性，但当它一经给出，就应暂时看作是固定不变的，以便根据它来找 N. 再者，ε 既然可是任何正数，那么 2ε、3ε 或 ε^2 等同样可为任何正数，因此定义中不等式右边的 ε 完全可以用 2ε、3ε 或 ε^2 等来代替. 同样可知，不等式中"$<$"也完全可以换成"$\leqslant$". 一般来说，N 是随着 ε 的变小而变大，所以也可将 N 写作 $N(\varepsilon)$，来强调 N 是依赖于 ε 的，这也说明 N 具有相应性，但这种写法并不意味着 N 是由 ε 所唯一确定的. 因为对给定的 $\varepsilon>0$，如果存在一个满足定义要求的 N_0，那么任何一个大于 N_0 的正整数都可作为 N，因此按函数定义知，N 不是 ε 的函数.

7.（§1.2）很多同学在利用极限定义证明极限时一开头就写："因为 $|x_n-a|<\varepsilon$，所以……"，请解释为什么这样写是错误的?

答　证明极限的具体做法是：从分析不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 出发，一步步地找出使这个不等式成立的 n 所在的范围，从而确定出符合要求的 N，也就是分析出使不等式成立的充分条件，其逻辑关系是"要使 $|x_n-a|<\varepsilon$，只要 n 满足什么条件"，而不是"因为 $|x_n-a|<\varepsilon$，所以 n 满足什么条件". 学生要深刻理解极限的 ε-N 定义，避免犯这种逻辑性的错误.

8.（§1.2）数列极限与子数列极限的关系有哪些应用?

答　先补充 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，它定义为对于任意 $M>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n|>M$，此时称数列 $\{x_n\}$ 为无穷大量.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$（或 ∞）$\Leftrightarrow\{x_n\}$ 的任何子数列都以 a（或 ∞）为极限.

数列和子数列的以上关系有如下应用：

(1) 证明数列 $\{x_n\}$ 发散，只需找出它的一个发散的子数列，或找出两个收敛于不同值的子数列；

(2) 证明数列 $\{x_n\}$ 无界，只需找出它的一个发散到无穷大的子数列；

(3)证明数列$\{x_n\}$不是无穷大,只需找出它的一个收敛于某个常数的子数列.

9.(§1.3)在极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的定义中,为什么限定$|x-x_0|>0$(即$x\neq x_0$),如果把此条件去掉,写作"当$|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$",是否可以?

答 不可以.极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的直观意义就是:当自变量$x$趋于$x_0$时,对应的函数值$f(x)$无限接近于常数A.至于$f(x)$在点$x_0$的情况,包括$f(x)$在$x_0$是否有定义,有定义时$f(x_0)$等于什么,都不影响$x\to x_0$时$f(x)$的变化趋势,故应把$x=x_0$这一点排除.比如函数$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$在$x=2$处没有定义,但这丝毫不影响"当$x\to2$,$f(x)\to4$"这个事实,故在定义中应该而且必须把$x=2$这一点排除.

10.(§1.3)讨论函数的极限时,在什么情况下要考虑左、右极限?

答 一般说,讨论$f(x)$在点x_0处的极限,都应先看一看单侧极限的情况.如果当$x\to x_0$时,$f(x)$在点x_0两侧变化趋势一致,则不必分开讨论;如果发现两侧变化趋势可能有差别,就应分别研究左、右极限.

例如,求分段函数在分段点处的极限时,必须讨论左、右极限;尤其在后面研究分段函数在分段点处的连续性和可导性时,一般都要考虑左、右极限;有些三角函数在特殊点的左、右极限不一样,例如$f(x)=\tan x$在x趋于$\dfrac{\pi}{2}$时,左、右的变化趋势就不一样;有些反三角函数、指数函数也有类似的情况.试看下面的两个例子:

(1)因为$\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$,所以$\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x}$不存在;

(2)因为$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$,所以$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$不存在.

11.(§1.3)请问x_0处的函数极限的有界性和保号性这两条性质都只适用于x_0的某个去心领域的局部范围内,能否把这个"局部"的限制去掉?

