前　言

复变函数论是一门古老而富有生命力的学科. 它的研究始于18世纪,当时著名的数学家达朗贝尔(J. L. R. D'Alembert,1717～1783)、欧拉(Leonhard Euler,1707～1783)以及拉普拉斯(P. S. Laplace,1749～1827)建立了系统的复数理论,从而使人们接受并理解了复数. 19世纪是复变函数论全面兴起并创建的时期,三位杰出的数学家柯西、魏尔斯特拉斯及黎曼为这门学科的发展奠定了坚实的基础,从而使得复变函数论成为一个重要的数学分支. 20世纪是复变函数论大发展的时期,数学家列夫勒(M. G. Mittag-Leffler,1846～1927)、庞加莱(J. H. Poincare, 1854～1912)与阿达玛(J. S. Hadamard,1865～1963)以及我国老一辈数学家陈建功(1893～1971)、华罗庚(1910～1985)、杨乐(1939～)等人的大量研究为这门学科的发展做出了重要的贡献.

发展到今天,复变函数理论已是一门相当成熟的学科. 它已经深入到积分方程、微分方程、概率论以及数论等多个学科. 同时,它在其他学科也得到了广泛的应用,许多复杂的计算都要用它来解决. 比如,高等数学中一些复杂的定积分与广义积分问题、物理学中稳定平面场中流量与势等问题. 而茹科夫斯基在设计飞机的时候,就采用复变函数理论解决了飞机机翼的结构问题.

积分变换是通过积分运算,把一个函数变成另一个函数的变换. 数学中常用积分变换的方法来简化问题或运算,如线性代数中的坐标变换、积分中的变量代换、微分方程中自变量或未知函数的变换以及复变函数论中的保角变换等. 积分变换的理论与方法不仅应用于许多数学分支,而且在其他自然科学和各种工程技术领域中均有广泛的应用,特别是在自动控制和电信技术上,积分变换是分析问题的重要而有效的手段.

全书共分10章. 第1章是全书内容的基础,着重介绍复变函数的研究对象与研究方法. 第2、第3、第4章主要介绍解析函数的基本理论,通过对一对实二元函数、复闭路积分以及幂级数的讨论来描述解析函数的重要性质及应用. 第5、第6、第7章是解析函数理论的深入与运用,为处理实际问题时出现的数学问题,提供了有力的解决工具. 第8、第9、第10章介绍积分变换中常见的傅里叶变换、拉普拉斯变换、z变换以及小波变换,它们在工程技术中都有着广泛的应用,特别是小波变换,它在信号与图像处理中也有着重要的应用.

全书由康道坤、季隽和崔学伟共同撰写,其具体分工如下:

第1章,第2章第1节和第2节,第5章,第6章,第7章,第8章第1节和第2节:康道坤(昭通师范高等专科学校);

第8章第3节～第6节,第9章,第10章:季隽(大连工业大学);

第2章第3节和第4节,第3章,第4章:崔学伟(西北工业大学)。

由于作者的水平有限,书中难免存在不妥及错误之处,恳请专家、同行及广大读者批评、指正.

作　者
2011.2

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

复变函数论中所要研究的函数的自变量与因变量均为复数.因此,为了便于后面章节的研究,我们有必要在展开主要内容之前,对复数与复变函数有一个清晰的认识.故本书的第一章给出了复数的运算规则、性质及其在几何上的表示;然后,在此基础上讨论了复平面上的点集、区域、若尔当曲线;最后探讨了复变函数的概念及其极限与连续性.

1.1　复数及其四则运算

1.复数

我们知道方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内是无解的,为了求解这个方程,人们引入了一个新数 i,称为虚数单位.且对虚数单位,作如下规定:

(1)$i^2=-1$;

(2)i 可与实数一起按同样的法则进行四则运算.

在此基础上,把形如 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$ 的数称为复数,其中 x 与 y 为两实数,分别叫做 z 的实部与虚部,记作 $x=\mathrm{Re}(z)$,$y=\mathrm{Im}(z)$.

当 $x=0$,$y\neq 0$ 时,$z=iy$ 称为纯虚数.

当 $y=0$ 时,$z=x+i0$,复数 z 就是实数 x.因此,全体实数是全体复数的一部分,特别地,复数 z 等于 0 当且仅当它的实部和虚部同时等于 0.由此可见,复数是实数的推广.

两个复数相等当且仅当它们的实部与虚部分别相等,即设 $z_1=x_1+iy_1$,$z_2=x_2+iy_2$,则 $z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$,$y_1=y_2$.

例 1.1.1　实数 m 取何值时,复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 是(1)实数;(2)纯虚数.

解　令 $x=m^2-3m-4$,$y=m^2-5m-6$,

(1)复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 是实数时,则 $y=0$.

