

序

《电动力学》课程是物理学专业重要的理论必修课,是物理学的四大力学之一,其与量子力学统属物理专业最重要的理论基础课程;也是目前高等学校理、工科和师范院校本科物理类专业的一门重要基础理论课。由于该课程涉及的数学知识较多,例如,复变函数、格林函数、特殊函数、数理方程、矩阵、矢量分析和张量分析。这给学习《电动力学》的学生带来了一定的难度,为给学习《电动力学》的学生提供一定的帮助,作者将自己80年代初以来收集到的270题进行了较为详细解答和整理,历经数年才得以完成此书。其中包含了郭硕鸿先生著《电动力学》第二版几乎所有习题的解答,还有不少习题是研究生的入学考试试题。

由于作者多年来一直使用郭硕鸿先生著《电动力学》第二版作为参考教材,所以,本书中将该参考教材称为“教材”。出版本书旨在对学习该门课程的学生有所帮助,且对他们考研究生也有所作用,同时也希望为初讲授《电动力学》这门课程的年轻教师提供一定的教学参考。本书后面附有数学附录和部分基本物理常数,列出了所需的数学知识和计算所需的一些基本物理常数值。

由于作者学识水平有限,错误在所难免,敬请读者批评指正。

作者

2007年10月2日

目 录

第一章 电磁现象的普遍规律	(1)
1.1 证明恒等式 $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2$ 等	(1)
1.2 证明公式 $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$ 等	(1)
1.3 证明 $\nabla f(u) = \frac{df}{du} \nabla u$ 等	(2)
1.4 证明 $\nabla r = -\nabla' r$ 等, 求 $\nabla \times \vec{r}$ 等	(3)
1.5 求 $\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$, $\nabla \times (r^n \vec{r})$ 等	(6)
1.6 证明 $\nabla \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3}\right)$	(6)
1.7 求 ∇r^2 , $\nabla \times (\vec{c} \times \vec{r})$ 等	(7)
1.8 证明 $\nabla \cdot \vec{E} = \rho(\vec{x})/\epsilon_0$, $\nabla \times \vec{E} = 0$	(7)
1.9 推导出正交曲线坐标系中 $\nabla^2 \varphi$ 的表达式	(8)
1.10 证明 $\int_V dV \nabla \times \vec{f} = \oint_S d\vec{S} \times \vec{f}$	(9)
1.11 证明 $\int_S d\vec{S} \times \nabla \varphi = \oint_L \varphi d\vec{l}$ 等	(9)
1.12 证明 $\frac{d\vec{P}}{dt} = \int_V \vec{J}(\vec{x}', t) dV'$	(10)
1.13 证明 $\nabla \times \vec{A} = -\nabla \varphi$	(11)
1.14 证明 $\rho_p = -(1 - \epsilon_0/\epsilon)\rho$	(12)
1.15 证明 $\vec{J}_m = (\mu/\mu_0 - 1)\vec{J}_f$	(12)
1.16 求均匀带自由电荷 ρ_f 的空心介质球的电场分布、 ρ_p 和 σ_p	(13)
1.17 由麦克斯韦方程组导出电荷守恒定律	(13)
1.18 求流有恒定均匀电流密度 \vec{J}_f 的无穷长中空导体圆柱的 \vec{B} 和 $\vec{\alpha}_m$	(13)
1.19 证明 $\tan\theta_2/\tan\theta_1 = \epsilon_2/\epsilon_1$ 和 $\tan\theta_2/\tan\theta_1 = \sigma_2/\sigma_1$	(14)
1.20 求两个导电交界面上的自由电荷面密度	(15)
1.21 证明导体外的电场线总是垂直于导体表面, 导体内的电场线总是平行于导体表面	(15)

1.22 证明在介质中任何一点的传导电流与位移电流严格抵消等	(16)
1.23 求电偶极子在非均匀电场中所受的力矩	(18)
1.24 求电偶极子在 \vec{r} 处产生的电势和电场	(19)
1.25 求电荷密度为 $\rho(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\frac{d\delta(z)}{dz}$ 的电荷产生的电势	(20)
1.26 求基态氢原子的电势 φ 和 \vec{E}	(20)
1.27 求基态氢原子的静电能	(21)
1.28 证明电荷密度为 $\rho(\vec{r})$ 的电荷在外电场中的电势能为 $W = -\vec{P} \cdot \vec{E}_0$	(22)
1.29 求导电平面上的薄的均匀的充电金属圆盘离开导电平面时的电荷密度	(22)
1.30 求平板电容器极板、介质表面的电荷密度和电容器中的电场能量	(23)
1.31 求处于均匀电场中的介质板内外的电场和介质表面的极化电荷面密度	(24)
1.32 由电势分布求电荷分布	(25)
1.33 证明实际导体表面的自由电流线密度等于零	(25)
1.34 求两分界面上相互正交坐标系中的 \vec{E} 的边界条件表达式	(25)
1.35 证明均匀且各向同性的良导体内不可能有电荷积累	(26)
1.36 证明两闭合的恒定电流圈之间的相互作用力大小相等, 方向相反	(27)
1.37 求两板间电压为 $V = V_m \sin \omega t$ 时电容器中任一点的磁感应强度 \vec{B}	(28)
1.38 求带有电压 $V = V_0 \cos \omega t$ 的电容器中的位移电流、 \vec{H} 和 \vec{S}	(28)
1.39 求均匀带电圆环在空间任一点产生的电势	(30)
1.40 求平面螺旋电流导线轴线上任一点的磁感应强度沿轴线方向的分量	(31)
1.41 求含有任意电荷分布的球体内部的平均电场	(31)
第二章 静电场	(34)
2.1 介质球的极化电荷	(34)
2.2 由 ρ 和 $\varphi(r)$ 分布求 ρ'	(35)
2.3 在柱坐标系就 ψ 分别与 ρ, φ 和 z 有关时求解 $\nabla^2 \psi = 0$	(36)
2.4 证明无电荷处的电势不能达极大值亦不能达极小值	(37)
2.5 由解拉普拉斯方程求平板电容器间的电势、电场强度和极板上的电荷面密度	(38)
2.6 用分离变量法求均匀电场中导体球的电势	(39)
2.7 证明电势表达式为 $\varphi(r, \theta) = A \cos \theta + Br^{-2} \cos \theta$	(40)
2.8 均匀介质球中心有一自由电偶极子时空间各点的电势	(41)
2.9 驻极体介质球在外电场中极化后空间的电势和极化电荷分布	(43)
2.10 无限大介质中有球形空腔和外加均匀电场时腔内的电场	(44)
2.11 带均匀自由电荷的介质球置入均匀电场中时空间的电势和球上的极化电荷	(45)
2.12 均匀外电场中置入一带均匀自由电荷绝缘介质球时空间各点电势及球上极化电荷	(47)
2.13 电荷线密度为 λ 的无限长圆柱处于均匀电场中时空间的电场分布	(49)

