21 世纪经济与管理精编教材
全国成人高等教育规划教材

概　率　统　计

（第二版）

教育部高等教育司组编

主编　范培华
撰稿　袁荫棠
　　　范培华
　　　陈光潮

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率统计/范培华主编．—北京：北京大学出版社，2007.5
(21世纪经济与管理精编教材)
(全国成人高等教育规划教材)
ISBN 978-7-301-04194-9

Ⅰ．概…　Ⅱ．范…　Ⅲ．①概率论-成人教育-教材 ②数理统计-成人教育-教材　Ⅳ．021

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第17254号

书　　　名：概率统计(第二版)
著作责任者：范培华　主编
责 任 编 辑：朱启兵
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-04194-9/F·0303
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn
电　　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62752926　出版部62754962
电 子 邮 箱：em@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：
经　销　者：新华书店
730毫米×980毫米　16开本　13.75印张　247千字
1999年6月第1版
2007年5月第2版　2007年5月第1次印刷
印　　　数：0001—4000册
定　　　价：18.00元

内容提要

本书共分六章。第一章介绍了随机事件的概念与运算、概率的定义、古典概型、条件概率、全概率公式与贝叶斯公式、事件的独立性与伯努利概型等内容;第二章介绍了随机变量及其分布的概念、随机变量的数字特征以及常见的离散型和连续型分布;第三章将随机变量的概念扩展到二维随机变量,介绍了二维随机变量的分布、独立性及其数字特征;第四章简要介绍了切比雪夫不等式、大数定律和中心极限定理;第五章介绍了总体、样本和统计量等统计学的基本概念以及 χ^2 分布、t 分布和 F 分布等内容;第六章介绍了参数的点估计和区间估计以及正态总体参数的假设检验的方法与步骤。

出 版 说 明

为了加强成人高等教育教学的宏观管理，指导并规划成人高等教育的教学工作，保证达到培养目标，教育部于今年4月颁布了全国成人高等教育公共课和经济学、法学、工学等学科门类主要课程的教学基本要求。教学基本要求是成人高等教育的指导性教学文件，是成人高等教育开展有关课程教学工作和进行教学质量检查的重要依据。为了更好地和更迅速地贯彻这个教学基本要求，我司又组织制订了全国成人高等教育主要课程教材建设规划。经过有关出版社论证申报和教育部组织的成人教育专家评审，确定了各门课程教材的主编人选及承担出版任务的出版社。

承担任务的出版社，遴选了学术水平高、有丰富成人教育经验的专家参加教材及教学辅助用书的编写和审定工作。新编教材尽可能符合成人学习特点，较好地贯彻了成人高等教育教学基本要求。推广使用这套教材，对于加强成人高等教育的教学工作，提高教学质量，促进成人高等教育的改革与发展具有十分重要的意义。

首批完成的有公共课和经济学、法学、工学三大学科门类共81门主要课程的教材。由于此项工作是一项基础性工作，具有一定的开创性，可能存在不完善之处。我司将在今后的教学质量检查评估中，及时总结经验，认真听取各方反馈意见，根据教学需要，适时组织教材的修订工作。

教育部高等教育司

1998年12月1日

再 版 说 明

本书第一版是由教育部高等教育司组织编写的，自1999年出版以来，受到各地读者欢迎。如今，距第一版出版已有8年，因此编者结合近年来的教学实践和读者意见，对本书做了修订。

本书第二版的一个重要特点是重新安排了全书的体系，如将第一版中第三章“随机变量的数字特征”合并入第二章，而将二维随机变量的有关内容独立出来，作为第三章，并在第二章中先介绍随机变量的分布及其数字特征等内容，再介绍常见的离散型分布和连续型分布。从而使得本书在体系上更加合理，更适于教学使用。

本书第二版纠正了上一版中的一些错误，并重新设计了部分习题。与上一版相同，本书中超出大纲要求的部分我们仍以“*”号标出，供读者参考。

本书第一版由袁荫棠、陈光潮、范培华撰写，第二版由范培华、袁荫棠修订。

编　者

2007年4月

目　　录

第一章　随机事件与概率

【内容提示】 我们用样本空间(基本事件空间)和随机事件描述随机试验，用事件的概率描述随机事件发生的可能性大小. 本章重点介绍概率论的两个最基本的概念：随机事件及其概率. 主要内容有：随机事件的概念与运算；概率的定义和性质；古典概型与几何概型；条件概率的概念；乘法公式；全概率公式与贝叶斯公式；事件的独立性与伯努利概型等，它们是后面进一步学习概率论的基础.