由 $m^2-5m-6=0$ 知,$m=6$ 或 $m=-1$.

(2)复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 是纯虚数时,则 $x=0$ 且 $y\neq 0$,

由 $m^2-3m-4=0$ 知,$m=4$ 或 $m=-1$.但由 $y\neq 0$ 知 $m=-1$ 应舍去,即只有 $m=4$.

2.复数的运算及其性质

设复数 $z_1=x_1+iy_1$,$z_2=x_2+iy_2$,则两个复数的和、差及乘积的定义如下:

两复数的和、差：$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+\mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$；

两复数的积：$z_1 \cdot z_2=(x_1 x_2-y_1 y_2)+\mathrm{i}(x_2 y_1+x_1 y_2)$；

两复数的商：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1 x_2+y_1 y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{x_2 y_1-x_1 y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}, z_2 \neq 0$.

由复数的四则运算规则，很容易验证下面的复数的运算性质：

加法交换律　$z_1+z_2=z_2+z_1$

加法结合律　$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

乘法分配律　$z_1(z_2+z_3)=z_1 z_2+z_1 z_3$

乘法交换律　$z_1 z_2=z_2 z_1$

乘法结合律　$(z_1 z_2) z_3=z_1(z_2 z_3)$

引入上述四则运算后，全体复数组成的一个域，称为**复数域**，记为 **C**. 在复数域内，我们熟知的一切代数恒等式，如

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

等等，仍然成立. 但与实数域不同的是，在复数域中任意两个复数不能像实数那样比较大小. 因此，复数之间没有大小关系.

3. 共轭复数及其运算性质

实部相等、虚部互为相反数的两个复数叫做**共轭复数**. 如果其中一个复数记为 z，则其共轭复数记为$\bar{z}$，即 $x-\mathrm{i}y=\overline{x+\mathrm{i}y}$. 共轭复数具有如下运算性质：

(1)$\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1} \pm \overline{z_2}$；$\overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$；$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(2)$\bar{\bar{z}}=z$；

(3)$z \cdot \bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$；

(4)$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z), z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

例 1.1.2　将下列复数表示为 $x+\mathrm{i}y$ 形式.

(1)$\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^7$；(2)$\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$.

解　(1)$\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\mathrm{i}, \left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^7=(-\mathrm{i})^7=\mathrm{i}$；

(2)$\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{-1-2\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}^2+(1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}=\dfrac{(-1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

例 1.2.3　设 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$. 求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$与 $z \cdot \bar{z}$.

解　$z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{2}, \mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2}, z \cdot \bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$.

例 1.2.4　若等式$\dfrac{(x+1)+\mathrm{i}(y-3)}{\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$ 成立，求 x, y.

解　由题可知$\dfrac{(x+1)+\mathrm{i}(y-3)}{\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$，则$(x+1)+\mathrm{i}(y-3)=-1+\mathrm{i}$. 根据两复数相等，比较等式两端的实、虚部，有$\begin{cases}x+1=-1\\ y-3=1\end{cases}$，则 $x=-2, y=4$.

例 1.2.5　设两复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，证明 $z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)$.

证 $$\begin{aligned}z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2&=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)+(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)\\&=(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)+(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(-x_2y_1+x_1y_2)\\&=2(x_1x_2+y_1y_2)=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)\end{aligned}$$

或　$z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2=z_1\cdot\bar{z}_2+\overline{z_1\cdot\bar{z}_2}=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)$

1.2　复数的几何表示

1. 复数的点表示

考虑笛卡儿坐标平面 xOy，我们用坐标为(x,y)的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$. 即复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与有序实数对(x,y)成一一对应，记作 $z=(x,y)$. 我们把这种数点等同的观念，称为复数的点表示法. 此时称横轴为 x 轴或实轴，纵轴为 y 轴或虚轴. 且称实轴与虚轴确定的平面为复平面，记作 z 平面，如图 1-2-1 所示.

2. 复数的向量表示

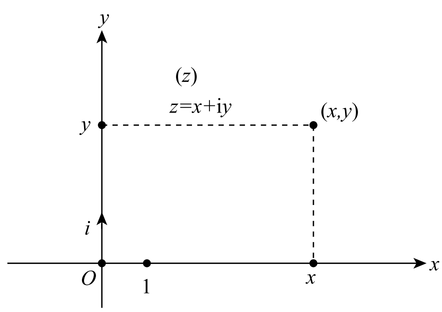


图 1-2-1

我们知道平面上的每一个点都对应一个完全确定的向量，而复数与有序实数对是一一对应的，故复数可以用向量来表示. 如图 1-2-2，复数 $z=x+\mathrm{i}y(\neq 0,\infty)$ 可以用向量$\boldsymbol{OP}$表示，即 $z=\boldsymbol{OP}$，我们把这种方法称为复数的向量表示.