2.14 电导率为 σ_1 的小球放入电导率为 σ_2 的电解液时小球和电解液的电流密度等	(51)
2.15 接地导体平面有一半球凸部时半球所在空间的电势和半球上的感应电荷	(53)
2.16 距无限大导体平面为 a 处有一点电荷时导体平面外的电势分布等	(54)
2.17 距导体球为 a 处有一点电荷时球外的电势分布等	(56)
2.18 证明相交成直角的两接地导体球的感应电荷为 $(1/3 - 2/\sqrt{5})q$	(57)
2.19 充满电介质的半径为 R_0 的导体球形空腔有点电荷时的 $P(r, \theta)$ 和 φ 等	(58)
2.20 介质 1 中的点电荷距介质 1 和介质 2 的无穷界面为 h 时点电荷的电场等	(59)
2.21 带电金属球与同心金属球壳间充满两均匀介质时介质内的电场和球上的电荷分布等	(60)
2.22 球面的两半球面电势分别为 φ_0 和 $-\varphi_0$ 时空间各点的电势	(63)
2.23 正对着平放在无穷大导体平面的半球块放置一点电荷时点电荷所受的力等	(67)
2.24 证明空心无限长导体圆柱面内部的电势为	
$\varphi(r, \alpha) = (V_1 + V_2)/2 + (V_1 - V_2)/\pi \times \text{tg}^{-1}[2Rr\cos\alpha/(R^2 - r^2)]$	(69)
2.25 带电无穷大导体平面上平放置一不带电半球导体时导体外的电势等	(72)
2.26 带电无穷大导体平面上平放置一不带电半球导体时平面电场多大时半球离开平面	(73)
2.27 证明球对称分布电荷体系对球心的电偶极矩及电四极矩为零	(74)
2.28 相距为 $2d$ 的两等量点电荷间放置一接地导体球时点电荷不受力的条件为何	(75)
2.29 相距为 $2d$ 的两等量点电荷间放置一不接地导体球时导体球的电量和点电荷所受的力	(75)
2.30 在充满半无界空间介质中的空心小球内放置一点电荷时点电荷所受的力	(76)
2.31 证明无电荷空间任一点的电势值等于以该点为球心的任意球面上电势的平均值	(76)
2.32 均匀电场中有一均匀带电的介质球时空间的电势分布	(77)
2.33 距导体球很远处放置一极化率为 χ 的介质小球时小球所受的力	(78)
2.34 距介质球为 s 处放置一点电荷时介质球内外的电势	(79)
2.35 球洞中点电荷所受的力等	(80)
2.36 距点电荷为 d 处有一电偶极子时电偶极子所受的力和力矩	(81)
2.37 均匀电场中有一被介质包围的无限长圆柱导体时空间的电势	(82)
2.38 距无限大导体平面为 h 处有一电偶极子时导体平面与电偶极子的相互作用能	(84)
2.39 导体球的球心位于两无限大介质的分界面上时导体表面上的自由电荷分布	(85)
2.40 接地导体球与距它为 a 处的点电荷组成的系统放入均匀电场中点电荷受力为零时的电量	(86)
2.41 以球外空间的格林函数为例简述静电场中格林函数的对称性 $G(\vec{x}', \vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{x}')$	(86)
2.42 距均匀带电细圆环环心为 r 处的电势	(87)
2.43 均匀电场中放入一带自由电荷密度为 ρ_f 的介质球时空间各点的电势	(88)
2.44 内外半径为 R_1 和 R_2 的空心导体球内距球心为 a 处有一点电荷时导体球上的感应电荷等	(90)
2.45 距河面高度为 d 处有一输电线经过时河面内外的电场	(91)
2.46 证明球心处的电势等于球面上电势的平均值	(92)
第三章 静磁场	(95)