在自然界和人类社会中，存在着两类不同性质的现象. 有一类现象，它出现与否完全取决于它所依存的条件：当条件满足时，它一定发生，否则一定不发生. 比如，同性电荷一定不会相互吸引；在地球上空旷处向上抛掷一颗石子必然下落；在标准大气压下，液态水的温度超过 100℃ 时一定会汽化等等. 这种在一定条件下必然发生的现象，即我们可以根据其赖以存在的条件，事先准确地断定它们未来结果的现象，称为确定性现象. 另外还有一类现象，在相同的可控制条件下进行一系列重复的观察或实验，每次出现的可能结果不止一个，在每次试验或观察之前无法预知确切的结果，即呈现出不确定性. 这类现象我们称之为随机现象. 比如在相同条件下抛掷同一枚匀称硬币，其结果可能是正面(徽花面)朝上，也可能是反面(数字面)朝上，并且无论怎样控制抛掷条件，在每次抛掷之前都无法肯定抛掷的结果是什么. 另外诸如保险公司的年赔偿金额、掷一颗骰子出现的点数等，事先我们都无法确切地预言它们的结果.

人们经过长期实践并深入研究之后，发现虽然就每次实验或观察结果来说，随机现象具有不确定性，但在大量重复实验或观察中它的结果却呈现出某种量的规律性. 例如，多次重复抛掷一枚匀称的硬币，正面出现的次数大约为抛掷总次数的一半；多次重复掷一颗匀称的骰子，5 点出现的次数大约占总次数的 1/6. 这种在大量重复实验或观察中所呈现出的量的规律性，我们称为随机现象的统计规律性.

概率论与数理统计是研究随机现象量的统计规律性的一门重要的应用数学学科. 通常认为概率论是数理统计的基础，数理统计是概率论的一种应用. 概率统计是近代数学的重要组成部分，它在自然科学、社会经济等众多领域中有着广

泛的应用．特别在经济全球化、社会信息化的今天，概率论的理论与数理统计的方法更是近代经济理论的研究与应用的重要数学工具．

§1.1 随 机 事 件

一、样本空间与随机事件

在概率论里，我们把对随机现象进行的实验或观察统称为随机试验，简称试验，通常用字母 E 表示．例如，检验一批产品中任意一个产品的质量；一条自动生产线在两次调整间生产的合格品个数；抛掷一枚匀称的硬币；观察社会对某种商品的日需求量等都是随机试验．概率论中所研究的随机试验具有下面三个特点：

1．在给定的一组条件下，试验可以或原则上可以重复进行；

2．每次试验的结果具有多种可能性，但是在试验之前可以明确一切可能出现的基本结果；

3．在具体的一次试验中，某种结果出现与否是不确定的，在试验之前不能准确地预言该次试验中将会出现哪一种结果．

由一个特定随机试验所有可能发生的基本结果组成的集合，称为该试验的样本空间，又称基本事件空间．通常用 Ω 表示．样本空间的每一个元素，即试验的每一个基本结果，称为一个样本点．用小写字母 ω 表示．

例如，掷一枚硬币的试验，其样本空间由两个样本点组成，即 $\Omega=\{$正面，反面$\}$．

一个特定随机试验的任一个基本结果，即样本空间的任意一个样本点 ω 组成的单点集合，称为基本随机事件，简称基本事件． 样本空间 Ω 的一个子集，称为是该试验的一个随机事件．通常用大写字母 A,B,C 等表示随机事件．随机事件简称为事件．由于每次试验中一定有样本空间 Ω 中的某一个样本点发生，因此称样本空间 Ω 为必然事件，称空集 $\varnothing$ 为不可能事件．显然，它在每次试验中一定都不发生．

