新生宝典

高等学校通用教材

高等数学

教与学

（同步辅导）

GAODENGSHUXUEJIAOYUXUE

姜长友　张武军　◎主　编
魏保军　郭从洲　◎副主编

北京航空航天大学出版社

新生宝典　　　　高等学校通用教材

高等数学教与学

（同步辅导）

姜长友　张武军　主　编
魏保军　郭丛洲　副主编

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

根据全国普通高校工科本科生的《高等数学课程基础要求》和《全国硕士研究生入学统一考试的数学考试大纲》中有关高等数学部分内容，以及同济大学应用数学系主编的《高等数学》(上、下册)第五版章节顺序和知识点编写了本教材。书中内容既兼顾了大学一年级学生学习《高等数学》的需求，又兼顾了高年级学生考研辅导需要。

全书共分12章和两个附录。每章由“教与学要求”、“内容提要”、“典型例题分析”、“练习题”和“自测题”五部分组成。本书的重点为“内容提要”和“典型例题分析”。在“内容提要”中，除提示三基(基本概念、基本理论和基本方法)外，注意了内容间的前后联系和重、难点讲解，分析了内涵与外延，还有常见解题方法的总结与注意事项。在“典型例题分析”中，例题选取力求多样，既有常见题型，又有综合题型、一题多解题型，也有部分考研真题。例题不仅仅给出解答，还重点给出了分析或说明；“练习题”给出了详细解答，“自测题”给出答案和详细提示。两个附录分别为微积分发展简史和极坐标。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教与学：同步辅导/姜长友等主编. --北京：北京航空航天大学出版社，2010.6

ISBN 978-7-5124-0065-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①姜… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第065430号

高等数学教与学(同步辅导)

姜长友　张武军　主　编

魏保军　郭丛洲　副主编

责任编辑　金友泉

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191)　http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024　传真：(010)82328026

读者信箱：bhpress@263.net　邮购电话：(010)82316936

印刷厂印装　各地书店经销

*

开本：787 mm×960 mm　1/16　印张：29.5　字数：661千字

2010年6月第1版　2010年6月第1次印刷　印数：0～4 000册

ISBN 978-7-5124-0065-8　定价：32.00元

前言

高等数学，是人类智慧最伟大的成就之一。17世纪，受天文学方面问题的启发，牛顿和莱布尼兹各自发明了微积分理论。自那时以来，每一世纪都证明了微积分在阐明数学、物理科学、工程学以及社会和生物科学等方面的强大威力。可以说，高等数学是整个近代及现代科学技术得以迅速发展的基础。要想理解近代及现代科学技术，不学习高等数学是几乎不可能的。因此，在我国各大学，不管是文科专业还是理科专业，大都开设高等数学课程。特别是，对于工科院校的学生来说，高等数学是他们掌握数学工具、学好专业知识的一门重要的基础理论课。要学好高等数学这门课程；第一，要完成从中学到大学的学习方法的转变，建立适合自己的学习数学的方法；第二，要提高分析问题、解决问题的能力，从中得到高等数学逻辑严谨、环环相扣的数学美的熏陶，提高学生学习数学的积极性；第三，更重要的是让学生体会到高等数学中发现问题、提出问题，最后解决问题的思想方法——即数学思想，使学生得到创新意识的启迪。

本书的特点是：

1. 本书内容根据我国普通高校工科本科生的《高等数学课程基础要求》和《全国硕士研究生入学统一考试的数学考试大纲》中有关高等数学部分内容，以及同济大学应用数学系主编的《高等数学》(上、下册)第五版章节顺序及知识点编写。全书由正文12章和两个附录组成。书中内容既兼顾了大学一年级学生学习《高等数学》的需求，又兼顾了知识点的综合应用，因而，也可作为高年级学生考研辅导参考书。