答 一般说来不可以.$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,只能说明在$x_0$的某个去心领域内$f(x)$具有某种变化趋势,据此也只能推得在该局部范围内,$f(x)$是否有界,是否取确定的符号;至于在此局部范围以外的$f(x)$的情况,我们是无从知道的.例如,$f(x)=\dfrac{1}{x}$当$x\to\dfrac{1}{2}$有极限2,且存在$\delta=\dfrac{1}{6}$,当$x\in\mathring{U}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{6}\right)$时,$f(x)$确实有界,且与极限值同号(即正号);而当$x\in\mathring{U}\left(\dfrac{1}{2},1\right)$且$x\neq0$时,$f(x)$却是无界的,且不保持正号.但需要同学注意的是,数列的有界性却没有这个局部范围的限制.

12.(§1.5)在应用极限的四则运算法则时,有的同学往往会写出$\infty-\infty=0$,$\dfrac{\infty}{\infty}=1$这样的式子,试分析一下为什么会出现这样的错误.

答 出现这类错误的主要原因是将符号"∞"误认为是一个"常数",对它施行了数的运

算法则，事实上，"∞"表示的是绝对值无限增大的变量，而不是某个常数，因而不能滥用数的运算法则. 记号"$\infty-\infty$"表示的是两个绝对值无限增大的变量的差，仍然是一个变量，这个变量当然不一定以 0 为极限，而可能出现各种不同的情况. 类似地，记号"$\frac{\infty}{\infty}$"也表示一个变量，这个变量也不一定以 1 为极限，而可能出现各种不同的情况. 初学者对符号"∞"的使用要十分谨慎、仔细，正确理解其含义，不能把它与通常的数混淆起来. 关于"$\infty-\infty$""$\frac{\infty}{\infty}$"以及"$\frac{0}{0}$""$0\cdot\infty$"型的极限的求法，在第三章§2 洛必达法则这一节有详细论述.

13. (§1.4)无界量和无穷大量有何区别与联系？

答　无界量和无穷大量都是变量，无穷大量是在自变量的某一变化过程中，$|f(x)|$不断增大，对于任意的 $M>0$，对满足$|x|>X$(或 $0<|x-x_0|<\delta$)的一切 x，都有$|f(x)|>M$. 而无界是只要找到一个 x_0，使$|f(x_0)|>M$，$f(x)$就无界. 很显然，无穷大量一定是无界量，但反过来，无界量未必是无穷大量. 例如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$内无界，但当 $x\to0^+$ 时，这个函数不是无穷大.

14. (§1.5)如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，就有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$，那么必有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a}{a}=1$，对吗？

答　不对. 产生错误的原因在于忽视了商的极限运算法则的一个条件：分母的极限不能为零. 因此，当 $a\neq0$ 时，可以直接用极限的运算法则，显然结论是正确的.

而当 $a=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$可能存在，也可能不存在，且存在的话，也不一定等于 1.

例如，数列 $x_n=\frac{1}{n}[2+(-1)^n]$，有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

而极限
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}\right]$$
并不存在.

又如，数列 $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，而极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}$.

15. (§1.5)复合函数的极限运算法则中，能否把条件去掉，即只在条件"$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$"下，就推得"$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$"的结论？

答　一般说来不可以. 去掉条件"在点 x_0 的某去心邻域内$g(x)\neq u_0$"后，结论就不一定成立了. 例如，设 $f(u)=\begin{cases}0, u=0,\\1, u\neq0,\end{cases}$ $u=g(x)=x\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq0)$，此时

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, x=\dfrac{1}{n\pi}(n=\pm1,\pm2,\cdots),\\ 1, \text{其他}.\end{cases}$$

因此在原点的任一邻域内，函数值不断地取得 0 和 1，显然，$\lim\limits_{x\to0}f[g(x)]$不存在.

需要说明的是，上面所举的不符合定理条件的函数是比较特殊的，之所以举出来，是要让同学明白运用复合函数的极限运算法则是需要一定条件的.