- 3.1 由矢势 $\vec{A} = 5\vec{e}_z / (x^2 + y^2 + z^2)$ 求磁感应强度 \vec{B} (95)
- 3.2 用 \vec{A} 表示沿 z 方向的均匀恒定磁场, 写出两种不同表示式, 证明二者之差是无旋场 (95)
- 3.3 用唯一性定理求均匀无限长直圆柱形螺线管内外的磁感应强度 (96)
- 3.4 用唯一性定理求无穷长线电流 I 沿 z 轴流动时的磁感应强度 \vec{B} 及磁化电流分布 (96)
- 3.5 求线电流 I 沿 z 轴流动时的磁感应强度和磁化电流分布 (97)
- 3.6 已知柱坐标原点附近 $B_z \approx B_0 - C(z^2 - r^2/2)$, 求该处的磁感应强度 (98)
- 3.7 求两个半径为 a 的共轴圆形载流线圈轴线上的磁感应强度等 (99)
- 3.8 半径为 a 的无限长圆柱导体内有恒定电流均匀分布于截面上, 解矢势 \vec{A} 的微分方程 (100)
- 3.9 找出矢势 \vec{A} 的一个可能的表达式, 并讨论它的奇异性 (101)
- 3.10 地球大气层中稳定电流的电场和电流 (102)
- 3.11 磁导率为 μ 半径为 R 的介质球放入均匀磁场中时的磁感应强度、磁矩和磁化电流 (104)
- 3.12 求空腔内的磁场 \vec{B} , 讨论 $\mu \gg \mu_0$ 时的磁屏蔽作用 (106)
- 3.13 理想铁磁体的均匀磁化球放入无限大介质中时磁感应强度和磁化电流 (108)
- 3.14 永磁体球放入均匀外磁场中的磁感应强度和磁化电流 (109)
- 3.15 均匀磁化的无穷长介质圆柱的磁化强度 (111)
- 3.16 均匀磁化介质球的磁标势和磁感应强度 (113)
- 3.17 半径为 R 均匀流有电流 \vec{J} 的圆柱导电介质的磁场分布 (114)
- 3.18 均匀磁化介质球的矢势和磁感应强度 (116)
- 3.19 半径为 R 的球形永磁体所激发的磁场 (120)
- 3.20 均匀带电球面旋转时的磁场分布 (122)
- 3.21 距长为 L 半径是 R_0 的均匀磁化棒为 $r (r \gg L)$ 处的磁感应强度 (126)
- 3.22 相距为 \vec{r} 在同一平面两磁偶极子的 α_1 与 α_2 的关系 (127)
- 3.23 超导电流密度由式 $\nabla \times (\Omega \vec{J}_s) = -\vec{B}/c$ 决定的超导体中的磁场 \vec{B} 分布 (128)
- 3.24 电流密度分别为 \vec{i}_1, \vec{i}_2 的两无限大平行导体板间的磁感应强度和磁化电流密度 (129)
- 3.25 证明带有电流的无限长圆柱体有一偏轴圆柱空腔时腔内磁场是均匀的等 (130)
- 3.26 圆形平板电容器加电压后与电源断开时板上电荷随时间的变化规律等 (132)
- 3.27 电流 I 均匀分布在半径为 R 的无限长圆柱导体的横截面上时的矢势和磁场强度 (132)
- 3.28 均匀介质球壳内外空间的标势分布及壳内的磁场强度 (134)
- 3.29 圆形电流回路产生的矢势和磁感应强度 (136)
- 3.30 电流为 I 的长直导线与两种介质的分界面平行, 求磁场强度及载流导线所受的力 (139)
- 3.31 证明圆心在坐标原点, 所载电流 I 垂直于 z 轴的小线圈产生的磁感应强度 (141)
- 3.32 证明仿迹仪有 $mv/Q = T/I$ (143)
- 第四章 电磁波的传播** (145)
- 4.1 证明合成波的振幅不是常数, 而是一个波, 求合成波的相速度和群速度 (145)
- 4.2 证明 $\vec{k} \cdot \vec{B} = \vec{k} \cdot \vec{D} = \vec{B} \cdot \vec{D} = \vec{B} \cdot \vec{E} = 0$, 但一般 $\vec{k} \cdot \vec{E} \neq 0$ 等 (145)

4.3 求导电介质中电磁波的相速度和衰减长度	(147)
4.4 平面电磁波在两种介质分界面上发生反射时 \vec{B} 的反射系数和折射系数	(148)
4.5 平面电磁波从真空入射到介质时的反射系数和折射系数	(149)
4.6 证明可见平面光从水入射到空气时会发生全发射并求折射波沿表面传播的相速度	(150)
4.7 求反射系数和布儒斯特角	(150)
4.8 证明 $R + T = 1$	(152)
4.9 由波型求频率及波长等	(153)
4.10 由反射波电场选择正确答案	(154)
4.11 由金属中传播电场选择正确答案	(154)
4.12 证明麦氏方程组的解只与 z 和 t 有关时, 则此解是由相互独立的解 (E_x, H_y) 和 (E_y, H_x) 组成	(154)
4.13 求沿 x 方向传播的单色平面电磁波的磁场强度和能流密度瞬时值等	(155)
4.14 证明在无色散介质中能量传播速度为 $\vec{u} = \vec{S}/w$ 的平面电磁波的 \vec{u} 等于相速度 \vec{v}	(156)
4.15 平面电磁波电场为 $(E_x = 0, E_y = A \cos \omega(t - x/c), E_z = A \cos \omega(t - z/c))$ 时的 \vec{B} 和 \vec{S}	(157)
4.16 由边值关系导出单色平面电磁波在两种介质分界面上反射波振幅与入射波振幅的关系	(157)
4.17 证明平面电磁波垂直入射到金属表面上时透入金属内的电磁波能量全部变为焦耳热	(159)
4.18 证明平面电磁波在两种介质分界面上发生反射和折射时能量是守恒的	(159)
4.19 频率和振幅都相等且相互独立的单色平面电磁波在三种情况下合成电磁波的偏振状态	(161)
4.20 证明沿 z 方向传播的电磁波的介质阻抗为 $\eta = E/H = \sqrt{\omega\mu/(\mu\epsilon + i\sigma)}$	(162)
4.21 频率为 ν 的电磁波在海水中的穿透深度	(163)
4.22 频率为 ν 的电磁波从空气垂直入射到某介质时的穿透深度	(163)
4.23 求单色平面波的 \vec{E} 与 \vec{H} 的相位差和振幅比	(164)
4.24 证明电磁场所有分量都可以用 $E_x(x, y)$ 及 $H_x(x, y)$ 这两个分量表示	(165)
4.25 电磁波从真空射到无穷大良导体平面时电磁波的衰减长度	(166)
4.26 证明两圆形板组成的平板电容器漏电时直流电源供给的能量等于电容器消耗的焦耳热	(167)
4.27 论证矩形波导管内不存在 TM_{m0} 波或 TM_{0n} 波	(168)
4.28 求已知频率的微波在矩形波导管中以什么波模传播等	(169)
4.29 求无限长的矩形波导管内可能存在的波模	(170)
4.30 导出矩形波导管内磁场 \vec{H} 满足的方程和边界条件	(172)
4.31 证明整个谐振腔内的电场能量和磁场能量对时间的平均值总相等	(172)
4.32 在圆柱型波导管中传播的电磁波的横向分量都可以用纵向分量表示的表达式	(173)
4.33 腔壁是用理想导体制成的边长为 a, b, c 的长方体谐振腔的电场能量等	(174)
4.34 求中空矩形波导内可能传播的波形有几种	(176)
4.35 电磁波沿两平行无限大理想导体板的板面方向传播时可能传播的波型和截止频率	(176)
4.36 证明 $(\nabla^2 + K^2)\psi = 0$ 具有出射波形式的格林函数为 $G(\vec{x}, \vec{x}') = e^{iK r}/r$	(177)
4.37 TE_{10} 波在矩形波导管中的传输功率和管壁电流	(180)