2. 书中由每章的"教与学要求"、每节的"内容提要"、"典型例题分析"、"练习题"和每章的"自测题"五部分组成。根据教学大纲与考研要求，在"教与学要求"中对基本概念、基本理论和基本方法提出了不同的要求，即熟练掌握、理解、了解等。在"内容提要"中，除提示三基外，注意了内容间的前后联系和重、难点讲解，分析了内涵与外延，还有常见解题方法的总结与注意事项。在"典型例题分析"中，例题选取力求多样，既有常见题型，又有综合题型、一题多解题型，也有部分考研真题；例题不仅仅给出解答，还重点给出了分析或说明。在分析或说明中指出了解题的基本思想或常用方法或易犯错误或选此例题的目的等，使学生既掌握了常见的解题方法与技巧，又扩充了知识面。"练习题"给出了详细解答，"自测题"给出了答案和详细提示。附录一、二分别给出了微积分发展简史和极坐标系，以使读者初步了解微积分的发生、发

展和完善的过程。而极坐标是高等数学内容之一,但中学又讲的很少,本书给予讲解,以利应用。

参加本书编写的同志有从事基础数学教学几十年的老教师,也有教学工作非常优秀,知识结构、层次较高的博士和硕士教师。他们深知一年级学生在学习高等数学这门课的过程中会遇到的困难和要求,将他们的经验渗透到书中的细节之中。姜长友同志执笔第4、8、9、10章,张武军同志执笔第1、2、3、5、6章,魏保军同志执笔第7、11、12章,郭丛洲同志执笔附录和提供部分练习题。姜长友、张武军同志统阅书稿并加以润色。

在编书过程中,得到中国人民解放军信息工程大学理学院领导和机关的大力支持,其数学物理系主任崔国忠同志审阅了全稿。在此表示感谢!

因水平有限,书中疏漏之处,恳请读者提出批评与指正。

编　者

2010年3月

目　　录

第1章　函数与极限

教与学要求

(1) 理解函数、复合函数、基本初等函数和初等函数的概念;掌握函数的表示法.

(2) 会求函数的定义域、值域、反函数、复合函数和三角函数的最小正周期;知道原函数与反函数、奇偶函数图像的性质.

(3) 理解邻域、函数的单调性、有界性、奇偶性和周期性的概念.

(4) 会正确分析复合函数的复合过程,能区分分段函数与初等函数.

(5) 会建立简单应用问题的函数关系式.

(6) 深刻理解各种极限的概念,掌握极限的性质及极根存在与左右极限的关系.

(7) 熟练掌握四则运算法则.

(8) 熟练掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限;熟练掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(9) 理解无穷小、无穷大的概念;掌握无穷小的比较法,会熟练应用等价无穷小求极限.

(10) 理解函数在一点左(右)连续、连续、区间上连续的概念,会判断函数间断点的类型.

(11) 知道初等函数的连续性和连续函数的性质;知道闭区间上连续函数的性质,并会应用这些性质.

1.1　映射与函数

1.1.1　内容提要

1. 集合及其运算

集合及其运算:注意区分集合与集合、元素与集合之间的关系.集合与集合之间是包含与被包含的关系,用符号“$\subset$”、“$\not\subset$”等表示两集合之间的关系;元素与集合之间是从属关系,用符号“$\in$”或“$\notin$”表示元素与集合之间的关系.

常见集合:一般用 **N**、**Z**、**Q**、**R**、**C** 分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集.用 $U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}$、$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$ 分别表示点 x_0 的 δ 邻域和 δ 去心邻域.

2. 映射、单射、满射、一一映射、逆映射与复合映射(有关定义略)

(1)构成映射的三要素:定义域、值域和对应法则.

(2)映射的像唯一,但原像不一定唯一;设 $f:X\to Y$,$\forall x\in X$,在集合 Y 中必须有像与之对应,从而知 f 的值域 $R_f\subset Y$,但 $R_f=Y$ 不一定成立.