(1)复数的模

向量$\boldsymbol{OP}$的长度称为复数 z 的模，记为 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$. 显然下列各式成立：

$$|x|\leqslant|z|,|y|\leqslant|z|,|z|\leqslant|x|+|y|,z\cdot\bar{z}=|z|^2=|z^2|$$

(2)复数的辐角

当 $z\neq 0$ 时，复数 z 对应的向量$\boldsymbol{OP}$与正实轴的夹角称为复数 z 的辐角(Argument)，记为 $\mathrm{Arg}z=\theta$. 由向量的性质可得如下关系

$$x=|z|\cos\theta, y=|z|\sin\theta, \tan\theta=\frac{y}{x}$$

需要指出的是，任何一个复数 $z\neq 0$ 均有无穷多个辐角，若 θ 为其中一个辐角，那么复数 z 的全部辐角为

$$\mathrm{Arg}z=\theta_0+2k\pi\quad(k\text{ 为任意整数})$$

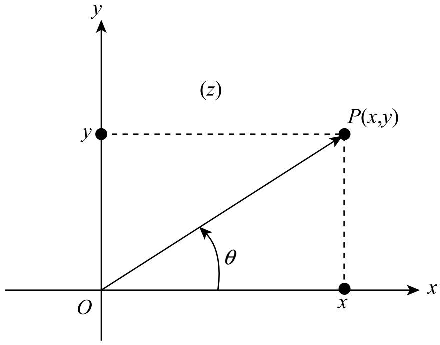


图 1-2-2

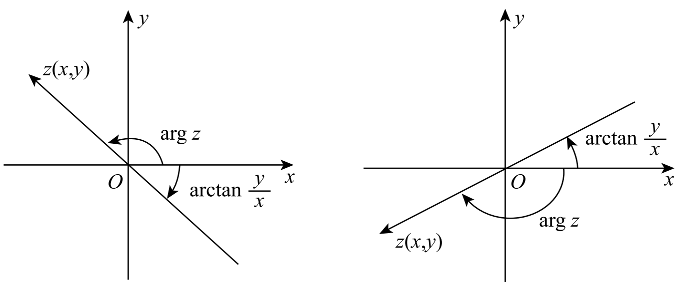
且当 $z=0$ 时，$\boldsymbol{OP}$表示零向量，其辐角不确定，没有辐角.

在复数 $z(\neq 0)$ 的辐角中，把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角 θ_0 称为复数 z 的辐角主值，记为 $\theta_0=\arg z$. 显然，当 $z\neq 0$ 时，$\mathrm{Arg}z$ 的主值有两种，即

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi \text{ 与 } -\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$$

结合图 1-2-3(a)(b)，可知两种主值的关系如下：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, x>0, y\in\mathbf{R}\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}, x=0, y>0\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, x<0, y\geqslant 0\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, x<0, y<0\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2}, x=0, y<0\end{cases}$$



(a)　　　　(b)

图 1-2-3

当我们将复数视为向量时，复数的加减法遵循平行四边形法则或三角形法则，如图 1-2-4 所示.

从三角形法则可以得到以下的三角不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, |z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$$

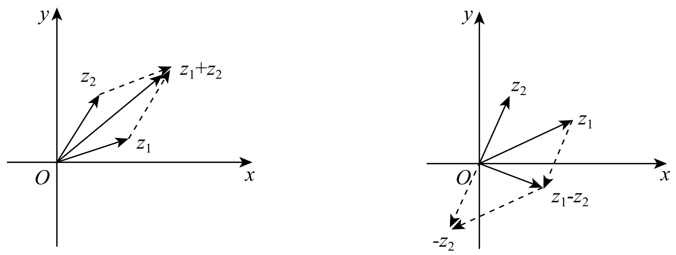


图 1-2-4

其中，$|z_1-z_2|$表示点 z_1 和点 z_2 之间的距离.

例 1.2.1　求下列复数的模与辐角主值

(1)$\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$；(2)$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^n$.

解　由平面上的对应点的位置，可得

(1)$\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}=\dfrac{3-2\mathrm{i}}{(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}=\dfrac{3}{13}+\left(\dfrac{-2}{13}\right)\mathrm{i}$,

$|z|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{13}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{13}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$，$\arg(z)=-\arctan\dfrac{2}{3}$.