综上所述，我们可以直观地理解为：随机试验的结果称为随机事件，除 Ω 和 $\varnothing$ 之外，任一随机事件在随机试验中可能发生，也可能不发生．随机事件 A 在某一随机试验中发生，当且仅当属于 A 的某一个样本点在随机试验中发生．必然事件 Ω 在每次随机试验中都一定发生，不可能事件 $\varnothing$ 则一定不发生．在这里，我们的定义中把两个确定性的事件 Ω 与 $\varnothing$ 作为两个特殊的随机事件来处理了．

例 1.1 抛掷一枚硬币，写出该随机试验的全部基本事件．

解 抛掷一枚硬币，只有正面向上和反面向上两种可能出现的基本结果．因此该随机试验只有两个基本事件 A_1 与 A_2．即 $A_1=$“正面向上”，$A_2=$“反面向

上”.

例 1.2 设随机试验 E 是掷一颗骰子，观察其出现的点数. 记事件 A 表示掷出奇数点，B 表示掷出偶数点，C 表示掷出点数小于 2，D 表示掷出点数大于 2. 写出该随机试验的样本空间 Ω 以及随机事件 A,B,C,D 的集合.

解 由于掷一颗骰子的试验，所有可能出现的基本结果只有 6 个，即 1 点，2 点，…，6 点. 也就是说样本空间 Ω 中只有 6 个样本点.

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},\quad A=\{1,3,5\},$$
$$B=\{2,4,6\},\quad C=\{1\},\quad D=\{3,4,5,6\}.$$

如果用 A_i 表示掷出 i 点. 则 $A_i=\{i\}(i=1,2,\cdots,6)$ 都是只包含一个样本点的事件，即 A_i 都是基本事件. 随机事件 A 是由 A_1,A_3,A_5 这三个基本事件复合而成的事件. 我们说“随机事件 A 发生”，即“掷出点数为奇数点”，当且仅当 A_1,A_3,A_5 这三个基本事件中有一个发生.

例 1.3 从 0，1，2，3 四个数字中先后取出两个不同的数字组成一个数. 事件 A 表示组成两位数，事件 B 表示组成两位偶数，事件 C 表示组成偶数，事件 D 表示组成奇数. 写出该随机试验的样本空间以及事件 A,B,C,D 的集合.

解 从 0，1，2，3 四个数字中先后取出两个不同的数字组成的数可以是个一位数，也可以是个两位数. 该随机试验的所有可能的基本结果，即样本点，共有 12 个($P_4^2=4\times3=12$).

$$\Omega=\{1,2,3,10,12,13,20,21,23,30,31,32\},$$
$$A=\{10,12,13,20,21,23,30,31,32\},$$
$$B=\{10,12,20,30,32\},$$
$$C=\{2,10,12,20,30,32\},$$
$$D=\{1,3,13,21,23,31\}.$$

从以上例子中我们看到，用集合的概念和记法研究随机试验的样本空间(基本事件空间)、基本事件、随机事件等概率论中最基本的概念是很方便的，它将有助于我们对这些概念的理解.

二、随机事件间的关系与运算

在研究随机试验时，我们发现一个随机试验往往有很多随机事件，其中有些比较简单，有些比较复杂. 为了通过较简单的随机事件寻求较复杂随机事件的性质和规律，我们需要研究任意一个特定随机试验的各随机事件间的关系和运算.

(一) 事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A**，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

如果事件 A 包含事件 B，同时事件 B 也包含事件 A，则称**事件 A 与 B 相等**，

记为 $A=B$.

（二）事件的和（并）

事件 A 与 B 中至少有一个事件发生，即"A 或 B"，也是一个事件，称为事件 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和（并），记作 $A+B$ 或 $A\cup B$.