(3)逆映射是指 $R_f\to X$ 的映射,而不是 $Y\to X$ 的映射.

3. 函 数(定义略)

(1)函数概念的两要素:由于函数的值域 $R_f\subset R$,当定义域和对应法则确定后,其值域完全确定,所以习惯上把定义域和对应法则称为函数的两要素.因此,当且仅当两函数的定义域和对应法则相同,称两函数相同.

(2)函数的表示法与变量用什么字母表示无关,即 $y=f(x)$,$v=f(t)$等均表示同一函数.

(3)在数学上,有时需研究多值函数(自变量 x 对应多个函数值).如由方程 $x^2+y^2=1$ 可得:$y=\pm\sqrt{1-x^2}$,这时,可通过分别研究 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 的性质研究其有关性质.因此,高等数学上所研究的函数的性质全是指单值函数的性质,以后未特殊说明,所指函数均是指单值函数.

4. 函数的四个特性

奇偶性、周期性、单调性和有界性是函数具有的 4 个特性.

(1) 奇偶性:可根据定义或函数图像的性质判断函数的奇偶性.须注意,当函数的定义域关于原点不对称时,该函数必是非奇偶函数.

常见的结论:

奇(偶)函数与奇(偶)函数和或差仍是奇(偶)函数;

奇函数与偶函数的积或商是奇函数;

奇函数与奇函数、偶函数与偶函数的积或商是偶函数.

(2) 单调性:可利用基本初等函数的性质、单调性定义、导函数的正(负)来判断函数的单调性.讨论函数的单调性,必须指明相应的区间,如不能说函数 $f(x)=x^2$ 为单调函数.因为在区间$(-\infty,0]$上该函数单调递减,而在区间$[0,+\infty)$上该函数单调递增.

(3) 周期性:若 T 为函数的一个周期,则 kT(k 为整数)也是该函数的周期,从而一个周期函数必有无穷多个周期,也必有正周期;不是任何周期函数都有最小正周期,如函数 $f(x)=1$,任意实数 T 均是其周期,该函数不存在最小正周期;三角函数是常见的具有最小正周期的周期函数.一般地,若 $f(x)$,$g(x)$分别是以 T_1、T_2($T_1\neq T_2$)为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$是以 T_1、T_2 的最小公倍数为周期的函数.

(4) 有界性:$\exists M>0$,对 $\forall x\in X$,均有$|f(x)|\leqslant M$.函数有界性定义中的界"M",一般与函数本身及讨论的区间有关.为方便确定 M,定义中只关心 M 的存在性,并不要求 M 唯一,也要求是使$|f(x)|\leqslant M$ 成立的最小正数.

常见的有界函数：$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$|\arccos x|\leqslant\pi$，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，$|\operatorname{arccot} x|<\pi$.

5. 反函数和复合函数

(1) 原函数和其反函数互为反函数，其定义域和值域正好互换. 函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像在同一坐标系中关于直线 $y=x$ 对称；但若不对换变量 x 和 y 的位置，则函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像在同一坐标系中完全重合.

(2) 复合函数的分解主要是通过引入中间变量，把一个较复杂的函数分解成若干个比较简单的函数；将复合函数分解成若干个简单的函数时，其分解方式并不唯一. 如 $y=e^{2x}$，可以看成由函数 $y=e^u$ 和函数 $u=2x$ 复合而成的复合函数；也可以看成由函数 $y=u^2$ 和函数 $u=e^x$ 复合而成的复合函数. 另外，须注意，并不是任何两个函数都能复合.

6. 基本初等函数、初等函数、分段函数

三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数和幂函数五大类函数统称为基本初等函数.

初等函数必须是由基本初等函数和常数经过有限次四则运算及有限次复合运算形成的用一个式子表示的函数. 如 $y=n!$（n 为自然数），不是初等函数. 因为随着 n 的增大，$y=n!$ 的运算次数也不断增大，即 $y=n!$ 不是经过有限次运算形成的函数，所以该函数不是初等函数.