- 4.38 平面单色电磁波从真空射到折射率为 n 厚度为 d 的介质膜时要消除反射 d, n, ω 的关系 (181)
- 4.39 管壁为理想导体的矩形直波导管中传播的各种波的截止频率 (182)
- 4.40 标量理论的实质并对标量衍射的基尔霍夫公式作出合理近似等 (184)

第五章 电磁波的辐射 (186)

- 5.1 用纵场和横场的形式写出电磁场中 \vec{E}, \vec{B} 和 \vec{A}, φ 之间的关系式等 (186)
- 5.2 在 \vec{A} 和 φ 满足洛伦兹条件的情况下, 是否还可以进行规范 (186)
- 5.3 对于自由平面波, 若场的矢势 \vec{A} 垂直于波的传播方向, 证明此时标势 $\varphi = 0$ (187)
- 5.4 平面波 $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ 在何情况下与传导电流相比可以忽略位移电流等 (187)
- 5.5 试由关系 $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$ 和 $\vec{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$, 证明 $\partial t' / \partial t = c / (c - \vec{n} \cdot \vec{v})$ 等 (188)
- 5.6 证明电场的无旋部分对应于库仑场等 (188)
- 5.7 证明在线性各向同性均匀的非导电介质中 \vec{A} 满足哪两个方程 (189)
- 5.8 证明沿 z 轴方向传播的平面电磁波可用矢势 $\vec{A}(\omega, \tau)$ 表示 (190)
- 5.9 证明 \vec{a}_k 满足谐振子方程 $\frac{d^2 \vec{a}_k(t)}{dt^2} + k^2 c^2 \vec{a}_k(t) = 0$ 等 (191)
- 5.10 证明 $\vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}$ 等 (192)
- 5.11 证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生 (194)
- 5.12 求球对称电荷分布的辐射场 (194)
- 5.13 求带电飞轮以恒定角速度 ω 旋转时的辐射场 (194)
- 5.14 利用电荷守恒定律, 验证 \vec{A} 和 φ 的推迟势满足洛伦兹条件 (195)
- 5.15 半径为 R_0 的均匀永磁球体的辐射场等 (196)
- 5.16 带电粒子 e 作半径为 a 的非相对性圆周运动时远处的辐射场和能流 (198)
- 5.17. 求电偶极子的电矩为 $\vec{P} = \vec{P}_0 e^{i\omega t}$ 的振荡电偶极子的电磁场等 (198)
- 5.18 求介质球所产生的辐射场和能流 (200)
- 5.19 在非相对论的情况下证明 $\vec{E}_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \vec{n}}{dt^2}$ (202)
- 5.20 求电荷量为 q 的粒子沿 z 轴作简谐振动时的辐射场 (203)
- 5.21 求带电粒子 q 作半径为 a 的非相对论性匀速圆周运动时的辐射场 (204)
- 5.22 求电偶极子的电偶极矩 \vec{P} 随时间 t 作简谐振动时的辐射总功率等 (205)
- 5.23 证明电流产生的辐射场的磁感应强度为 $\vec{B} = -\frac{\partial A}{\partial r} \sin \theta \vec{e}_\theta$, (207)
- 5.24 接收器从理想导体表面移动多大距离时 P 点可收到第一个极大值的波 (207)
- 5.25 两电量均为 e 相距固长为 $2l$ 绕垂直于固长中点的轴转动时的辐射场 (208)
- 5.26 电流为 $I = I_0 \sin \omega t$ 的电偶极型天线的辐射场 (210)
- 5.27 求带有电荷 e 的粒子产生的电磁场的标势 $\varphi(\vec{x}, t)$ 所满足的场方程等 (211)
- 5.28 求交变电流 $\vec{J}(\vec{x}', t) = \vec{J}(\vec{x}') e^{-i\omega t}$ 在 $r \gg \lambda$ 时辐射的矢势 \vec{A} 的表达式等 (213)