(2)$\left(\dfrac{1+\sqrt{3\mathrm{i}}}{2}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$（模为 1，$\arg(z)=\arctan\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$），

$\therefore\left(\dfrac{1+\sqrt{3\mathrm{i}}}{2}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\cos\dfrac{n\pi}{3}$，$|z|=1$，$\arg(z)=\dfrac{n\pi}{3}+2k\pi$

其中，k 满足 $-\pi<\dfrac{n\pi}{3}+2k\pi<\pi$.

3. 复数的三角表示及指数表示

利用直角坐标与极坐标的关系$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，复数 $z(\neq0,\infty)$可以表示为

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

我们把其称为复数 z 的三角表示或极坐标表示.

利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 与三角表示，复数 $z(\neq0,\infty)$可以表示为

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

我们把其称为复数 z 的指数表示.

下面看一下利用复数的三角表示作乘除法.

设有两复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，那么

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1\cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

即$|r_1\cdot r_2|=|r_1|\cdot|r_2|$，$\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$.

那么，从上述关系式可以得到如下结论：

定理 1.2.1 两个复数乘积的模等于它们的模的乘积;两个复数的辐角等于它们的辐角的和.

需要指出的是:对于多值函数,由于辐角是多值的,$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$可理解为对于左端的任一个值,右端有一值与它对应,反之也一样.当用向量表示复数时,从几何意义上,表示乘积 $z_1 \cdot z_2$的向量是从表示 z_1的向量旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$,并伸长(缩短)到$|z_2|$倍得到(图 1-2-4).例如,若 $z_1=\mathrm{i}=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$,$z_2=|z_2|e^{\mathrm{i}\theta}$,则 $z_1 \cdot z_2=\mathrm{i}z=|z|e^{\mathrm{i}(\theta+\frac{\pi}{2})}$,$z_1 \cdot z_2$只由 z_2通过逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到,没有伸缩.

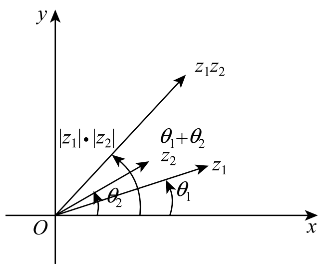


图 1-2-4

同理,对除法可得如下结论:

定理 1.2.2 两个复数的商的模等于它们的模的商;两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

证 当 $z_2\neq 0$ 时,有 $z_1=\frac{z_1}{z_2}z_2$,则

$$|z_1|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right||z_2|,\mathrm{Arg}z_1=\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+\mathrm{Arg}z_2$$

于是 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$

例 1.2.2 将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

(1)$(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i})$;(2)$\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$.

解 (1)$\because 1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})=2e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$,

$-\sqrt{3}-\mathrm{i}=2[\cos(-\frac{5\pi}{6})+\mathrm{i}\sin(-\frac{5\pi}{6})]=2e^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$,

$\therefore(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i})=4[\cos(-\frac{\pi}{2})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{2})]=4e^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}=-4\mathrm{i}.$

(2)$\because 2+\mathrm{i}=\sqrt{5}(\cos\arctan\frac{1}{2}+\mathrm{i}\sin\arctan\frac{1}{2})=\sqrt{5}e^{\mathrm{i}\arctan\frac{1}{2}}$,

$1-2\mathrm{i}=\sqrt{5}(\cos\arctan(-2)+\mathrm{i}\sin\arctan(-2))=\sqrt{5}e^{\mathrm{i}\arctan(-2)}$,

$\therefore\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=[\cos(\arctan\frac{1}{2}+\arctan2)+\mathrm{i}\sin(\arctan\frac{1}{2}+\arctan2)]=e^{(\arctan\frac{1}{2}+\arctan2)\mathrm{i}}.$

4. 复数的乘方与开方

利用复数的指数表达式，对任意正整数 n，复数 z 的乘方为

$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n个}=\underbrace{re^{i\theta}\cdots re^{i\theta}\cdots re^{i\theta}}_{n个}=r^n e^{in\theta}$$

或 $z^n=[(\cos n\theta+i\sin n\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.

对上式，令 $r=1$，得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

其中 n 为任意整数，此公式称为**棣莫弗**(De Moivre)**公式**.

求非零复数 z 的 n 次方根，相当于求解二项方程

$$w^n=z(n\geqslant 2,整数)$$

下面对二项方程 $w^n=z$ 进行求解.

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. 由于 $w^n=z$，则由棣莫弗公式有

$$w^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

又因为辐角具有多值性，所以

$$\rho^n=r, n\varphi=\theta+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

于是 $|w|=\rho=r^{\frac{1}{n}}$. 其中 $r^{\frac{1}{n}}$ 是 r 的 n 次算数根，则

$$\mathrm{Arg}w=\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

上式就是所求的 z 的 n 次方根. 那么，由这个表达式不难得出

(1)当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 n 个相异的根，即

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$$

$$\cdots\cdots$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)$$

当 k 以其他整数值代入时，这些根将重复出现. 由此可知，一个复数 z 的 n 次方根有且仅有 n 个相异值，即

$$\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), k=0,1,\cdots,n-1$$

(2)几何上，$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点，如图 1-2-5 所示 $n=6$ 的情形.

