蔡燧林 编

高等数学例题精选

——高等数学竞赛培训教程

清华大学出版社

高等数学例题精选

——高等数学竞赛培训教程

蔡燧林　编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书是为高等学校理工类本科生提高高等数学解题水平，准备参加高等数学竞赛，或为争取考研取得高分而准备的参考书，也可供有关教师日常教学或培训竞赛时参考.读者也可从本书中查到一般教科书上找不到的某些定理的证明.

全书分函数、极限、连续，一元微分学，一元积分学，常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元微分数，多元积分学，无穷级数 8 章.每章分若干节，每节按类型分成若干大段.每段开头，常归纳一下本段中所用的基本方法.每题分"题""分析""解"，必要时加[注]."分析"与[注]是点睛之笔，"分析"点明解题思路，[注]是题的延伸、拓广或明辨是非.本书中不列出常见的定义、定理、公式，只是在多元函数部分列出某些延伸或易被读者疏忽的要点.书中的填空题是简单的计算题；书中的解答题，包括了计算题、论证题和讨论题.每章后均有习题，习题均有答案，证明题均有较详细的提示，有一定难度或技巧的计算题，也给出提示.全书共有例题 306 个，习题 396 个.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学例题精选：高等数学竞赛培训教程/蔡燧林编. --北京：清华大学出版社，2011.5
ISBN 978-7-302-25129-3

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①蔡…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—题解　Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 051616 号

责任编辑：佟丽霞
责任校对：王淑云
责任印制：王秀菊

出版发行：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175
投稿咨询：010-62770175
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座
邮　　编：100084
邮购热线：010-62786544
客户服务：010-62776969
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市兴旺装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印张**：21.75　**字数**：472 千字
版　　次：2011 年 5 月第 1 版　2011 年 5 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：32.00 元

产品编号：039637-01

序

本书的作者蔡燧林先生是浙江大学的资深教授,至今已在高校教坛耕耘50余载.他曾任:浙江大学数学系副主任,原国家教委工科数学课程指导委员会委员,多个学术刊物的编委.

多年来,我与蔡燧林教授相识、相知:他学术水平高,曾在《中国科学》、《科学通报》、《数学学报》、《数学年刊》等一级学报上发表了40多篇学术论文;他主讲过多门数学课程,教学经验丰富,治学严谨,并编著、主编、合编了多部深受好评的数学教材、著作.读者从本书可以看出,他以研究型笔调,从事基础课教学用书的编写.这是一本很有特色的教学用书,它不但可以提高读者分析问题的水平和解题的能力,并且能深化读者对高等数学的概念、理论、方法的理解和掌握.对高等数学的教学与竞赛,一定会有所裨益.

李心灿

2010年冬于北京航空航天大学

前　　言

高等学校(特别是理工类)师生,为讲授、学习高等数学,常因例题、习题过浅而提高不了兴趣或掌握不了问题的实质.参加竞赛,也只能抱着试试看的心情仓促上马,准备时也因缺少参照物而无法下手.数学专业的学生,也可能因运算在某些方面比不上其他理工类的学生而感到烦恼.本书就是为填补这些空白而编写的.

中国数学会“中国大学生数学竞赛组委会”于2009年10月为全国高校学生举办首届高等数学竞赛.为使竞赛不致漫无边际,竞赛组委会指出,非数学专业的高等数学竞赛内容为理工科本科教学大纲规定的高等数学内容.从首届试卷的试题看,其中简单的与研究生入学考试(数学一)的试题难度持平,使参赛者有信心.而难题远高于后者,但也不像奥数那样漫无边际,而是有路可循.可以这么说,竞赛中的难题,比研究生入学考试,可能要添一个台阶,使学生能拾级而上;或者这类题比研究生入学考试,可能因难度系数过大而不适用.本书对于基本题,只是略施笔墨,点到为止.而将主要篇幅用来介绍上述所说的这类问题,介绍概念的分析以及各种方法的综合运用.