（三）事件的积（交）

事件 A 与 B 同时发生，即"A 且 B"，也是一个事件，称为事件 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的积（交），记作 AB 或 $A\cap B$.

事件的和与积都可以推广到有限多个事件与可列多个事件.

$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生.

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个事件发生.

$\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件.

$\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生的事件.

（四）事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，也是一个事件，称为事件 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差，记作 $A-B$.

（五）互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，称事件 A 与 B 互不相容（或称互斥）. 如果对任何的 $i\neq j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 都有 $A_iA_j=\varnothing$，则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容.

（六）对立事件与完备事件组

事件 A 不发生，即事件"非 A"，称为事件 $\boldsymbol{A}$ 的对立事件，又称 $\boldsymbol{A}$ 的逆事件，记作 $\overline{A}$. 由定义看出，两个对立事件一定是互不相容事件；反之，两个互不相容的事件不一定是对立事件.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，并且它们的和是必然事件 Ω，则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组，简称完备组. 它的实际意义是在每次试验中必然发生且仅能发生 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的一个事件. 当 $n=2$ 时，构成完备事件组的两个事件 A_1,A_2 就是对立事件.

为了直观，有时用图形表示事件间的关系和运算. 比如用平面上某一个正方形（或矩形、或其他平面图形）区域表示必然事件 Ω，用该区域上一个子区域表示随机事件. 如图 1.1 所示.

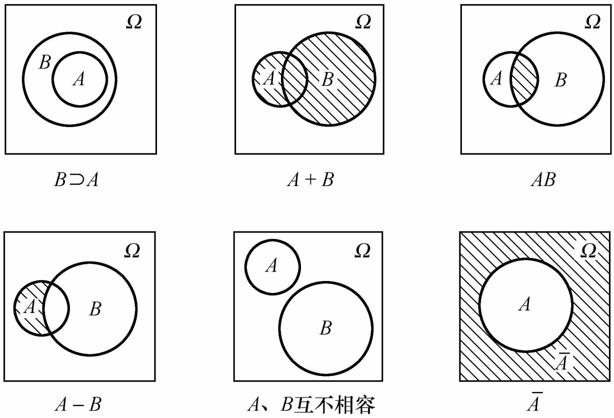

图 1.1

例 1.4　一条自动生产线上两次故障间的优质品数无法事先预计. 记

A_1 **表示两次故障间的优质品数超过** 10 **件**;

A_2 **表示两次故障间的优质品数超过** 11 **件**;

A_3 **表示两次故障间的优质品数超过** 12 **件**;

A_4 **表示两次故障间的优质品数最多为** 10 **件**;

A_5 **表示两次故障间的优质品数不少于** 11 **件**;

A_6 **表示两次故障间没有优质品.**

讨论上述各事件间的关系.

分析　在研究事件间的关系和运算时,为了利用集合间的关系与运算法则,我们常采用集合论中的概念与记法. 具体做法是:首先写出试验的样本空间 Ω **这个集合;然后写出所讨论的每个随机事件相应的集合;最后讨论各集合,即各随机事件间的关系.**

解　$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$,　$A_1=\{11,12,\cdots\}$,

$A_2=\{12,13,\cdots\}$,　$A_3=\{13,14,\cdots\}$,

$A_4=\{0,1,\cdots,10\}$,　$A_5=\{11,12,\cdots\}$,

$A_6=\{0\}$.

易见:

$A_1=A_5=\overline{A}_4$,**即** A_1 **与** A_4、A_5 **与** A_4 **为对立事件**;

$A_1=A_5\supset A_2\supset A_3$;　$A_4\supset A_6$;

A_6 **与** A_1、A_6 **与** A_2、A_6 **与** A_3、A_6 **与** A_5 **均互不相容**;

A_4 **与** A_1、A_4 **与** A_2、A_4 **与** A_3、A_4 **与** A_5 **均互不相容.**

注意　事件 A_6 **是只包含一个样本点"**0**"的单点集合,**A_6 **不是空集,因此** A_6

不是不可能事件$\varnothing$.