分段函数一般不是初等函数，但如果分段函数能用一个式子表示，也是初等函数. 如

$$|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

就是初等函数. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$，$g(x)$ 在区间 $[b,c]$ 上都是初等函数，且 $f(b)=g(b)$，则分段函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x) & x\in[a,b]\\ g(x) & x\in(b,c]\end{cases}$$

必是初等函数. 这是因为

$$\varphi(x)=f\left(\frac{x-b-|x-b|}{2}+b\right)+g\left(\frac{x-b+|x-b|}{2}+b\right)-f(b)$$

利用该结论很容易判断函数

$$f(x)=\begin{cases}e^x & x\geqslant 0\\ \cos x & x<0\end{cases}$$

是初等函数.

对于分段函数，除特殊需求外，通常没必要去鉴定它是否为初等函数.

分段函数的定义域是构成分段函数的各个解析式所对应的区间的并集；不能把分段函数看成多个函数. 例如分段函数，最值函数.

常见的分段函数：取整函数 $[x]$；符号函数 $\operatorname{sgn} x$；狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in R-Q\end{cases}$.

最值函数：$\max\{f(x),g(x)\}=\dfrac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$，

$$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}.$$

7. 建立函数关系式

建立较简单的函数关系式是解决实际问题的关键，通常应适当选取自变量与因变量；在建立好函数关系式后，还须根据实际意义指明其定义域.

1.1.2 典型例题分析

【例 1】 设映射 $f: X\to Y$，若存在映射 $g: Y\to X$，使 $g\circ f=I_X$，$f\circ g=I_Y$，其中 I_X、I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射. 证明：f 是双射，g 是 f 的逆映射.

分析 要证明 f 是双射，须证明 f 是满射，即 $\forall y\in Y$，$\exists x\in X$，使得 $f(x)=y$；f 是单射，即 $\forall x_1$、$x_2\in X$，且 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$成立.

证明 $\forall y\in Y$，记 $x=g(y)\in X$，有 $y=I_Y(y)=f(g(y))=f(x)$，所以 f 是满射.

$\forall x_1$、$x_2\in X$，且 $x_1\neq x_2$，由于 $x_1=I_X(x_1)=g(f(x_1))\neq g(f(x_2))=x_2$，故 $f(x_1)\neq f(x_2)$，所以 f 是单射.

综上所述，f 是双射.

由上述证明可知，f 存在逆映射. 且由 $\forall y\in Y$，有 $y=f(g(y))=f(x)$ 知：$x=f^{-1}(y)=g(y)$，所以

$$g=f^{-1}$$

【例 2】 若函数 $y=f(x)$的定义域为$(0,1]$，$g(x)=1-\ln x$，求 $y=f(g(x))$的定义域.

分析 $y=f(g(x))$的定义域应满足：$0<g(x)\leqslant 1$.

解 由于 $y=f(x)$的定义域为$(0,1]$，所以，$0<g(x)=1-\ln x\leqslant 1$，解得

$$1\leqslant x<\mathrm{e}$$

所以，$y=f(g(x))$的定义域为$[1,\mathrm{e})$.

【例 3】 已知 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，求 $f(x)$.

分析 函数记号中 $f(x)$的 f 是表示函数关系中的对应法则，$f(\sin x)$表示此对应法则作用在变量 $\sin x$ 上，而 $f(x)$表示此对应法则作用在变量 x 上. 本题就是要求出这个特定的对应法则，一般可用代换和拼凑两种方法.

解法 1 $f(\sin x)=\cos 2x+1=2-2\sin^2 x$，

故
$$f(x)=2-2x^2$$

解法 2 令 $t=\sin x$，则 $x=\arcsin t$，因此

$$f(t)=f(\sin x)=\cos(2\arcsin t)+1=2-2t^2$$

所以
$$f(x)=2-2x^2$$