前 言

本书是根据教育部《高等数学课程教学基本要求》和教育教学改革的实践编写的。在编写过程中，我们研究分析了现行的几种版本的《高等数学》教材，吸纳了各版本教材的优点，融进了近几年在高等数学教学科研中取得的成果，使本书更加适合高等数学教学要求。

本书分上下两册，上册内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分以及应用，空间解析几何等，下册包括多元函数微积分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程。各章均配有习题，便于读者及时对所学知识巩固提高。为了及时巩固所学知识点，本书每章、节后都提供了课后习题，所对应的参考答案可以从 http://pcbook.hongen.com/ 上下载。

为了使本书适合高校不同专业的使用，我们将较深的内容或超出高等数学基本要求的内容用“*”标出以作为选学。

本书第七章、第八章和第九章由雷晓军编写，第十章由李强编写，第十一章由罗建斌编写。

由于我们的研究能力、学术水平以及编写时间的限制，教材中难免有疏漏和不当之处，恳切期望读者批评指正，以便进一步修改和完善。

编 者

2008 年 8 月

目　录

第七章　多元函数微分法及其应用

在第二章和第三章中，我们已经研究了一元函数的微分法及其应用．本章将以此为基础，讨论多元函数的微分法及其应用．多元函数微分法是一元函数微分法的推广和发展，学习时要注意两者的区别和联系．由于从一元函数到二元函数有许多本质的变化，而二元函数到二元以上的函数只有自变量的个数不同，没有本质的区别，完全可以将有关的内容类推．因此，本章的讨论以二元函数为主．

第一节　多元函数

本节先将一元函数所涉及的邻域和区间的定义推广，然后介绍多元函数概念，多元函数的极限和多元函数的连续性．

一、　多元函数概念

（1）区域

设$P_0(a,b)$是xoy平面上的一个点，δ是某一正数．与点$P_0(a,b)$的距离小于δ的所有点$P(x,y)$的集合，称为点$P_0(a,b)$的δ邻域，记为$U_\delta(P_0)$，即

$$U_\delta(P_0)=\left\{P\middle||P_0P|<\delta\right\}=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\right\}$$

$U_\delta(P_0)$在几何上表示xoy平面上以点$P_0(a,b)$为中心，以δ为半径的圆内的所有点．如果去掉邻域的中心，称为点$P_0(a,b)$的空心的δ邻域，记为$\mathring{U}_\delta(P_0)$，即

$$\begin{aligned}\mathring{U}_\delta(P_0)&=\left\{P\middle|0<|P_0P|<\delta\right\}\\&=\left\{(x,y)\middle|0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\right\}\end{aligned}$$

如果不考虑邻域的半径，则用$U(P_0)$表示点P_0的某一邻域，$\mathring{U}(P_0)$表示点P_0的某一空心邻域．

设E是平面点集，P是平面上一点．如果存在点P的某一邻域$U(\mathrm{p})$，使$U(\mathrm{p})\subset E$，则称点P是E的内点．显然，$P\in E$（如图7.1）．

如果点集E的任意点都是内点，则称E是开集．例如$E=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$，E中所有点都是E的内点，所以E是开集．

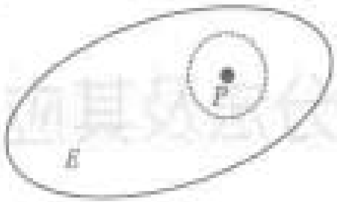

图 7.1

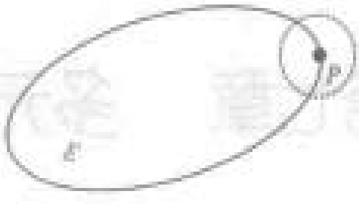

图 7.2

如果在点 P 的任意邻域内，既有点属于 E，同时又有点不属于 E，则称点 P 是 E 的**边界点**，（如图 7.2）．E 的所有边界点组成的集合，称为 E 的**边界**．例如 $E=\left\{(x,y)\middle|1<x^2+y^2<2\right\}$ 的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=2$．由此可见，点集 E 的边界点（或边界）可能属于 E，也可能不属于 E．