5.29 求电偶极辐射矢势为 $\vec{A}(\vec{k}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R}$ 的辐射场和平辐射能流	(215)
5.30 写出匀速直线运动带电粒子电磁场标势 φ 所满足的场方程	(216)
5.31 电偶极子在 xOy 平面内旋转时的辐射场	(216)
第六章 狭义相对论	(218)
6.1 证明在伽利略变换下, 牛顿定律是协变的, 麦克斯韦方程不是协变的	(218)
6.2 求列车上的观察者测量到电光到达两铁塔的时刻差	(218)
6.3 证明在 $\Delta l = 0$ 的惯性系中 Δt 最短, 在 $\Delta t = 0$ 的惯性系中 Δl 最短	(219)
6.4 求地面观察者观察小球从后壁到前壁所需的时间	(220)
6.5 站在一尺测另一尺的长度	(220)
6.6 观察者以速度 \vec{v} 沿 x 轴运动时看到两物的距离是多少	(221)
6.7 一观察者以速度 \vec{v} 沿 x 轴运动, 他看到直尺与 x 轴交角 θ' 有何变化	(221)
6.8 问处于 Σ 中某点 (x, y, z) 时钟与 Σ' 中何处时钟相遇时, 指示的时刻相同, 读数是多少	(222)
6.9 问按照静止系的时钟和按照火箭内的时钟加速火箭各需多少时间	(222)
6.10 一列车穿过山洞时地面和车上观察者各测得列车穿过山洞的时间是多少	(223)
6.11 两束电子作迎面相对运动时实验室观察者测得它们的相对速度是多少	(224)
6.12 接收器收到运动发生器相邻两次信号的时间间隔	(224)
6.13 宇宙飞船相对于地球的速度	(224)
6.14 光源发出讯号到接收器收到讯号所经历的时间	(225)
6.15 证明当 $u < c$ 和 $v < c$ 时 $V < c$	(226)
6.16 用相对论力学方程证明力与加速度的比为 $m_0 / \sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}$	(227)
6.17 相对于粒子瞬时静止的惯性系测得的粒子加速度	(228)
6.18 光脉冲从 A 发出到返回 A , 所经历的时间各是多少	(229)
6.19 证明 $\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{v} \cdot \vec{r}/v^2)\vec{v} - \gamma\vec{v}t$ 和 $t = \gamma(t - \vec{v} \cdot \vec{r}/c^2)$	(230)
6.20 两人沿与 x 轴平行跑道起跑的时差在何范围内起跑不吃亏	(231)
6.21 一束光入射到作匀速运动的平面镜上时反射光的频率和反射角	(231)
6.22 飞船上的观察者认为时钟的读数不对	(232)
6.23 A 和 B 是孪生兄弟, B 留在地球上, A 乘火箭作航天飞行时谁年轻	(232)
6.24 平面镜以速度 \vec{v} 作匀速运动, 求反射光的频率	(235)
6.25 在洛伦兹变换中, 若定义快速 y 为 $\tanh y = \beta$, 证明可用速度表为 $y = y' + y''$	(236)
6.26 证明一个静电场经过洛伦兹变换不可能变成纯粹磁场	(237)
6.27 证明在任何惯性系观测磁感应强度都与电场强度垂直	(238)
6.28 证明 $\vec{E} \cdot \vec{B}$ 和 $B^2 - E^2/c^2$ 在洛伦兹变换下为不变量	(238)
6.29 证明 $a_{\mu\alpha} a_{\mu\beta} = \delta_{\alpha\beta}$	(239)
6.30 证明洛伦兹变换下 $dx_\mu dx_\mu$ 是不变式和 $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ 是不变算符	(240)

- 6.31 电偶极子 \vec{P}_0 以速度 \vec{v} 作匀速运动时产生的电磁势和场 $\varphi, \vec{A}, \vec{E}, \vec{B}$ (241)
- 6.32 问 Σ' 系应以什么样的速度相对于 Σ 系运动才能使其中只有电场或只有磁场 (242)
- 6.33 如何理解匀速运动点电荷电场在运动方向发生“压缩”与变换公式 $\vec{E}_{//} = \vec{E}'_{//}$ 的关系 (243)
- 6.34 求匀速运动点电荷的电场 (244)
- 6.35 说明 $(\vec{k}, i\omega/c)$ 组成四维波矢量 k_μ (245)
- 6.36 证明当 $\beta \approx 1$ 时该电磁场类似于一系列频率为 $\gamma\beta ck_m$ 的圆偏振电磁波 (246)
- 6.37 在 Σ' 系观测粒子所受的力 (247)
- 6.38 线电荷以速度 $v = \beta c$ 沿自身长度匀速移动, 求作用在电荷上的力 (247)
- 6.39 质量为 M 的静止粒子衰变为两个粒子 m_1 和 m_2 , 求粒子 m_1 的动量和能量 (248)
- 6.40 一粒子 m 衰变成质量为 m_1 和 m_2 , 动量为 \vec{p}_1 和 \vec{p}_2 的两个粒子, 求该粒子的质量 (249)
- 6.41 质量为 M_0 的静止粒子, 衰变为两个粒子, 求这两个粒子的能量、动能和动量 (249)
- 6.42 一粒子与另一粒子碰撞后结合为一个新粒子, 求此结合粒子的静止质量和速度 (250)
- 6.43 证明 $\text{tg}\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta E/cp)}$ 和 $d\Omega' = \frac{d\Omega}{\gamma^2(1 - \beta\cos\theta)^2}$ 等 (252)
- 6.44 要用多大的能量才能达到与对撞机相同的相对运动能量 (254)
- 6.45 证明粒子的轨迹为 $x = W_0/qE \cdot [\cosh(qEy/p_0c) - 1]$ (256)
- 6.46 确定粒子的运动轨迹与时间的关系, 并研究非相对论的情况 (257)
- 6.47 证明真空中的自由电子既不能辐射光子也不能吸收光子 (259)
- 6.48 导出不同惯性系之间三维力的变换关系 (260)
- 6.49 若光子质量不为零时电磁场的势方程或场方程如何修改 (260)
- 6.50 利用洛伦兹变换确定粒子在互相垂直均匀电场 $E\vec{e}_z$ 和磁场 $B\vec{e}_y$ 内的运动规律 (261)
- 6.51 求出 q_1, q_2 各自所受的力, 如何解释两力不是等大反向 (262)
- 6.52 比较两种情况下两个电荷的相互作用力 (263)
- 6.53 推导两组速度分量间的变换公式 (263)
- 6.54 证明电子不可能吸收这个光子, 否则能量和动量守恒定律不能满足等 (264)
- 6.55 证明散射光子的角频率变化量为 $\omega - \omega' = \frac{2\hbar}{m_0c^2}\omega\omega'\sin^2\frac{\theta}{2}$ 等 (265)
- 6.56 用电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 和四维电流密度 \vec{J}_μ 把麦克斯韦方程组改写成协变形式 (266)
- 6.57 证明实验系中观察光在介质中的速度为 $c/n + v(1 - 1/n^2)$ (268)
- 6.58 证明频率为 $\nu = \frac{\Delta W}{h} \left(1 - \frac{\Delta W}{2M_0c^2}\right)$ (269)
- 6.59 求基态氢原子跃迁到激发态时所吸收光子的频率 (269)
- 6.60 证明矢势的独立分量只有两个横分量 (270)
- 第七章 带电粒子和电磁场的相互作用** (271)
- 7.1 证明 \vec{v} 与 \vec{v} 平面内 \vec{v} 的夹角为 β 的方向上无辐射 (271)
- 7.2 求高速回转电子在单位时间内辐射损失的能量 (271)