第一个顶点为

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

其他顶点依次为

$$w_k=w_{k-1}\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right),k=0,1,\cdots,n-1$$

或

$$w_k=w_0\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right),k=0,1,\cdots,n-1$$

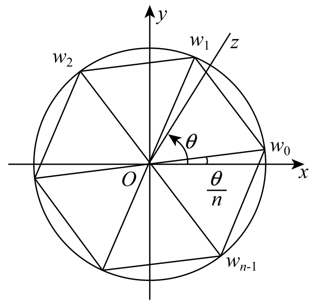


图 1-2-5

例 1.2.3 已知 $z_1=1+\mathrm{i}$,$z_2=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$,求 $\mathrm{Arg}(\frac{z_1}{z_2})$.

解 $z_1=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$

$z_2=1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$

于是

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}}\right)=\mathrm{Arg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}$$

$$=-\frac{\pi}{12}+2k\pi(k\in z)$$

例 1.2.4 计算 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$的值

解 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right]$,

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right],(k=0,1,2,3)$$

即 $w_0=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right]$

$w_1=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right]$

$w_2=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right]$

$w_3=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right]$.

由上面四个根可以看出,它们是内接于中心在原点、半径为$\sqrt[8]{2}$的圆的正方形的四个顶点.

1.3　复平面上的点集

1. 邻域与开集

由不等式 $|z-z_0|<\delta$ 所确定的平面点集，就是以 z_0 为圆心、δ 为半径的圆，称为点 z_0 的 δ-邻域，记为 $N_\delta(z_0)$；若 z_0 不属于其自身的 δ-邻域，则称该邻域为点 z_0 的去心 δ-邻域，记为 $N_\delta(z_0)$，可用 $0<|z-z_0|<\delta$ 表示.

在扩充复平面上，无穷远点的邻域应理解为以原点为圆心的某圆周的外部，即∞的 δ-邻域 $N_\delta(\infty)$是指满足条件 $|z|>\dfrac{1}{\delta}$ 的点集.

假设 D 为复平面上已知的点集，z_0 为 D 中的任意一点，如果存在 z_0 的一个邻域完全属于 D，则称 z_0 为 D 的一个边界点. 如果点集 D 中的每一点全是内点，则称 D 为开集. D 的边界点的集合称为 D 的边界. 如果 D 的边界也全属于 D，则称 D 为闭集. 如果存在一个原点的邻域包含 D，则称 D 为有界集，否则称 D 为无界集.

如果平面上一点 z_0（可不属于 D）的任意邻域都有 D 的无穷多个点，则称 z_0 为 D 的聚点或极限点；如果 z_0 属于 D，但非 D 的聚点，那么称 z_0 为 D 的孤立点；如果 z_0 不属于 D，又非 D 的聚点，则称 z_0 为 D 的外点. 点集 D 的全部聚点所成集用 D' 表示.

2. 区域与简单曲线

复数平面上的一个点集 D，叫做在复数平面上的一个区域，若它具有下面的这两个性质：

(1)在 D 中的每一点，必有以这个点为圆心的一个充分小的圆，同它一起都属于该集合（开集性）；

(2)在 D 中的任何两个点，都可以用一条 D 内的点所构成的折线来连接（连通性）；

如果区域 D 可以包含在一个以原点为中心的圆内，则称 D 为有界区域，否则称为无界区域.

例 1.3.1　复平面上，满足 $r_1<|z-z_0|<r_2$（$r_1<r_2$）的所有点构成一个有界区域，如图 1-3-1 所示，其边界为圆周 $|z-z_0|=r_1$ 与 $|z-z_0|=r_2$，称这样的区域为圆环域. 复平面上满足 $\mathrm{Re}(z)\geqslant 1$ 的所有点构成一个无界的闭区域，如图 1-3-1 示.