设 E 是开集．如果 E 内任意两点都能用属于 E 的折线连结起来，则称开集 E 是**连通的**．

连通的开集称为**开区域**．开区域添上它的边界一起，称为**闭区域**．例如 $\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2>1\right\}$ 是开区域，$\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\geq1\right\}$ 是闭区域．

有时为简便起见，并在不致引起混淆的情况下，将开区域和闭区域都笼统地简称为**区域**．

设 E 是平面点集．如果存在某一正数 R，使 $E\subset U_R(O)$，点 O 为原点，则称 E 是**有界集**．否则，E 是**无界集**．例如 $\left\{(x,y)\middle|1<x^2+y^2<2\right\}$ 是**有界开区域**，$\{(x,y)\mid x+y\geq1\}$ 是无界闭区域．

（2）n 维空间

在空间解析几何中，引入直角坐标系后，使得空间的点与有序的三元数组 (x,y,z) 一一对应．从而，有序三元数组 (x,y,z) 的全体表示空间一切点的集合，称为（三维）空间．一般地，有序 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体称为 **n 维空间**，记为 R^n（n 为自然数）．其中每个有序 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 **n 维空间的一个点** P，记为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，数 x_i 称为点 P 的**第 i 个坐标**．当 $n=1$ 时，R^1 表示数轴，当 $n=2$ 时，R^2 表示平面，当 $n=3$ 时，R^3 表示空间．

设 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 R^n 中任意两点，两点间的距离定义为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}$$

关于平面点集给出的一系列概念，可完全推广到 n 维空间．例如邻域概念，设点 $P_0\in R^n$，δ 是某一正数，则 R^n 中与点 P_0 的距离小于 δ 的所有点 P 的集合，称为点 P_0 的 δ 邻域，即

$$U_\delta(P_0)=\{P\,\big|\,|P_0P|<\delta,P\in R^n\}$$

（3）多元函数概念

一元函数是描述一个变量与另一个变量之间的依赖关系．但是在很多情况下，往往涉及一个变量与多个变量之间的依赖关系，即多元函数．

例 7.1　圆柱体的体积 V 和它的底半径 r，高 h 之间的关系是

$$V=\pi r^2h$$

当 r，h 在点集 $\{(r,h)\,|\,r>0,h>0\}$ 内每取一组值 (r,h) 时，V 按着上面的关系总有唯一确定的值

与之对应.

例 7.2 物体运动的动能 W 和物体的质量 m，运动的速度 v 之间的关系是

$$W=\frac{1}{2}mv^2$$

当 m，v 在点集 $\{(m,v)|m>0,v>0\}$ 内每取定一组值 (m,v) 时，W 按着上面的关系总有确定的值与之对应.

例 7.3 一定量的理想气体的压强 P 和体积 V，绝对温度 T 之间的关系是

$$P=\frac{RT}{V} \quad （R 为常数）$$

当 V，T 在点集 $\{(V,T)|V>0,T>T_0\}$ 内每取一组值 (V,T) 时，P 按着上面的关系总有确定的值与之对应.

以上三例都是二元函数的实例. 撇开它们的几何和物理意义，抽出它们的共性便可得出以下二元函数的定义.

定义 1 设 D 是平面上的一个点集. 如果对于每个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按着一定的法则总有唯一确定的值与之对应，则称 z 是变量 x，y 的二元函数（或点 P 的函数），记为

$$z=f(x,y) \quad （或 z=f(P)）$$

x，y 称为自变量，z 称为因变量. 点集 D 称为函数的定义域.

$$W=\{z|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

函数值 $f(x,y)$ 的全体称为函数的**值域**.

表示函数对应关系的记号 f 也可用其它字母表示，如函数 $z=\varphi(x,y)$，$z=u(x,y)$ 等等.

如果将平面点集 D 改为 n 维空间点集 $D\subset R^n$（$n\geqslant 3$），类似地，可定义**三元函数** $u=f(x,y,z)$ 及 n **元函数** $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 当 $n=1$ 时，n 元函数为一元函数. 当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数统称为**多元函数**. 多元函数可简记为 $u=f(P)$，点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$.