16. （§1.6）在求数列极限时，常会遇到数列用递推公式给出的情况，例如 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=\dfrac{1+x_n^2}{2}$（$n=1,2,\cdots$），这时，如果在递推公式两端取极限，由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$（设极限为 a），就得到有关数 a 的等式 $a=\dfrac{1+a^2}{2}$，从而解得 $a=1$，这就求得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. 试解释一下这种解法的毛病何在？

答　这种解法的毛病在于，当你在递推公式两端取极限，并得到一个数的等式 $a=\dfrac{1+a^2}{2}$时，你已采用了一个假设：数列$\{x_n\}$是收敛的，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 表示一个数. 但事实上，数列$\{x_n\}$是否收敛尚不知道. 若$\{x_n\}$发散，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 就不表示一个数，在递推公式两端取极限就失去了依据，也就更谈不上等式 $a=\dfrac{1+a^2}{2}$成立. 这种做法有时会导致荒谬的结果. 例如假设 $x_1=1$，$x_{n+1}=-x_n$（$n=1,2\cdots$），显然此数列不存在极限. 但若在递推公式两端取极限（设为 a），则有 $a=-a$，从而导出 $a=0$ 的错误结果.

正确的做法是：在取极限前，应该先证明数列$\{x_n\}$的极限存在. 这时，常用的一个方法是先验证所给数列是否是单调有界的. 比如题目中的数列，首先容易看出它是单调增加的，因此 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}(1+x_n^2)-x_n=\dfrac{1}{2}(x_n-1)^2\geqslant0$，即 $x_{n+1}\geqslant x_n$，所以$\{x_n\}$是单调增加的. 下面用归纳法证明它是有上界的：$x_1=\dfrac{1}{2}\leqslant1$，若假设 $x_n\leqslant1$，则 $x_{n+1}=\dfrac{1+x_n^2}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}(1+1)=1$，故数列$\{x_n\}$有上界 1. 于是由单调有界收敛准则知，数列$\{x_n\}$收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，然后再在递推公式两端取极限，求得 $a=1$.

17. （§1.6）问函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 是幂函数还是指数函数？

答　$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 既不是幂函数，也不是指数函数，而被称作幂指函数. 一般地，对于形如 $u(x)^{v(x)}$（$u(x)>0$，$u(x)\neq1$）的函数通常称为幂指函数.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的极限形式为 1^∞，由于 1^∞ 型的极限对不同的函数有不同的结果，比如，

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^{2}$，因此称上式为 1^{∞} 型未定式，一般幂指函数极限的求法见§3.2.

18.（§1.6）你在求极限过程中常犯如下错误吗？请指出以下错误在哪？并给出正确解法.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2}=1^{\infty}=1.$$

答 它的极限式是幂指函数形式，属于 1^{∞} 型未定式，1^{∞} 是一个记号. 但是 1^{∞} 型不一定等于1，有些同学会问1的任何次幂不是都等于1吗？注意那是1的任何有限次幂等于1. 正确解法是：利用第二个重要极限及变量代换.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}&=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{x^2}\xrightarrow{u=\frac{-2}{x^2+1}}\lim_{u\to 0}(1+u)^{\left(-\frac{2}{u}\right)-1}\\&=\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-2}\cdot\lim_{u\to 0}(1+u)^{-1}=e^{-2}\cdot 1=e^{-2}.\end{aligned}$$

19.（§1.7）在做等价无穷小的代换求极限时，应注意什么？

答 （1）根据等价无穷小的代换性质，在代换时，必须将分子或分母的整体分别换成它们各自的等价无穷小（由于 $\alpha\sim\alpha,\beta\sim\beta$ 故保持分子或分母不变也是可以的）.

（2）如果对分子（分母）的加项作代换，则不能保证变换后新的分子（分母）与原来的分子（分母）是等价无穷小. 例如，在求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ 时，若将 $\sin x$ 换作 x，则原极限式化为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$，但是这个结果是错误的. 原因就在于做了上述代换后，$x-\sin x$ 与0不是等价无穷小. 后面学习了洛必达法则后，可以很容易地证明 $x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$，上面极限值为 $\frac{1}{6}$. 因此建议初学者，在使用等价无穷小的替换时，极限式中加或减的情况最好不用.

（3）依据等价无穷小的代换性质，若分子（分母）为若干个因式的乘积，则可对其中的一个或若干个无穷小做等价无穷小代换，这时可保证所得的新的分子（分母）的整体为原分子（分母）的整体的等价无穷小. 若分子（分母）出现加减时，用等价无穷小代换之前，须把分子（分母）转化为乘除形式.