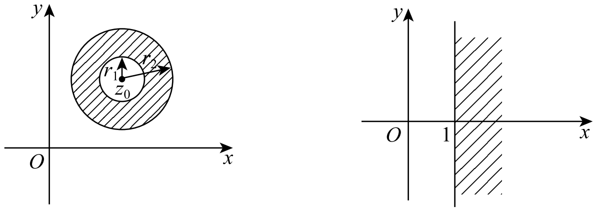
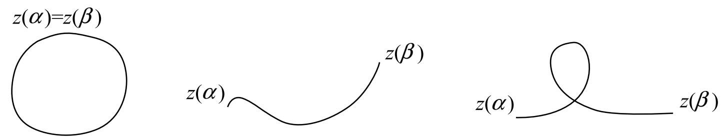


图 1-3-1

设

$$\Gamma: z=z(t)\,(\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{1.3.1}$$

为一条连续曲线，$z(\alpha)$与$z(\beta)$分别称为Γ的起点与终点. 对满足$\alpha<t_1<\beta,\alpha\leqslant t_2\leqslant\beta$的$t_1,t_2$，当$t_1\neq t_2$且$z(t_1)=z(t_2)$时，$z(t_1)$称为$\Gamma$的重点. 没有重点的连续曲线$C$称为简单曲线或若当曲线. 如果简单曲线的起点与终点重合，即$z(\alpha)=z(\beta)$，则称曲线Γ为简单闭曲线，由此便知，简单曲线自身不相交，如图 1-3-2 所示.



(a)简单闭曲线　(b)简单曲线，不闭　(c)非简单曲线

图 1-3-2

定理 1.3.1　(若当定理)简单闭曲线把扩充复平面分成两部分，一部分是不含∞的点集，称为该曲线的内部；另一部分是含 $\mathrm{Re}z(t)$的点集，称为该曲线的外部. 这两部分都是以已给的简单闭曲线(即若当曲线)作为边界.

设在(1.3.1)中，$\mathrm{Re}z(t)$及$\mathrm{Im}z(t)$在$[a,b]$上不但连续，有连续的导数，而且在$[a,b]$上，$z'(t)\neq 0$. 那么曲线(1.3.1)称为一条光滑曲线，此时(1.3.1)的切线随着t连续变动. 有限条光滑曲线相衔接构成一条分段光滑曲线，也记作(1.3.1). 此时虽然$\mathrm{Re}z(t)$及$\mathrm{Im}z(t)$在$[a,b]$上连续，可是它们在闭区间上只是分段有连续的导数.

3. 单连通与多连通区域

设D是一个平面区域，若D中的任意简单闭曲线的内部总包含于D，则称D是单连通区域；否则称D为一个多连通区域. 直观上，单连通区域是“不带洞”的平面点集，而“带洞”的区域必为复连通，如图 1-3-3 所示.

(a)单连通区域　(b)多连通区域

图 1-3-3

对于扩充复平面 $\mathbf{C}_\infty$，单连通区域的定义要作一点修改，即：如果区域D内任何简单闭合曲线的内区域或外区域(包括无穷远点)中每一点都属于D，那么D称为单连通区域；否则称为多连通区域.

1.4　负球面与无穷远点

复数还有一种几何表示法，它是借助地图制图学中将地球投影到平面上的测地投影法，建立复平面与球面上的点的一一对应，下面着重说明引入无穷远点的合理性.

将xOy平面看做复平面，取一个球面将其南极S与复平面上原点相切，如图 1-4-1 所示.

设 P 为球面上的任一点，从球面北极 N 作射线 NP，必交于复平面的一点 Q，它在复平面上表示一个模为有限的复数. 反过来，从球极 N 出发，且过复平面上任一模为有限的点 Q 的射线，也必交于球面上的一个点，记为 P. 于是复平面上的点与球面上的点(除 N 点外)建立了一一对应关系.

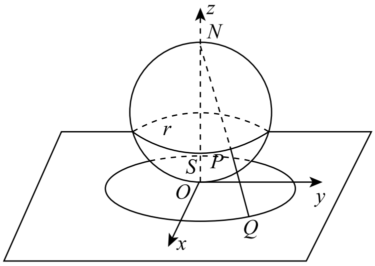


图 1-4-1

考虑复平面上一个以原点为中心的圆周 C，在球面上对应的也是一个圆周 Γ. 当圆周 C 的半径越大时，圆周 Γ 就越趋于北极 N，因此北极 N 可以看成是与复平面上的一个模为无穷大的假想点相对应，这个假想点称为无穷远点，记作∞. 因而球面上的北极 N 就是复数无穷大∞的几何表示. 不包括无穷远点的复平面称为有限复平面，或简称复平面. 包括无穷远点的复平面称为扩充复平面. 球面上的每一个点与扩充复平面的每一个点构成了一一对应，这样的球面称为复球面. 引入复球面后，能将扩充复平面的无穷远点明显地表示出来.