如何求多元函数的定义域呢？与一元函数相类似，如果多元函数是用解析式表示的，则函数的**定义域**就是使函数解析式有意义的自变量所确定的点集. 如果函数有确定的实际意义，即该函数是某个实际问题的数学模型，则它的定义域应由实际问题来确定.

例 7.4 求函数 $z=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1-x-y)$ 的定义域

解 x，y 应满足不等式

$$\begin{cases} x>0 \\ 1-x-y>0 \end{cases}, \quad 即\begin{cases} x>0 \\ x+y<1 \end{cases}$$

从而，定义域为 $D=\{(x,y)|x>0且x+y<1\}$，是无界的开区域.（如图 7.3）

例 7.5 求函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)+\sqrt{2-x^2-y^2}$ 的定义域.

解　x，y 应满足不等式

$$\begin{cases} 2-x^2-y^2 \geqslant 0 \\ x^2+y^2 \leqslant 1 \end{cases}，即 x^2+y^2 \leqslant 1，$$

从而，定义域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 1\}$，是有界闭区域，（如图 7.4）

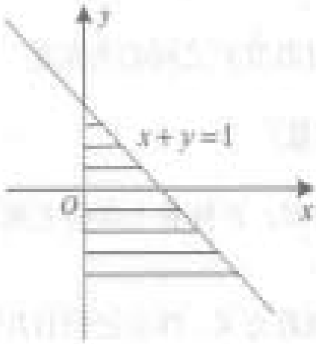

图 7.3

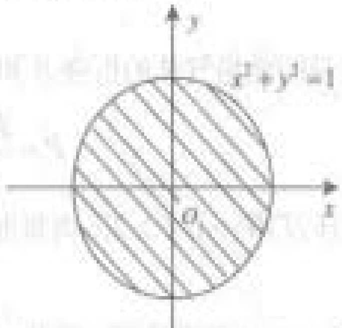

图 7.4

二元函数的图形：设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$，有确定的函数值 $z=f(x,y)$ 与之对应．于是，以 x 为横坐标，y 为纵坐标，z 为竖坐标，在空间确定一个点 $M(x,y,z)$，所有这样确定的空间点的集合

$$\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为**二元函数** $z=f(x,y)$ 的图形．一般地，二元函数的图形是空间曲面，而这个曲面在 xOy 面上的投影就是该函数的定义域 D，（如图 7.5）．例如函数 $z=x^2+y^2$ 是定义在 xOy 面上，顶点在原点，开口向上的旋转抛物面，由方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的图形是球心在原点，半径为 a 的球面，定义域是

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant a^2\}.$$

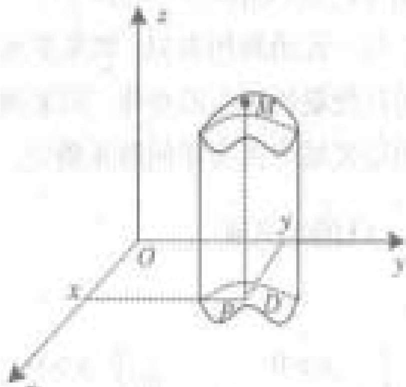

图 7.5

由 $z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 可知，对于任一点 $P(x,y)\in D$，z 有两个确定的值与之对应，因此，该函

数为多值函数，其中两个单值分支 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 分别表示上半球面和下半球面．除特别声明外，本书主要讨论单值函数．

二、 多元函数的极限

我们主要研究二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0, y\to y_0$，即 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，然后推广到 n 元函数上去．

类似于一元函数的极限概念，如果 $z=f(x,y)$ 当点 $P(x,y)$ 越来越趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$（但 $P(x,y)\neq P_0(x_0,y_0)$）时，对应的函数值 $f(x,y)$ 越来越趋于一个确定的常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0, y\to y_0$ 时的极限．这时要特别注意 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 可以从任何方向，以任意方式进行．这一点有别于一元函数的极限（$x\to x_0$ 仅有两条途径）．同样，点 $P(x,y)\to$ 点 $P_0(x_0,y_0)$ 仍然用 P 与 P_0 的距离趋于零描述，即

$$|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$$

下面给出二元函数极限的"$\varepsilon-\delta$"定义

定义 2 设二元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上有定义，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点，A 为常数．如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得满足不等式

$$0<|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)\in D$，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0, y\to y_0$ 时的（二重）极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

或

$$f(x,y)\to A \quad (P\to P_0).$$

例 7.6 设 $f(x,y)=\dfrac{3x^2+5y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ （$x^2+y^2\neq 0$），

证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$．

证明 因为 $|f(x,y)-0|=\left|\dfrac{3x^2+5y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 5\sqrt{x^2+y^2}$，所以，对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$，则当 x，y 满足

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

时，总有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0$$

关于二重极限的运算，有类似于一元函数的运算法则.