全书共分8章,每章分若干节,每节分若干大段.由于篇幅不能太长,所以本书中不列出定义、定理、公式.而对于一般教科书上未深入提及的某些概念之间的关系和重要定理的证明,以及一些方法的阐述,在本书中有时用例题的形式,有时通过一些例题的启发用“分析”与“[注]”的形式给予介绍.例如,读者在本书中将会看到如下一些内容,曲线凹向几个等价性定义的证明,一般情形下如何求锥面、柱面、旋转面的方程,二元函数的二重极限与逐次极限,连续,偏导数,全微分,方向导数等等之间的关系及各种情形下的反例,混合偏导数不相等的例子,多元函数各种积分方法的例子,级数收敛性的阿贝尔判别法与狄里克雷判别法,傅里叶级数的封闭性方程等等.

本书中的例题与习题分填空题与解答题两类.填空题是简单的计算题或简单的论证题(例如级数中的判敛),解答题包括计算题、论证题和讨论题三种.考

研题中的选择题，将它改造成填空题或论证题．全书共有例题 306 个，习题 396 个．习题中的计算题全有答案，较难的计算题及论证题给出较详细的提示．

本书中只是在个别题中用到 ε-δ 来解题，例如施笃兹定理的证明及与此类似的洛必达法则中只是在分母趋于无穷的情形等某些地方．本书中不要求读者知道“柯西收敛准则”．全书不涉及“一致连续”，“一致收敛”，“确界”，“达布和”，“上、下极限”，“囿变”等数学分析中的概念．

本书在编写过程中，除参考一般教科书外，参考了下列书籍：

（1）大学生数学竞赛试题研究生入学考试难题解析选编，李心灿等编，机械工业出版社，2005 年．

（2）数学分析习题集，吉米多维奇著，高等教育出版社，2010 年．

由于作者水平有限，不当之处，敬请读者在使用本书过程中不吝指正．

蔡燧林

2010 年 7 月于浙江大学理学部数学系

目　　录

第一章　函数、极限、连续

本章主要内容如下：

(1) 函数的概念及表示法、简单应用问题的函数关系的建立.

(2) 函数的性质：有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数.

(4) 数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限与右极限.

(5) 无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较.

(6) 极限的四则运算、极限存在的单调有界准则和夹逼准则、两个重要极限.

(7) 函数的连续性(含左连续与右连续)、函数间断点的类型.

(8) 连续函数的性质和初等函数的连续性.

(9) 闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理).

1.1　函数

上述内容中有关本书的知识，实际上贯穿于整个高等数学之中. 例如，在极限中，有时要检查有否有界性和单调性，利用导数可以研究单调性，弄清楚有否奇、偶性，对于定积分甚至重积分的计算会带来方便. 将复合函数分解为一些基本初等函数的复合，是求导的重要一环. 基本初等函数及其图形，可以说是无处不用. 最大值、最小值问题，定积分应用，常微分方程，都与建立函数关系有关，等等. 所以许多问题不是本节中单独处理的.

以下仅就 ①由函数的奇、偶性与周期性构造函数；②求分段函数的复合函数；③求简单函数的反函数；④关于函数有界(无界)的讨论这四类问题举例于后.

一、由函数的奇、偶性与周期性构造函数

例 1　设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义且是周期为 2 的奇函数. 已知 $x\in(0,1)$时 $f(x)=\ln x+\cos x+e^{x+1}$，则当 $x\in[-4,-2]$时，$f(x)=$____.

分析　由奇函数，可由区间$(0,1)$上的表达式得到区间$(-1,0)$上的表达式；再由周期为 2，可得到区间$(-3,-2)$上的表达式；再由区间$(0,1)$上的表达式及周期 2，可得到区间$(-4,-3)$上的表达式. 最后，由奇函数及周期性可计算出 $f(0)$，$f(-2)$，$f(-3)$及 $f(-4)$的值.