无穷大∞同样也具有四则运算，如下：

(1)加法：$\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty(\alpha\neq\infty)$；

(2)减法：$\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty(\alpha\neq\infty)$；

(3)乘法：$\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty(\alpha\neq 0)$；

(4)除法：$\frac{\alpha}{\infty}=0,\frac{\infty}{\alpha}=\infty(\alpha\neq\infty)\frac{\alpha}{0}=\infty,(\alpha\neq 0)$；

(5)$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty\cdot 0,0\cdot\infty,\infty\pm\infty$都无意义；

(6)∞的实部、虚部及辐角都无意义，$|\infty|=+\infty$；

(7)$\mathbf{C}_\infty$上每条直线都通过∞，同时，∞不属于任何一个半平面.

1.5　复变函数

对于在 z 平面上点的一个集合 M，如果已经指明一个规则，按着这个规则，M 的每一个点 z 都有一个确定的点，或一些确定的点 ω 的总和与它对应，那么我们就说，在点集 M 上已给定了一个函数

$$\omega=f(z) \tag{1.5.1}$$

对函数 $\omega=f(z)$，若每一点 z 都有一个确定的点 ω 与它对应，则称为单值函数；若一些确定的

点 ω 与它对应，则称多值函数. M 叫做函数 $f(z)$ 的定义集合，而 $f(z)$ 在 M 上所取的一切值 ω 的集合 N 叫做函数的量变集合.

设 $z=x+\mathrm{i}y,\omega=u+\mathrm{i}v$，那么给定一个复变函数 $\omega=f(z)$，就等价于给定两个含有两个实变量的函数

$$u=u(x,y),v=v(x,y) \tag{1.5.2}$$

若我们把 z 的值放在一个复平面上，而 ω 的值放在另一个复平面上. 那么，一个复变函数在几何上就可以看做是 z 平面上的集合 M 到 ω 平面上的集合 N 的某一个映射. 若函数 $\omega=f(z)$ 在集合 M 上是单值的，并且对于 M 的两个不同的点，对应着 N 的两个不同的点，那么这种映射就称为在 M 内是一一的，或单叶的.

设已给定了一个把集合 M 映射到 N 上的函数 $\omega=f(z)$. 如果有一个 $z=\varphi(\omega)$，它使得 N 中的每一个点 ω，都与所有那些由函数 $\omega=f(z)$ 映到点 ω 上的点 z 对应，那么这个函数 $z=\varphi(\omega)$ 就叫做函数 $\omega=f(z)$ 的反函数，如图 1-5-1 所示. 显然，当且仅当 f 与 φ 这两个函数都是单值函数时，映射 $\omega=f(z)$ 是相互一一对应的.

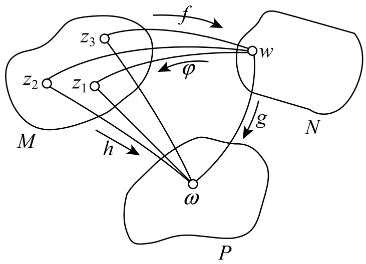


图 1-5-1

设函数 $\omega=f(z)$ 把集合 M 映到 N 上，而 $\omega=g(\omega)$ 又把集合 N 映到 P 上，则我们把集合 M 映到 P 上的那个函数

$$\omega=h(z)=g[f(z)] \tag{1.5.3}$$

叫做由 f 与 g 所合成的复合函数. 而对应的映射 h，则叫做映射 f 与 g 的乘积(叠加)，如图1-5-1所示. 特别地，当映射 $\omega=f(z)$ 是一一映射时，函数 $z=\varphi(\omega)$ 是 f 的反函数，那么就有

$$\varphi[f(z)]=z \tag{1.5.4}$$

例 1.5.1 求 $u=c_1$ 与 $v=c_2$ (c_1,c_2 均为实常数)在 $\omega=f(z)=z^2$ 映射下的原像.

解 将 $f(z)=z^2$ 写成如下形式

$$f(x+\mathrm{i}y)=x^2+2\mathrm{i}xy-y^2$$

由此可得

$$\begin{cases}u(x,y)=x^2-y^2\\ v(x,y)=2xy\end{cases}$$

于是，$u=c_1$ 在 $\omega=z^2$ 的映射下的原像为

$$x^2-y^2=c_1$$

这是 z 平面上的一族等轴双曲线. 而 $v=c_2$ 的原像为

$$2xy=c_2$$

这是 z 平面上的另一族(以坐标轴为渐近线的)双曲线，如图 1-5-2 所示.