例 7.7　求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解　分子，分母同乘以因式 $\sqrt{xy+1}+1$，得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}$$
$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2\ .$$

例 7.8　求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解　$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left[\frac{\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\right]^2\cdot\frac{x^2+y^2}{2e^{x^2y^2}}=1\cdot0=0\ .$$

由二元函数极限定义可知，如果当点 $P(x,y)$ 以两种不同的方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数值趋向于两个不同的常数，则可以肯定函数的极限不存在.

例 7.9　证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

证明　当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点 $P_0(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to0}0=0\ ,$$

当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点 $P_0(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}0=0,$$

但是，当点 $P(x,y)$ 沿抛物线 $y=\sqrt{x}$ 趋于点 $P_0(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\sqrt{x}}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

以上关于二元函数的极限概念及相关结论可推广到 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上去.

三、 多元函数的连续性

与一元函数的连续性相类似，在多元函数极限的基础上，我们将研究多元函数的连续性.

定义 3　设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上有定义，点 $P_0(x_0,y_0)\in D$（P_0 是 D 的内点或边界点）. 如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的每一点都连续，则称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上是**连续函数**.

关于二元函数连续性的概念，可完全推广到 n 元函数 $u=f(P)$ 上去.

如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续，则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的**间断点**.

例如函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

虽然 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处有定义，但是当 $x\to 0$，$y\to 0$ 时，函数的极限不存在，所以点 $(0,0)$ 是该函数的一个间断点.

又如函数 $z=\dfrac{xy}{y-2x^2}$ 在抛物线 $y=2x^2$ 上没有定义，所以抛物线上的点都是该函数的间断点.

由此可见，二元函数的间断点有时可能形成一条或几条曲线.

类似于一元初等函数的定义，所谓**多元初等函数**，就是由常数和自变量（如 x，y 等）利用基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的函数. 例如 $\cos\dfrac{x^2+y^2}{2}$，$\ln\dfrac{x^2+y^2}{1+xy}$

等都是多元初等函数.

由于多元函数也有类似于一元函数的极限运算法则，根据这些运算法则及连续函数的定义，可证得如下结论：

（1）多元连续函数的和、差、积均为连续函数，连续函数的商在分母不为零处也连续.

（2）多元连续函数的复合函数仍为连续函数.

（3）一切多元初等函数在其定义域内是连续的.

利用多元初等函数的连续性，可以求某些多元函数的极限. 设 $f(p)$ 是多元初等函数，而点 P_0 是 $f(P)$ 的定义域内的一点，则

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$$

例 7.10　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\cos(x-e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　函数 $f(x,y)=\dfrac{\cos(x-e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是初等函数，而点 $P_0(1,0)$ 在其定义域内，所以 $f(x,y)$ 在点 P_0 处连续.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\cos(x-e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=f(1,0)=1.$$

闭区间上连续函数的性质可推广到多元连续函数上去.

定理 1（最值性）　如果多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(P)$ 在 D 上一定有最小值和最大值. 即在闭区域 D 上至少存在两点 P_1，P_2，使得 $f(P_1)$ 为最小值，$f(P_2)$ 为最大值.

定理 2（介值性）　设多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续. 如果 $f(P)$ 在 D 上取得两个不同的函数值 μ_1，μ_2，则 $f(P)$ 在 D 上一定取得介于 μ_1 和 μ_2 之间的任何值 μ 至少一次. 特别地，如果 μ 介于函数 $f(P)$ 的最小值 m 和最大值 M 之间，则在 D 上至少存在一点 P_0，使 $f(P_0)=\mu$.