例 1.5　讨论例 1.2 中各事件间的关系.

解　由例 1.2 知　$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，　$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{1\}$，　$D=\{3,4,5,6\}$.

由上可见：A 与 B 为对立事件即 $B=\overline{A}$，C 与 B，C 与 D 均互不相容，$A\supset C$，A 与 D，B 与 D 均相容.

例 1.6　设 x 表示一个沿数轴做随机游动的质点的位置，讨论下列各对事件间的关系：

(1) $A_1=$“$|x-a|<\delta$”与 $B_1=$“$x-a<\delta$”　$(\delta>0)$；

(2) $A_2=$“$x>20$”与 $B_2=$“$x\leqslant 20$”；

(3) $A_3=$“$x>22$”与 $B_3=$“$x<18$”；

(4) $A_4=$“$|x|>5$”与 $B_4=$“$|x|\leqslant 7$”.

解　记该试验的样本空间为 Ω，则 $\Omega=\{x:-\infty<x<+\infty\}$；

(1) $A_1=\{x:a-\delta<x<a+\delta\}$，　$B_1=\{x:x<a+\delta\}$，易见$B_1\supset A_1$.

(2) $A_2=\{x:x>20\}$，　$B_2=\{x:x\leqslant 20\}$，显然 A_2 与 B_2 为对立事件，即 $B_2=\overline{A}_2$.

(3) $A_3=\{x:x>22\}$，　$B_3=\{x:x<18\}$，A_3 与 B_3 互不相容，即 $AB=\varnothing$.

(4) $A_4=\{x:x>5$ 或 $x<-5\}$，　$B_4=\{x:-7\leqslant x\leqslant 7\}$，$A_4$ 与 B_4 相容.

说明　互不相容与对立事件是两种不同的关系. 两个互不相容事件在一次试验中仅仅是不能同时发生，并不能排除它们同时都不发生. 比如本例中 A_3 与 B_3，当 $x=21$ 时，它既不大于 22，又不小于 18. 但是两个对立事件在一次试验中不仅不能同时发生，而且也不可能同时不发生. 比如(2)中若 A_2 发生，即“$x>20$”，则 B_2，即“$x\leqslant 20$”就一定不会发生；反之，若 A_2 不发生，即 x 不大于 20，则 B_2 就一定发生. 因此，我们的结论是：两个对立事件一定是互不相容事件，但两个互不相容事件不一定是对立事件.

例 1.7　从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回)，事件 A_i 表示第 i 次取到正品$(i=1,2,3)$. 用事件运算符号表示下列事件：

(1) 三次都取到正品；

(2) 三次中至少有一次取到正品；

(3) 三次中至少有两次取到正品；

(4) 三次中恰好有两次取到正品；

(5) 三次中最多有一次取到正品；

(6) 第二次没有取到正品；

(7) 第二次没有取到正品，且第三次取到正品.

解　(1) $A_1A_2A_3$；

(2) $A_1+A_2+A_3$；

(3) $A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3$ 或 $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$；

(4) $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$；

(5) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_3$；

(6) $\overline{A}_2$；

(7) $\overline{A}_2A_3$.

三、事件间的关系和运算的性质

在计算事件的概率时，我们经常需要将一个事件表示为一些事件的运算. 因此熟练掌握下面的性质对今后学习将有很大帮助. 为了阅读方便，我们将它们归纳整理后一并给出.

(一) 关于包含

$$\varnothing\subset A\subset\Omega,\quad A+B\supset A,\quad A\supset A-B,\quad A\supset AB.$$

(二) 关于加法

$$A+\varnothing=A,\quad A+\Omega=\Omega,\quad A+\overline{A}=\Omega,$$
$$A+A=A,\quad A+B=B+A,$$
$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

(三) 关于乘法

$$AA=A,\quad A\,\overline{A}=\varnothing,\quad A\varnothing=\varnothing,\quad A\Omega=A,$$
$$AB=BA,\quad (AB)C=A(BC).$$

(四) 关于加法与乘法的分配律

$$A(B+C)=AB+AC,\quad A+BC=(A+B)(A+C).$$

(五) 关于和、积、逆的对偶律

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B},$$
$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i\,.$$

(六) 关于逆、差与互不相容

$(A-B)+A=A$，$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$.