解 应填

$$f(x)=\begin{cases}\ln(x+4)+\cos(x+4)+\mathrm{e}^{x+5}, & \text{当 } x\in(-4,-3);\\ -\ln|x+2|-\cos(x+2)-\mathrm{e}^{-x-1}, & \text{当 } x\in(-3,-2);\\ 0, & \text{当 } x=-4,-3,-2.\end{cases}$$

设 $x\in(-1,0)$，有 $-x\in(0,1)$. 由奇函数性质，有

$$\begin{aligned}f(x)&=-f(-x)=-\ln(-x)-\cos(-x)-\mathrm{e}^{-x+1}\\&=-\ln|x|-\cos x-\mathrm{e}^{-x+1}.\end{aligned}$$

设 $x\in(-3,-2)$，有 $x+2\in(-1,0)$. 由周期性，有

$$f(x)=f(x+2)=-\ln|x+2|-\cos(x+2)-\mathrm{e}^{-x-1}.$$

设 $x\in(-4,-3)$，有 $x+4\in(0,1)$. 由周期性，有

$$f(x)=f(x+4)=\ln(x+4)+\cos(x+4)+\mathrm{e}^{x+5}.$$

又由题设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且为奇函数，故 $f(0)=0$. 再由周期为 2，故 $f(-2)=f(0)=0$. $f(-3)=f(-1)=-f(1)=-f(1-2)=-f(-1)$，所以 $f(-1)=0$，从而 $f(-3)=0$. $f(-4)=f(-2)=0$. 最后得 $f(x)$ 如上所填.

二、求分段函数的复合函数

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(x))=$____.

分析 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是分段函数，求 $f(g(x))$ 的表达式时，由外层函数 f，写出复合函数的表达式，并同时写出中间变量（即内层函数 g）的取值范围；然后按内层函数（即 $g(x)$）的分段表达式，过渡到自变量的变化范围，得到分段表达式. 如果要求 $g(f(x))$ 的表达式，亦类似.

解 应填

$$f(f(x))=\begin{cases}(x^2-2x)^2, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2, & \text{当 } x>1;\\ \dfrac{1}{2x-x^2}, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

因

$$f(f(x))=\begin{cases}(f(x)-1)^2, & f(x)\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-f(x)}, & f(x)>1,\end{cases}$$

又由 $f(x)$ 的定义，进而有

$$f(f(x))=\begin{cases}((x-1)^2-1)^2, & \text{当}(x-1)^2\leqslant 1\text{ 且 }x\leqslant 1,\\ \left(\dfrac{1}{1-x}-1\right)^2, & \text{当}\dfrac{1}{1-x}\leqslant 1\text{ 且 }x>1,\\ \dfrac{1}{1-(x-1)^2}, & \text{当}(x-1)^2>1\text{ 且 }x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}, & \text{当}\dfrac{1}{1-x}>1\text{ 且 }x>1.\end{cases}$$

因为$\dfrac{1}{1-x}>1$与 $x>1$ 之交为空集，弃之，并再化简，得 $f(x)$的表达式如上所填.

三、求简单函数的反函数

例 3　求函数 $y=f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$的反函数 $y=f^{-1}(x)$及其定义域.

解　因为 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$为奇函数.

由 $y=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$，易见，当 $x>0$ 时 $y<0$，当 $x<0$ 时 $y>0$. 为了解出 x，两边平方，得

$$\begin{aligned}y^2&=x^2-x+1+x^2+x+1-2\sqrt{(x^2+1)^2-x^2}\\&=2(x^2+1)-2\sqrt{x^4+x^2+1}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

移项，

$$2\sqrt{x^4+x^2+1}=2(x^2+1)-y^2,$$

两边再平方，化简，得

$$x^2(4-4y^2)=4y^2-y^4,$$

$$x^2=\frac{y^2}{4}\left(\frac{4-y^2}{1-y^2}\right).$$

解出 x，并注意到 x 与 y 反号，得

$$x=-\frac{y}{2}\sqrt{\frac{4-y^2}{1-y^2}}.\tag{1.2}$$

为了确定反函数(1.2)的定义域，为此要讨论直接函数的值域. 由式(1.1)去证 $y^2<1$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}y^2=1$. 若确实如此，则说明直接函数的值域为$\{y\mid |y|<1\}$.