7.3 求带电粒子沿 z 轴作简谐振动的辐射场和能流等	(272)
7.4 求 xy 平面上绕 z 轴匀速率圆周运动带电粒子辐射场的频率和能流, 讨论偏振情况	(273)
7.5 求带电谐振子在均匀恒定外磁场中运动的通解等	(274)
7.6 求电子在均匀外磁场中运动时单位时间内的辐射能量等	(275)
7.7 证明稀薄等离子气体的折射率为 $n = \sqrt{1 - e^2 N_0 / m \epsilon_0 \omega^2}$	(279)
7.8 为什么天空是呈蓝色的, 又为什么在近日落时天空又变为红色的	(279)
7.9 解释晴朗的天空为什么是蓝色的	(280)
7.10 求稀薄等离子体的相对电容率	(281)
7.11 应用介质色散的方法, 推导等离子体的折射率	(281)
7.12 推导电磁波在密度充分低的理想气体的折射率为 $n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2 - \omega^2}$	(282)
7.13 证明单光电子对湮没过程为能量 - 动量守恒所禁戒	(283)
7.14 求粒子辐射功率、能量 $E(t)$ 和动能 T	(284)
7.15 证明电磁场中带电粒子的加速度为 $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m_0} \sqrt{1 - v^2/c^2} \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} (\vec{E} \cdot \vec{v}) \right]$	(286)
7.16 求两粒子发生弹性碰撞后实验室参考系相对于入射方向的散射角 θ_1 和 θ_2	(287)
7.17 证明低速匀速运动电荷的磁场方程满足 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$	(288)
7.18 证明切伦柯夫辐射的频谱为 $\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \epsilon^{1/2} \beta^2 \sin^2 \theta}{c} \delta(1 - \beta \epsilon^{1/2} \cos \theta) ^2$	(288)
7.19 一椭圆极化波被一自由电荷散射时的微分散射截面	(289)
7.20 带电粒子的加速度 $\dot{\vec{v}}$ 与速度 \vec{v} 平行时的辐射功率	(289)
数学附录	(293)
部分物理常数	(309)
参考文献	(310)

第一章 电磁现象的普遍规律

1.1. 证明下列恒等式

$$(1) (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2;$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot [(\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b}] = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c});$$

$$(3) \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0;$$

$$(4) (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c}[\vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})] - \vec{d}[\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})] \\ = \vec{b}[\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d})] - \vec{a}[\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{d})].$$

【证明】I. 方程的左边为

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = (ab \cos \theta)^2 + (ab \sin \theta)^2 = a^2 b^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2 b^2$$

方程左边等于方程右边, 证毕.

II. 方程的左边为

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot [(\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b}] \\ = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) \\ = \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}),$$

式中

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0, \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0, \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = 0,$$

所以

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot [(\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b}] = \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

方程左边等于方程右边, 证毕.

III. 方程的左边为

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \\ = [\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b})] \\ + [\vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{a}) + \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})] \\ + [\vec{a} \cdot (\vec{c} \cdot \vec{b}) + \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})] = 0,$$

方程左边等于方程右边, 证毕.

IV. 把第一个括弧看成一矢量, 根据矢量代数公式[数学附录(1.17)], 方程的左边为

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c}[\vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})] - \vec{d}[\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})],$$

把第二个括弧看成一矢量, 同理有

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{b}[\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d})] - \vec{a}[\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{d})],$$

方程左边等于方程右边, 证毕.

1.2. 根据算符 ∇ 的微分性与矢量性证明下列公式:

$$(1) \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B};$$

$$(2) \vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{2} \nabla A^2 - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{A}.$$

【证明】I. 方程的左边为

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \nabla_A(\vec{A} \cdot \vec{B}) + \nabla_B(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (1)$$

根据公式 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$,

即

$$\vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), \text{ 注意 } \nabla_A \rightarrow \vec{b}, \vec{A} \rightarrow \vec{c}, \vec{B} \rightarrow \vec{a},$$

则有

$$\nabla_A(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}. \quad (2)$$

同理,

$$\nabla_B(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}. \quad (3)$$

将(2)式和(3)式代入(1)式得

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}. \quad (4)$$

方程的左边等于方程右边,证毕.

II. 在(4)式中令 $\vec{A} = \vec{B}$, 则有

$$\begin{aligned} \nabla A^2 &= \vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{A} \\ &= 2\vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{A}, \end{aligned} \quad (5)$$

即

$$\vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{2} \nabla A^2 - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{A}. \quad (6)$$

证毕.