$A+B=(A-B)+(B-A)+AB$，**且** $A-B,B-A,AB$ **两两互不相容.**

$A+B=A\,\overline{B}+AB+\overline{A}B$，**且** $A\,\overline{B},AB,\overline{A}B$ **两两互不相容.**

$A+B=(A-B)+B=(B-A)+A$，$A-B$ **与** B **互不相容**，$B-A$ **与** A **互不相容.**

注：以上 A,B,C **均为任意事件.**

例 1.8　简化下列各式：

(1) $(A+B)(B+C)$；　　(2) $(A+B)(A+\overline{B})$；

(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$;

(4) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$.

解 由于每一个随机事件都是由样本空间中的一些元素组成的集合,它们都是样本空间的子集,因此利用集合的运算法则很容易将上述各事件的运算简化.

(1) $(A+B)(B+C)=AB+B+AC+BC=B+AC$.

最后一步是由于 $B\supset AB$,$B\supset BC$,可得 $B+AB+BC=B$.
或利用分配律直接得$(A+B)(B+C)=(B+A)(B+C)=B+AC$.

(2) $(A+B)(A+\overline{B})=A+B\,\overline{B}=A$.

倒数第二步是应用分配律得出的.

(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)=A(\overline{A}+B)=AB$.

应用(3)的结果,有

(4) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=AB(\overline{A}+\overline{B})=\varnothing$.

如果两次应用(2)的结果,有

$$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=A\,\overline{A}=\varnothing.$$

例 1.9 已知随机事件 A 与 B 是对立事件,求证:$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是对立事件.

证明 由于 A 与 B 是对立事件,有

$$A+B=\Omega,\quad AB=\varnothing.$$

但是

$$\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}=\overline{\varnothing}=\Omega,\quad \overline{A}\,\overline{B}=\overline{A+B}=\overline{\Omega}=\varnothing,$$

因此 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是对立事件.

说明 此题告诉我们,两个对立事件 A 与 B 的对立事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是对立事件. 读者可以进一步思考:(1) 两个互不相容事件 A 与 B 的对立事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 是否一定互不相容;(2) 两个以上的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 3)$构成的完备事件组,它们的对立事件 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\cdots,\overline{A}_n$ 是否还构成一个完备事件组.

§1.2 随机事件的概率

作为应用数学的分支,概率论研究的是随机现象量的规律性. 因此对于一个随机试验,我们不仅关心它可能出现哪些结果,而更关心某些结果,即随机事件发生的可能性大小. 比如,在开办中小学生平安保险业务中,按照一定标准,保险公司将一个学生的平安情况分为平安、轻度意外伤害、……、严重意外伤害以及意外事故死亡等多种结果. 由于对一个学生而言,这些情况事先无法预料,因此它们都是随机事件. 在制定保额和赔付金时需要研究各种情况发生的可能性大小. 对于随机试验中的一个随机事件 A,我们希望用一个数字度量它发生的可能

性大小，这个数字记作 $P(A)$，称为 A 的概率. 我们的问题是如何合理地选择这个度量.

一、概率的统计定义

实践告诉我们，尽管在一次试验中，任一随机事件 A 是否发生具有不确定性，但是如果多次重复同一试验，事件 A 的发生具有统计规律性. 比如，抛掷一枚硬币 10 次，正面出现（即正面向上）6 次；掷一颗骰子 100 次，6 点出现 20 次. 尽管各事件出现的次数不能说明什么问题，但是它们出现的次数与试验次数之比都是一个很有价值的量. 一般地，记 $n(A)$ 为 n 次试验中事件 A 出现的次数，称为 A 的频数. 记 $\mu(A)$ 为 n 次试验中事件 A 出现的次数与试验总次数的比值，称为 A 的频率，即