设 $y^2\geqslant 1$，即设 $2(x^2+1)-2\sqrt{x^4+x^2+1}\geqslant 1$，移项、两边平方，得

$$2x^2+1\geqslant 2\sqrt{x^4+x^2+1},$$

两边再平方得 $4x^4+4x^2+1\geqslant 4(x^4+x^2+1)$，这是个矛盾. 所以 $y^2<1$. 又

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}y^2&=\lim_{x\to\infty}\left(2(x^2+1)-2\sqrt{x^4+x^2+1}\right)\\&=2\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1-(x^4+x^2+1)}{x^2+1+\sqrt{x^4+x^2+1}}=1.\end{aligned}$$

所以直接函数的值域为$\{y\mid |y|<1\}$，因此反函数(1.2)的定义域为$\{y\mid |y|<1\}$. 改写记号，所以反函数为

$$y=-\frac{x}{2}\sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}}\text{，定义域为}\{x\mid |x|<1\}.$$

［注］　仅由式(1.2)还无法推知反函数(1.2)的定义域，而应该由“直接函数的值域为反函数的定义域”来确定反函数的定义域.

四、关于函数有界(无界)的讨论

关于函数有界(无界)的定理，散见于教科书的不同章节，常被读者疏忽. 为方便读者使用，今将它写成如下定理.

定理 1.1.1　(关于有界、无界的充分条件)

(1) 设$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在，则存在$\delta>0$，当$-\delta<x-x_0<0$时，$f(x)$有界；对$x\to x_0^+$，$x\to x_0$有类似的结论.

(2) 设$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在，则存在$X>0$，当$|x|>X$时，$f(x)$有界；对$x\to+\infty$，$x\to-\infty$有类似的结论.

(3) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

(4) 设$f(x)$在数集U上有最大值(最小值)，则$f(x)$在U上有上(下)界.

(5) 有界函数与有界函数之和、积均为有界函数.

以上均为充分条件，其逆均不成立.

(6) 设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$，则$f(x)$在$\square$的去心邻域内无界. 但其逆不成立. 这里的$\square$可以是$x_0$，$x_0^-$，$x_0^+$，$\infty$，$-\infty$，$+\infty$中6种情形的任一种.

例 4　设　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^3-1)\sin x}{(x^2+1)|x|}, & \text{当 } x\neq 0,\\ \text{无定义}, & \text{当 } x=0.\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0.\end{cases}$试讨论$f(x)$与$g(x)$在它们各自的定义域上的有界性与无界性.

解　先讨论$f(x)$. 因$\lim\limits_{x\to 0^\pm}\dfrac{\sin x}{|x|}=\pm 1$，$\lim\limits_{x\to 0^\pm}\dfrac{x^3-1}{x^2+1}=-1$，所以$\lim\limits_{x\to 0^\pm}f(x)=\mp 1$. 从而知，存在$\delta>0$，在$x=0$的去心$\delta$邻域$\mathring{U}_\delta(0)=\{x\mid -\delta<x<\delta, x\neq 0\}$内，$f(x)$有界.

又因$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-1}{(x^2+1)|x|}=\pm 1$，所以存在$X>0$，当$|x|>X$时，$\dfrac{x^3-1}{(x^2+1)|x|}$有界，而$\sin x$显然有界，所以$f(x)$在$\{x\mid (-\infty<x<-X)\cup(X<x<+\infty)\}$内有界.

再因$f(x)$分别在区间$[-X,-\delta]$与$[\delta,X]$上连续，从而知有界.

合并前述三项知$f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上有界.