1.3. 设 u 是空间坐标的函数,证明:

$$(1) \nabla f(u) = \frac{df}{du} \nabla u; \quad (2) \nabla \cdot \vec{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{d\vec{A}}{du}; \quad (3) \nabla \times \vec{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\vec{A}}{du}.$$

【证明】I. 方程的左边为

$$\begin{aligned} \nabla f(u) &= \frac{\partial f(u)}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f(u)}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f(u)}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} \vec{e}_x + \frac{df}{du} \frac{du}{dy} \vec{e}_y + \frac{df}{du} \frac{du}{dz} \vec{e}_z \\ &= \frac{df}{du} \left(\frac{du}{dx} \vec{e}_x + \frac{du}{dy} \vec{e}_y + \frac{du}{dz} \vec{e}_z \right) = \frac{df}{du} \nabla u, \end{aligned}$$

方程的左边等于方程右边,证毕.

II. 方程的左边为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A}(u) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot [A_x(u) \vec{e}_x + A_y(u) \vec{e}_y + A_z(u) \vec{e}_z] \\ &= \frac{\partial A_x(u)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(u)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(u)}{\partial z} = \frac{dA_x(u)}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dA_y(u)}{du} \frac{du}{dy} + \frac{dA_z(u)}{du} \frac{du}{dz} \\ &= \nabla u \cdot \frac{d\vec{A}(u)}{du}, \end{aligned}$$

方程的左边等于方程右边,证毕.

III. 方程的左边为

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A}(u) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x(u) & A_y(u) & A_z(u) \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z \\ &= \left[\frac{dA_z}{du} \frac{du}{dy} - \frac{dA_y}{du} \frac{du}{dz} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{dA_x}{du} \frac{du}{dz} - \frac{dA_z}{du} \frac{du}{dx} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{dA_y}{du} \frac{du}{dx} - \frac{dA_x}{du} \frac{du}{dy} \right] \vec{e}_z. \end{aligned}$$

方程的右边为

$$\begin{aligned} \nabla u \times \frac{d\vec{A}}{du} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} & \frac{du}{dz} \\ \frac{dA_x}{du} & \frac{dA_y}{du} & \frac{dA_z}{du} \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{dA_z}{du} \frac{du}{dy} - \frac{dA_y}{du} \frac{du}{dz} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{dA_x}{du} \frac{du}{dz} - \frac{dA_z}{du} \frac{du}{dx} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{dA_y}{du} \frac{du}{dx} - \frac{dA_x}{du} \frac{du}{dy} \right] \vec{e}_z. \end{aligned}$$

方程的左边等于方程右边,证毕.

1.4. 设 $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ 为源点 \vec{x}' 到场点 \vec{x} 的距离, \vec{r} 的方向规定为源点指向场点.

(1) 证明下列结果,并体会对源变数求微商 ($\nabla' = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$) 与对场变数求微商

($\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$) 的关系:

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla' \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad (r \neq 0)$$

(最后一式在 $r=0$ 点不成立).

(2) 求 $\nabla r, \nabla \cdot \vec{r}, \nabla \times \vec{r}, (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r}, \nabla(\vec{a} \cdot \vec{r}), \nabla \cdot [\vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})]$ 及 $\nabla \times [\vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})]$, 其中 \vec{a}, \vec{k} 及 \vec{E}_0 均为常矢量.

【解】I. 证明如下:

(1) 设 $\vec{r} = (x-x')\vec{e}_x + (y-y')\vec{e}_y + (z-z')\vec{e}_z$,

则

$$r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}},$$

所以有

$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial r}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{(x-x')}{r} \vec{e}_x + \frac{(y-y')}{r} \vec{e}_y + \frac{(z-z')}{r} \vec{e}_z = \frac{\vec{r}}{r}.$$

而

$$\nabla' r = \frac{\partial r}{\partial x'} \vec{e}_x + \frac{\partial r}{\partial y'} \vec{e}_y + \frac{\partial r}{\partial z'} \vec{e}_z = -\frac{(x-x')}{r} \vec{e}_x - \frac{(y-y')}{r} \vec{e}_y - \frac{(z-z')}{r} \vec{e}_z = -\frac{\vec{r}}{r},$$

所以有

$$\nabla r = -\nabla' r,$$



(2) 同理,

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^3} [2(x-x')\vec{e}_x + 2(y-y')\vec{e}_y + 2(z-z')\vec{e}_z] = -\frac{\vec{r}}{r^3},$$

而

$$\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^3} [-2(x-x')\vec{e}_x - 2(y-y')\vec{e}_y - 2(z-z')\vec{e}_z] = \frac{\vec{r}}{r^3},$$

所以有

$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

(3) 同理,

$$\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \left(\nabla \frac{1}{r^3} \right) \times \vec{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \times \vec{r} = -\frac{3\vec{r}}{r^5} \times \vec{r} + \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x-x') & (y-y') & (z-z') \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0,$$

而

$$\nabla' \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \left(\nabla' \frac{1}{r^3} \right) \times \vec{r} + \frac{1}{r^3} \nabla' \times \vec{r} = \frac{3\vec{r}}{r^5} \times \vec{r} + \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ (x-x') & (y-y') & (z-z') \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0,$$

所以有

$$\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla' \times \frac{\vec{r}}{r^3} = 0.$$

(4) 同理,

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \left(\nabla \frac{1}{r^3} \right) \cdot \vec{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{r} = -\frac{3\vec{r}}{r^5} \cdot \vec{r} + \frac{3}{r^3} = 0,$$

而

$$\nabla' \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \left(\nabla' \frac{1}{r^3} \right) \cdot \vec{r} + \frac{1}{r^3} \nabla' \cdot \vec{r} = \frac{3\vec{r}}{r^5} \cdot \vec{r} - \frac{3}{r^3} = 0,$$

所以有

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla' \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0. \quad (r \neq 0)$$

证毕. 从以上证明看出, 矢量微分算符 ∇ 是对场变数求微分, 即对场点坐标 (x, y, z) 进行微分作用, 而 ∇' 是对源变数求微分, 即对源点坐标 (x', y', z') 进行微分作用, 两种作用相差一负号.