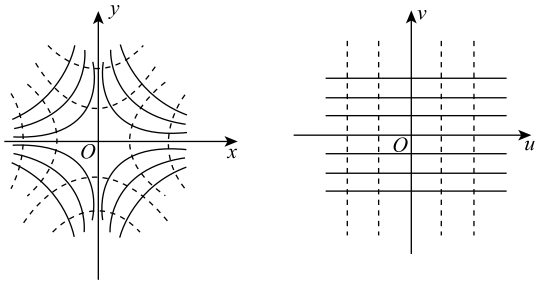


图 1-5-2

1.6　复变函数的极限与连续性

设 $\omega=f(z)$ 在点 z_0 的某邻域内有定义且是单值的，但在 z_0 点可以没有定义. 当 z 以任意方式无限地接近于 z_0 时，函数的对应值 $f(z)$ 无限地接近于定值 A，则称定值 A 是函数 $f(z)$ 当 z 趋近于 z_0 时的极限，并记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \tag{1.6.1}$$

关于极限的定义还可用 ε-z 说法表述如下：

设函数 $\omega=f(z)$ 在点 z_0 的去心邻域 $0<z-z_0<\rho$ 内有定义. A 是一个确定的常数，若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0(0<\delta\leqslant\rho)$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，则称 A 是 $f(z)$ 当 z 趋近于 z_0 时的极限，记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A$$

这个定义的几何意义：当变点 z 在 z_0 的一个充分小的 δ 邻域变化时，它们的像点就落在点 $A(\neq\infty)$ 的一个给定的 ε 邻域内，如图 1-6-1 所示.

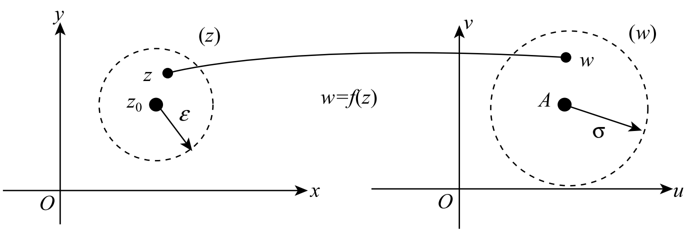


图 1-6-1

由于我们的定义归结到通常的实变函数的极限定义上，所以在实变函数中的那些关于取极限的基本性质，对于复变函数来说仍然有效，故我们有

$$\begin{cases}\lim(f\pm g)=\lim f\pm\lim g\\ \lim(fg)=\lim f\cdot\lim g\\ \lim\dfrac{f}{g}=\dfrac{\lim f}{\lim g}(\lim g\neq 0)\end{cases} \tag{1.6.2}$$

需要指出的是，根据定义函数 $f(z)$ 趋向自己的极限是不依赖于点 z 趋近 z_0 的方式的. 即，如果极限存在，那么在 z 以任何规则趋向于 z_0 时，$f(z)$ 总是趋近于这极限. 且极限存在是唯一的.

定理 1.6.1 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 上有定义，其中 $z=x+\mathrm{i}y$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A=a+\mathrm{i}b$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=a,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=b \tag{1.6.3}$$

证 充分性. 由 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=a$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=b$ 可知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，恒有 $|u-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|v-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，于是

$$0<\sqrt{(u-a)^2+(v-b)^2}<|u-a|+|v-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即 $|(u-a)+\mathrm{i}(v-b)|<\varepsilon$，$|(u+\mathrm{i}v)-(a+\mathrm{i}b)|<\varepsilon$.

于是 $|f(z)-A|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$.

必要性. 设 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 即 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，恒有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，即 $\sqrt{(u-a)^2+(v-b)^2}<\varepsilon$，

因此 $|u-a|<\varepsilon$，$|v-b|<\varepsilon$. 于是，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=a$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=b$.

这个定理表明了复变函数极限的存在性，等价于其实部与虚部的两个二元实函数极限的存在性，即把求复变函数的极限转化为求该函数的实部与虚部的极限，即求两个二元函数的极限.

如果函数 $f(z)$ 定义在 z_0 的某个邻域内，且

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0) \tag{1.6.4}$$

则称函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续. 显然，函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续的充分必要条件是：$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 这两个函数都在点 (x_0,y_0) 处连续. 且在点 z_0 处连续的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商（分母在 z_0 处不为零）在 z_0 处仍连续；如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续，函数 $\omega=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 连续，则符合函数 $\omega=f[g(z)]$ 在 z_0 处连续.

如果函数 $f(z)$ 在 z 平面上的某一区域 D 内的每一点处都连续，则称 $f(z)$ 在区域 D 内连续.

我们引入在任何集合上函数连续的概念. 设函数 $f(z)$ 定义在集合 A 上和 z_0 是该集合的极限点，如果在每一个极限点 $z_0\in A$，沿集合的极限

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}}f(z)=f(z_0) \tag{1.6.5}$$

那么称函数 $f(z)$ 在集合 A 上连续.

对于在闭区域内连续的函数，以及在闭曲线上或一条包括其两个端点在内的曲线段上连续的函数来说，通常在闭区域上连续的实函数的一般性质，亦是正确的，即在每一个闭集 $\overline{A}$ 上连续的函数 $f(z)$：