20.（§1.7）运算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$，对吗？

答 结果正确，但方法不对. 这里第一步应用了等价无穷小代换 $\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\frac{1}{x}(x\to 0)$，这是错误的. 因为这里忽略了无穷小量 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$，做比较的前提条件，在求极限 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 时，应有 $\alpha(x)\neq 0$. 这里 $\alpha(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$，当 x 取 $\frac{1}{n\pi}$ 时（n 为正整数），

$\alpha\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)=0$. 正确的解法是应用夹逼准则，解法如下：

当 $x\neq 0$ 时，

$$0\leqslant\left|\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant x^2,$$

所以

$$\left|\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqslant|x|,$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，从而由夹逼准则知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=0$.

21. (§1.8)如何把握函数在一点连续的概念？

答　(1)把连续与极限做比较，函数在某一点处有极限与函数在这一点处有无定义没有任何关系，而连续要求函数在这一点必须有定义，所以在对两个概念的定义中分别出现"$f(x)$在 x_0 的某去心邻域$\mathring{U}(x_0)$有定义"和"$f(x)$在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$有定义".

(2)函数在一点 x_0 处连续，是借助极限来定义的，从它的定义中可看出，函数在 x_0 连续，意味着 $f(x)$在 x_0 有极限，而且极限等于$f(x)$在 x_0 的函数值. 因此，也可以说函数在一点处极限存在是函数在这点连续的必要条件.

(3)结合连续函数的几何意义和实际背景来理解. 时间的变化、河水的流动、植物的生长、气温的变化等都是连续性现象. 从图形上看，连续函数的图像是连绵不断、没有间断点的曲线.

22. (§1.8)判断函数的间断点及其类型最有效的途径是什么？

答　讨论时，首先必须知道哪些可能是函数的间断点，无定义的点一定是间断点，分段函数的分段点可能为间断点. 然后，根据定义分别讨论函数在这些点处的极限和左右极限，以此给出间断点的类型. 因此，可以说，判断的过程其实就是一个求极限的过程，要求同学有扎实的求极限的基本功.

23. (§1.8)考察函数在某一点的连续情况时，什么情况用左、右极限？

答　一般地，当函数在这一点两侧的表达式一致，用不到分开考察左、右极限，但有些函数即使在这一点两侧的表达式一致，也仍需考察左、右极限. 如 $f(x)=e^{\frac{1}{x-x_0}}$，当 $x\to x_0$ 时，左、右极限是不一样的. 当 $x\to x_0^+$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}e^{\frac{1}{x-x_0}}=+\infty$；当 $x\to x_0^-$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}e^{\frac{1}{x-x_0}}=0$. 又如 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0^+$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to 0^-$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$. 当函数在这一点两侧的表达式不一致时，一般要用左、右极限.

24. (§1.8)试分析狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 的连续性.

答　对于任意的 $x_0\in\mathbf{R}$，一定存在全由有理数组成的数列$\{S_n\}$和全由无理数组成的数

列$\{t_n\}$，使它们都趋向于x_0，这样就有$\lim\limits_{n\to\infty}D(S_n)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}D(t_n)=0$，从而利用§1.3定理4的逆否命题，说明$D(x)$在定义域$R$上任一点处都不连续.

再多说两句，若依靠$D(x)$再定义一个函数$f(x)=xD(x)$，则$f(x)=\begin{cases}x, x\text{为有理数},\\0, x\text{为无理数},\end{cases}$而函数$f(x)$除在$x=0$处连续外，在其他各点处都间断. 下面作一简要证明.

先证$f(x)$在$x=0$处连续. 此时$f(0)=0$，对于任意$\varepsilon>0$，要使$|f(x)-f(0)|=|xD(x)|\leqslant|x|<\varepsilon$，只须取$\delta=\varepsilon$，当$|x-0|<\delta$时，必有$|f(x)-f(0)|<\varepsilon$，因此$f(x)$在$x=0$处连续.

下面用反证法说明$f(x)$在$x_0\neq0$处间断. 设$x\neq0$，这时$\dfrac{f(x)}{x}=D(x)$，如果$f(x)$在$x_0\neq0$连续，那么

$$\lim_{x\to x_0}D(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}x}=\frac{f(x_0)}{x_0}=D(x_0),$$

这表明$D(x)$在$x=x_0$处连续，这与刚才我们证明的$D(x)$在定义域R上任一点处都不连续矛盾. 故假设错误，因此$f(x)$只在$x=0$处连续.

上面的结论说明，存在着处处有定义但处处不连续的函数，也存在着只有一个连续点的函数，而这些都是通过狄利克雷函数来表达的.