再讨论 $g(x)$. 对于任给的 $M>0$，取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，有

$$g(x_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

当 $n>\dfrac{M}{2\pi}-\dfrac{1}{4}$ 时，$g(x_n)>M$. 即对于任给的 $M>0$，总存在 x_n，其中 $n>\dfrac{M}{2\pi}-\dfrac{1}{4}$（这种 n 总是有的），使 $g(x_n)>M$，说明 $g(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内无界.

［注］　改变有限个点处的函数值，不影响该函数的有界（无界）性. 又，若取 $x_n'=\dfrac{1}{2n\pi}$，则有 $g(x_n')=0$. 故知 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\neq\infty$. 此例也说明：$g(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内无界，并不一定有 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$. 无穷是无界的充分条件而不是必要条件.

1.2　极限

本节主要内容有：求函数的极限，包括已知某极限求另一极限，已知某极限求其中的某些参数，无穷小的比较及无穷小的阶；讨论数列极限的存在性及求数列的极限，包括用 ε-N 证明数列的极限的存在性，利用积分和式求极限，利用夹逼定理求极限，利用单调有界定理证明极限的存在性，利用级数的敛散性讨论相关的极限等等. 在竞赛中，数列极限的题往往多于函数的极限的题，且比后者难.

一、求函数的极限

函数的极限，主要是求 7 种待定型的极限. 这 7 种待定型是：$\dfrac{0}{0}$ 型，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，$0\cdot\infty$ 型，$\infty-\infty$ 型，1^{∞} 型，0^0 型，∞^0 型. 处理的方法是：

（1）用初等数学（例如三角、对数、指数、分子与分母同乘以某式、提公因式等）中的恒等变形，使得能约分的就约分，能化简就化简；

（2）如果有那种因式（因式，不是项），它的极限存在但不为 0，那么可将这种因式按乘积运算法则提出来另求，剩下的再另行处理；

（3）用等价无穷小替换；

（4）用洛必达法则（“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型中“分子→∞”这一条件可以省去，结论不变）；

（5）用泰勒公式，或拉格朗日中值公式，或积分中值公式；

（6）有时要用到夹逼定理；

（7）最后都可能归结到极限的四则运算定理，复合函数求极限，连续函数求极限，以及几个重要极限；

(8) 第二章中还会提到用导数定义求极限.

例 1　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

分析　易见为"$\dfrac{0}{0}$"型.若立即用洛必达法则,会带来复杂的运算.宜先按下列顺序化简:(1)将幂指函数化成指数函数;(2)拆项计算(项,不是因式),其中拆开的各项的极限可以分别计算;(3)用等价无穷小替换.

解　$\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2+e^2\ln(1+x)}{x}$,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2$,

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}$$

$$\overset{等}{=\!=}e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}=2e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$\overset{洛}{=\!=}2e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2,$$

其中"等"表示用了等价无穷小替换,"洛"用了洛必达法则.所以原式$=0$.

例 2　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\cos x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}$.

分析　一时还弄不清是否为"$\dfrac{0}{0}$"型.应先考虑$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\cos x}$,再进一步讨论.

解　$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\cos x}$.

而

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x-1+1)}{x}$$

$$\overset{等}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=0,(\text{用到}:u\to0\text{ 时 }\ln(1+u)\sim u)$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln\cos x}-1}{x}$$

$$\overset{等}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\ln\cos x}{x}\quad(\text{用到}:u\to0\text{ 时 }e^u-1\sim u)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

例 3　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$.

分析　显然为"$\frac{0}{0}$"型. 直接用洛必达法则,显然是不可取的. 先将分子变形拆成两项之和处理之.

解　$$\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)+\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$$
$$=\frac{\sec^2\xi\cdot(\tan x-\sin x)}{x-\sin x}+\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x},$$

其中 $\sin x<\xi<\tan x$. 前一项,由$\lim\limits_{x\to 0}\sec^2\xi=\sec^2 0=1$,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2\xi\cdot(\tan x-\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{(x-\sin x)\cos x}$$
$$\overset{\text{等}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2(x-\sin x)}\overset{\text{洛}}{=}\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=3,$$

对于后一项,命 $t=\sin x$,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t-\sin t}{\arcsin t-t}$$
$$\overset{\text{洛}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sec^2 t-\cos t}{\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^3 t}{1-(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\overset{\text{洛}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{3\cos^2 t\sin t}{t(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}}=3.$$

所以原式 $=3+3=6$.