$$\mu(A)=\frac{n(A)}{n}.$$

（一）事件的频率

在同一条件下，重复进行 n 次试验，如果事件 A 发生 m 次，事件 B 发生 k 次，则它们的频率分别为

$$\mu(A)=\frac{m}{n},\quad \mu(B)=\frac{k}{n}.$$

显然，对于任何随机事件 A，频数 $n(A)$ 一定满足 $0\leqslant n(A)\leqslant n$. 频率 $\mu(A)$ 一定满足 $0\leqslant\mu(A)\leqslant 1$. 而且必然事件 Ω 的频率 $\mu(\Omega)=1$，不可能事件 $\varnothing$ 的频率 $\mu(\varnothing)=0$. 如果 A 与 B 互不相容，则事件 $A+B$ 的频率应该等于两个事件的频率 $\frac{m}{n}$ 与 $\frac{k}{n}$ 之和. 综上所述，随机事件的频率应满足下面三个条件：

（1）$0\leqslant\mu(A)\leqslant 1$；

（2）$\mu(\Omega)=1$；

（3）有限可加性. 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则有

$$\mu(A_1+\cdots+A_n)=\mu(A_1)+\cdots+\mu(A_n).$$

为进一步理解随机事件频率与概率的关系，笔者实地进行了抛掷硬币的试验，结合历史上前人的试验记录分别列于表 1.1 与表 1.2 中.

我们从试验记录可以看出，当试验次数 n 较小时，事件 A（硬币正面向上）出现的频率 $\mu(A)$ 波动性比较明显，但是当 n 充分大时，频率的这种波动性明显减小，并且频率 $\mu(A)$ 总是在常数 0.5 附近摆动. 随着 n 的不断增大，它稳定于常数值 0.5. 我们称这一现象为频率的稳定性. 它就是随机事件统计规律性的典型表现.

表 1.1

实验序号	$n=10$		$n=100$		$n=600$	
	$n(A)$	$\mu(A)$	$n(A)$	$\mu(A)$	$n(A)$	$\mu(A)$
1	2	0.2	64	0.64	315	0.525
2	4	0.4	47	0.47	296	0.493
3	3	0.3	46	0.46	302	0.503
4	7	0.7	59	0.59	312	0.520
5	9	0.9	49	0.49	300	0.500
6	5	0.5	60	0.60	306	0.510
7	3	0.3	56	0.56	294	0.490
8	8	0.8	56	0.56	314	0.523
9	5	0.5	40	0.40	302	0.503
10	4	0.4	48	0.48	295	0.492

表 1.2

试验者	试验次数 n	频数 $n(A)$	频率 $\mu(A)$
迪摩根	2 048	1 061	0.5181
蒲　丰	4 040	2 048	0.5069
费　勒	10 000	4 979	0.4979
皮尔苏	12 000	6 019	0.5016
皮尔苏	24 000	12 012	0.5005
维　尼	30 000	14 994	0.4998

（二）概率的统计定义

定义 1.1　在不变的一组条件下，重复进行 n 次试验，以 $n(A)$表示事件 A 在 n 次试验中出现的频数，则当试验次数 n 很大时，频率 $\mu(A)=n(A)/n$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动. 而且一般说来，随着试验次数的增多，这种摆动幅度将减小. 称这个客观存在的频率的稳定值 p 为事件 A 在一次试验中发生的概率. 记作 $P(A)=p$.

这个定义通常称为概率的统计定义. 但是它只是一种描述性的定义. 定义中谈到的客观存在的频率稳定值 p 无法具体确定. 一般只是采取进行大量重复试验，通过频率值及一系列频率的平均值作为概率 $P(A)$的近似值，估计 $P(A)$的大小.

二、概率的古典定义

随机事件的概率是在试验中该事件出现的可能性大小的数值度量. 但是在很多情况下，直接计算某一事件的概率是非常困难甚至是不可能的，不过对于一些简单的试验，其事件的概率可以直接计算，其中最简单的试验模型称为古典概型. 它有下面两个特点：