25.（§1.9）在讨论分段函数$f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\x, & x\leqslant0\end{cases}$的连续性时，有的同学这样讨论：由于$y=x+1$和$y=x$均为初等函数，故$y=x+1$在区间$(0,+\infty)$内的每一点处都连续，$y=x$在区间$(-\infty,0]$上的每点处连续. 又由于$(-\infty,0]\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$，故推得$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的每点处连续，即$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$内的连续函数. 但是$f(x)$在$x=0$处显然是不连续的. 试问上述解法错在哪里？

答　错误发生在由$y=x+1$在$(0,+\infty)$内的连续性和$y=x$在$(-\infty,0]$上的连续性而推得$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的连续性这一步上. 作为一个定义在$(-\infty,0]$上的函数，$y=x$在$(-\infty,0]$上当然是连续的，但它在$x=0$处的连续是指左连续，由此也只能推得$f(x)$在$x=0$处是左连续的，然而，由于$x=0$包含在$f(x)$的定义域的"内部"，并不是定义域的端点，因而讨论$f(x)$在$x=0$处的连续性时，必须考虑它是否既是左连续又是右连续.

现在$f(x)$在$x=0$处非右连续，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1\neq f(0)$，故$f(x)$在$x=0$处间断.

正确的解法是：由于当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=x+1$，故$f(x)$连续；当$x\in(-\infty,0)$时，$f(x)=x$，故$f(x)$也连续. 当$x=0$时，由于$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1\neq f(0)$，故$f(x)$在$x=0$处间断. 切记：讨论分段函数的连续性时，在函数的分段点处一定要分别考察函数的左

连续性和右连续性.

26. (§1.9)关于初等函数连续性的结论,为什么表述成"初等函数在其定义区间内都是连续的",而不说成"初等函数在其定义域内都是连续的"?

答 事实上,尽管基本初等函数在其定义域内是连续的,但初等函数在其定义域的某些点上却不一定连续. 例如,初等函数 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$,它的定义域为 $x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 由图 1-3可看出,$f(x)$的定义域是由无穷多个离散点构成的,也就是说,在 $f(x)$定义域中任一点的邻近处都无定义,而定义函数在一点连续的前提条件是函数在该点的某个领域内有定义. 按连续的定义,就不能讨论 $f(x)$在这些点处的连续性,也就不能说$f(x)$在这些点处连续.

图 1-3

27. (§1.9)说明符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 不是初等函数的理由.

答 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,在 $x=0$ 处,$\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sgn}(x)=1$,$\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{sgn}x=-1$,所以函数不连续,这与初等函数在其定义区间内处处连续相违背,所以符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 不是初等函数.

注 在其定义区间内函数有不连续点,可以说明该函数不是初等函数,但在其定义区间内连续的函数,并不一定是初等函数,还需要根据定义判断.

28. (§1.9)若 $f(x)$连续,问$|f(x)|$和 $f^2(x)$是否连续? 又若$|f(x)|$或 $f^2(x)$连续,问 $f(x)$是否连续?

答 若 $f(x)$连续,则$|f(x)|$和 $f^2(x)$也是连续的. 事实上,由$f(x)$连续,推出$|f(x)|$连续很简单,可以把它作为课本第 30 页习题 1-2 的第 4 题的一个特例,因为连续可以看成一个特殊的极限. 至于 $f^2(x)$的连续性,下面给出证明,同学们能看懂最好,看不懂也不必勉强,直接记住结论即可.

证明如下:因为 $f(x)$在 x_0 连续,所以对任给的 $\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-f(x_0)|<\min\left\{\varepsilon,\frac{\varepsilon}{\varepsilon+2|f(x_0)|}\right\},$$

所以

$$\begin{aligned}|f^2(x)-f^2(x_0)|&=|f(x)+f(x_0)|\cdot|f(x)-f(x_0)|\\&=|f(x)-f(x_0)+2f(x_0)|\cdot|f(x)-f(x_0)|\\&<(\varepsilon+2|f(x_0)|)\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon+2|f(x_0)|}=\varepsilon.\end{aligned}$$

证毕.

反之,若$|f(x)|$或 $f^2(x)$连续,则 $f(x)$不一定连续. 例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\-1, & x<0.\end{cases}$$

显然$|f(x)|=f^2(x)=1$处处连续,而 $f(x)$在 $x=0$ 处间断.