例 4　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续,$f(0)\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}=$____.

分析　此为"$\frac{0}{0}$"型,用洛必达法则对 x 求导时,宜先将积分号内的 x 变形到积分号上、下限中,或积分号外面. 为此,分子应拆项,分母应作积分变量变换.

解　应填$\frac{1}{2}$.

$$\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$
$$\overset{\text{洛}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)}.$$

仍为“$\frac{0}{0}$”型，但不能再用洛必达法则，因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内未设可导，不满足洛必达法则中通常所说的第 2 个条件，以下用两个方法.

方法 1　用积分中值定理，下式中 ξ 介于 0 与 x 之间，

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(\xi)}{f(\xi)+f(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

方法 2

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+f(x)}.$$

由洛必达法则，

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1}=f(0),$$

从而

$$原式=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\lim\limits_{x\to0}f(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

例 5　设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(x)>0$. 在曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x,f(x))$ $(x\neq0)$ 处作此曲线的切线，此切线在 x 轴上的截距记为 u，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(u)}{uf(x)}$.

分析　按题目要求一步步往下做即可. 条件中给出 $f(x)$ 具有二阶连续导数，想到用拉格朗日余项泰勒公式.

解　过点 $(x,f(x))$ 的曲线 $y=f(x)$ 的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

它在 x 轴上的截距

$$u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(由于 $f'(0)=0$，$f''(x)>0$ 知，当 $x\neq0$ 时 $f'(x)\neq0$). 将 $f(x)$ 按拉格朗日余项泰勒公式展开：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2,$$

于是

$$f(u)=\frac{1}{2}f''(\xi_2)u^2.$$

代入欲求之式，并由 $f''(x)$ 的连续性，有

$$\lim_{x\to0}\frac{xf(u)}{uf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}xf''(\xi_2)u^2}{\frac{1}{2}uf''(\xi_1)x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f''(\xi_2)}{f''(\xi_1)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)-f(x)}{xf'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{xf''(x)}{xf''(x)+f'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{f''(x)+\dfrac{f'(x)}{x}}=\frac{1}{2}.$$

其中最后一步来自：$\lim\limits_{x\to0}f''(x)=f''(0)$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{1}=f''(0)$.

例 6　以 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，a 为常数，设

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)$$

极限存在，则 $a=$____，此极限值=____.

分析　一般说来，含有 $|x|$，$e^{\frac{1}{x}}$，讨论 $x\to0$ 时的极限，含有 $[x]$ 讨论 x 趋于整数时的极限，应分左、右极限讨论之.

解　应填 $a=-2$，此极限值$=2$.

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+(-a)$$

$$\xlongequal{\text{等}}\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}-a=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}-a=-a;$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{2}{x}+\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}+0$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2+x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{1+x\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}=2.$$

所以当且仅当 $a=-2$ 时，该极限存在，极限值为 2.

例 7　已知常数 a,b 均不为零，且

$$l=\lim_{x\to0}\frac{(1+ax)^{\frac{1}{2}}+(1+bx)^{\frac{1}{3}}-2}{x^2}=-\frac{3}{2},$$

则 $a=$____，$b=$____.

分析　此为"$\dfrac{0}{0}$"型，由于参数待求，所以在继续用洛必达法则时，要适当讨论. 本题也可分别将 $(1+ax)^{\frac{1}{2}}$ 与 $(1+bx)^{\frac{1}{3}}$ 按佩亚诺余项泰勒公式展开. 读者将会发现，用后一方法比前者省事.

解　应填 $a=\pm2$，$b=\mp3$.