习题 7.1

1. 设 $z=x+y+f(x-y)$，若当 $y=0$ 时，$z'=x^2$，求函数 f 及 z.

2. 设 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

3. 设 $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}-2xy$，求 $f(tx,ty)$.

4. 求下列函数的定义域

(1) $z=\sqrt{2x^2-y}$，　　(2) $z=\ln[x\ln(y-x)]$，

(3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}+\arcsin(1-x^2-y^2)$，　　(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，

(5) $u=e^{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{z-x^2-y^2}}$，　　(6) $u=\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$．

5. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}=0$．

6. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$，　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\cos\sqrt{|xy|-1}$，

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}$，　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x})$，

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to k}}(1+\dfrac{y}{x})^x \quad (k\neq 0)$，　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$．

7. 证明下列极限不存在

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y^2}{x+y^2}$，　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy^3}{x^2+y^6}$．

8. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的连续性．

9. 指出下列函数的间断点

(1) $z=\dfrac{\sin x\sin y}{x+y}$，　　(2) $z=\dfrac{1}{\cos(x^2+y^2)}$．

第二节　偏导数

我们已经在第二章中研究了一元函数的变化率问题，并引进了函数的导数的概念．本节将以此为基础讨论多元函数关于其中一个自变量的变化率问题，并引进偏导数的概念．下面就二元函数给出偏导数的定义、计算方法以及高阶偏导数．

一、 偏导数的定义

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义．先固定 $y=y_0$，当 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地，函数有关于 x 的偏增量，记为 Δz_x，即

$$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的偏导数记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad f_x(x_0,y_0).$$

即 $$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\tag{7.1}$$

类似地，先固定 $x=x_0$，函数关于 y 的偏增量记为 Δz_y，即 $\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z_y}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记为

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad f_y(x_0,y_0).$$

即 $$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.\tag{7.2}$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在开区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，即对于 D 内的任一点 (x,y)，都有确定的偏导数与之对应，则在 D 内定义了一个新的二元函数，称为函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导函数，记为 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$，$f_x(x,y)$．

同理，可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对 y 的偏导函数，记为 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$z_y$，$f_y(x,y)$．

显然函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 及关于 y 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 分别是偏导函数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值．类似于一元函数，偏导函数通常简称为偏导数．

二元函数的偏导数定义可以推广到二元以上的函数．例如三元函数 $u=f(x,y,z)$，如果函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 某一邻域内有定义，则在点 (x,y,z) 处关于 x 的偏导数定义为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

类似地，可定义函数关于 y 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及关于 z 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial z}$.

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处偏导数的几何意义：一般地，二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形为空间曲面．由偏导数的定义可知，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在点 x_0 处的导数，而一元函数 $z=f(x,y_0)$ 的几何图形是曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线，因此偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y_0) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率．同理，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线在点 M_0 处的切线对 y 轴的斜率（如图 7.6）．

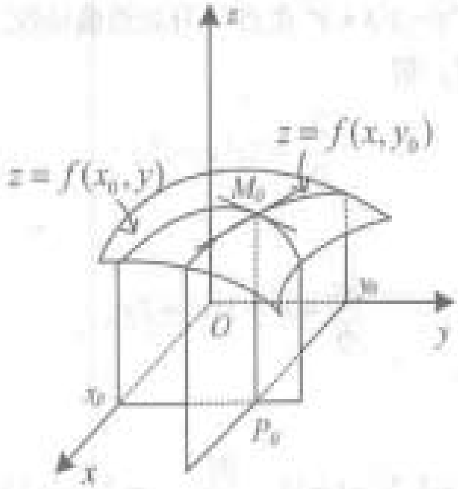

图 7.6

对于一元函数来说，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处一定连续．但是，如果多元函数在某点处各偏导数都存在，则函数在该点却不一定连续．这是因为偏导数在点 P_0 处存在，只能说明点 P 沿着平行于坐标轴的方向趋于点 P_0 时，函数值 $f(P)$ 趋于 $f(P_0)$，而当点 P 沿其余任何方式趋于 P_0 时，函数值 $f(P)$ 不一定都趋于 $f(P_0)$．例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处对 x 的偏导数为

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0\ ,$$

对 y 的偏导数为