29. (§1.10) 有关闭区间上连续函数的性质的定理,均要求所涉及的区间为有界闭区间$[a,b]$,那么对开区间或无穷区间,比如对$[a,+\infty)$或$(-\infty,b)$,这些性质还成立吗?

答　一般不成立.比如函数 $f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,但它在该区间上无最值,也无界.但通过适当地加强条件,还是能使这些性质成立的.

以在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上为例,比如对**有界性定理**,可这样加强条件:设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

若在开区间 (a,b),可这样加强条件得到相应的有界性定理:设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

又如对**最大值、最小值定理**,可这样加强条件:设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且取得正值和负值,又 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必有最大值和最小值.

再如对**零点定理**,可这样加强条件:设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$,且 A,B 异号,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内必存在零点.

当然,同学们可仿照上面,对区间为 $[a,+\infty)$ 或 $(-\infty,b)$ 时加强条件.如在区间 $[a,+\infty)$ 上,这样加强条件来得到零点定理:设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且与 $f(a)$ 异号,则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内必存在零点.

另外,对于同一区间还可设想加另外不同的条件得到零点定理.如同样对 $(-\infty,+\infty)$,可以这样加强条件得到零点定理:设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$(或 $+\infty$),$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$(或 $-\infty$),则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内必存在零点.

以上这些结果完全可以拿过来直接应用.

四、本章方法总结及典型例题分析

(一)函数

1. 函数定义域的求法.

(1)求初等函数的定义域有下列原则:①分母不能为零;②偶次根式的被开方数不能为负数;③对数的真数不能为零或负数;④$\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$;⑤$\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$;⑥$\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

求复杂函数的定义域,通常将复杂函数看成一系列初等函数的复合,然后考查每个初等函数的定义域和值域,得到对应的不等式组,通过联立求解不等式组,就可以得到函数的定义域了.

(2)求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域,一般采用的方法是令 $t=\varphi(x)$,根据 $f(x)$ 的定义域解出 x 的变化范围.

例1　求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域.

解　当 $y=\sqrt{16-x^2}$ 和 $\lg\sin x$ 同时有定义时,函数才有定义,所以

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\end{cases}$$

求解不等式组，得函数的定义域为$-4\leqslant x<-\pi$或$0<x<\pi$.

该函数的定义域用区间表示为$[-4,-\pi]\cup(0,\pi)$.

例 2 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$，求$f(x+a)+f(x-a)$的定义域，其中$a>0$.

(P22 习题 1-1-17(4))

解 已知$f(x)$的定义域是$[0,1]$，对函数$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$来说，

应有
$$x+a\in[0,1] \quad 且 \quad x-a\in[0,1],$$

即
$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$$

$x\in[-a,1-a]\cap[a,1+a]$，注意到因为$a>0$，所以区间$[-a,1-a]$与$[a,1+a]$只可能有两种位置关系，如图 1-4(a)、图 1-4(b)所示.

图 1-4

当$1-a\geqslant a$，即$0<a\leqslant\frac{1}{2}$时，$-a\leqslant a\leqslant 1-a\leqslant 1+a$，此时$f(x+a)+f(x-a)$的定义域是$[a,1-a]$；

当$1-a<a$，即$a>\frac{1}{2}$时，$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为空集$\varnothing$.

例 3 设$f(x-1)$的定义域为$[0,a](a>0)$，求$f(x)$的定义域.

解 $f(x-1)$的定义域是指x的变化范围，即$0\leqslant x\leqslant a$，令$t=x-1$，则$-1\leqslant t\leqslant a-1$，故对$f(t)$而言，$t$的变化范围为$[-1,a-1]$.

所以$f(x)$的定义域为$[-1,a-1]$.

2. 函数表达式的求法.

函数定义的两个要素：定义域和对应法则. 当两个函数定义域相同、对应法则一致时，这两个函数表示同一个函数，如$y=f(x)$，$u=f(v)$等均表示同一函数，这一性质被称为函数表示法的"变量无关性".

通过变量代换及函数表示法的变量无关性可得到函数表达式.

例 4 设$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+1, & x\geqslant 1,\\ x+2, & x<1,\end{cases}$求$f(x+4)$.

解 把$f(x+4)$中的$x+4$作为自变量，代入到$f(x)$的表达式中，