II. 计算如下:

$$(1) \text{ 设 } \vec{r} = (x-x_0)\vec{e}_x + (y-y_0)\vec{e}_y + (z-z_0)\vec{e}_z,$$

则

$$r = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}},$$

所以有

$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial r}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{(x-x_0)}{r} \vec{e}_x + \frac{(y-y_0)}{r} \vec{e}_y + \frac{(z-z_0)}{r} \vec{e}_z = \frac{\vec{r}}{r}.$$

(2) 同理,

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial}{\partial z}(z-z_0) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

(3) 同理,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0) \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial(z-z_0)}{\partial y} - \frac{\partial(y-y_0)}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial(x-x_0)}{\partial z} - \frac{\partial(z-z_0)}{\partial x} \right] \vec{e}_y \\ &\quad + \left[\frac{\partial(y-y_0)}{\partial x} - \frac{\partial(z-z_0)}{\partial y} \right] \vec{e}_z = 0. \end{aligned}$$

$$(4) (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r} = (a_x \nabla_x + a_y \nabla_y + a_z \nabla_z)(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \vec{a},$$

或

$$(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r} = \vec{a} \cdot \nabla \vec{r} = \vec{a} \cdot \vec{I} = \vec{a}.$$

$$(5) \nabla(\vec{a} \cdot \vec{r}) = (\nabla_x + \nabla_y + \nabla_z)(a_x x + a_y y + a_z z)$$

$$= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \vec{a}.$$

$$\begin{aligned} (6) \nabla \cdot [\vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})] &= (\nabla_x + \nabla_y + \nabla_z) \cdot [(E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y + E_{0z} \vec{e}_z) \sin(k_x x + k_y y + k_z z)] \\ &= (\nabla_x E_{0x} + \nabla_y E_{0y} + \nabla_z E_{0z}) \sin(k_x x + k_y y + k_z z) \\ &= (E_{0x} k_x + E_{0y} k_y + E_{0z} k_z) \cos(k_x x + k_y y + k_z z) \\ &= (\vec{E}_0 \cdot \vec{k}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}), \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})] &= (\nabla \cdot \vec{E}_0) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) + [\nabla \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})] \cdot \vec{E}_0 \\ &= 0 + \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \nabla(\vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{E}_0 \\ &= \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \nabla(xk_x + yk_y + zk_z) \cdot \vec{E}_0 \\ &= \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) (k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z) \cdot \vec{E}_0 \\ &= (\vec{E}_0 \cdot \vec{k}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \nabla \times [\vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})] &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ E_{0x} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) & E_{0y} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) & E_{0z} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) \end{vmatrix} \\ &= [(\nabla_y E_{0z} - \nabla_z E_{0y}) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})] \vec{e}_x + [(\nabla_x E_{0z} - \nabla_z E_{0x}) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})] \vec{e}_y \\ &\quad + [(\nabla_x E_{0y} - \nabla_y E_{0x}) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})] \vec{e}_z \\ &= (E_{0z} k_y - E_{0y} k_z) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_x + (E_{0z} k_x - E_{0x} k_z) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_y \\ &\quad + (E_{0y} k_x - E_{0x} k_y) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_z \\ &= -(\vec{E}_0 \times \vec{k}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \\ &= \vec{k} \times \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}). \end{aligned}$$

1.5. 计算下列各式:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \nabla \times (r^n \vec{r}), \nabla \cdot (r^n \vec{r}).$$

【解】(1) 设 $\vec{r} = (x-x_0)\vec{e}_x + (y-y_0)\vec{e}_y + (z-z_0)\vec{e}_z$, 则有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) &= \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) + \nabla_r \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{1}{r} \nabla \cdot \vec{r} + \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{r} \\ &= 3 \frac{1}{r} + \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r} \right) = 3 \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 2 \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

(2) 同理, 设 $\vec{r} = (x-x_0)\vec{e}_x + (y-y_0)\vec{e}_y + (z-z_0)\vec{e}_z$,

而

$$r^n = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{n}{2}},$$

则有

$$\begin{aligned} \nabla \times (r^n \vec{r}) &= \nabla_{\vec{r}} \times (r^n \vec{r}) + \nabla_r \times (r^n \vec{r}) = r^n \nabla_{\vec{r}} \times \vec{r} + (\nabla_r r^n) \times \vec{r} = (\nabla_r r^n) \times \vec{r} \\ &= \frac{n}{2} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{n}{2}-1} 2 [(x-x_0)\vec{e}_x + (y-y_0)\vec{e}_y + (z-z_0)\vec{e}_z] \times \vec{r} \\ &= nr^n \frac{\vec{r}}{r^2} \times \vec{r} = 0. \end{aligned}$$

(3) 同理, 设 $\vec{r} = (x-x_0)\vec{e}_x + (y-y_0)\vec{e}_y + (z-z_0)\vec{e}_z$,

而

$$r^n = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{n}{2}},$$

则有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (r^n \vec{r}) &= \nabla_{\vec{r}} \cdot (r^n \vec{r}) + \nabla_r \cdot (r^n \vec{r}) = r^n (\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{r}) + (\nabla_r r^n) \cdot \vec{r} \\ &= 3r^n + nr^n = (3+n)r^n. \end{aligned}$$

1.6. 证明下式:

$$\nabla \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\nabla \times \left(\frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3} \right).$$

【证明】方程左边为

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) &= \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) + \nabla_a \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) + \nabla_r \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \\ &= \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) + \nabla_r \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \\ &= \left(\nabla_r \frac{1}{r^3} \right) (\vec{a} \cdot \vec{r}) + \left(\frac{1}{r^3} \nabla_{\vec{r}} \right) (\vec{a} \cdot \vec{r}) \\ &= \vec{a} \times \left(\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{r^3} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{a} \cdot \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{r^3} \right) \vec{r} + \vec{a} \times \left(\frac{1}{r^3} \nabla_{\vec{r}} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{a} \cdot \frac{1}{r^3} \nabla_{\vec{r}} \right) \vec{r} \\ &= 0 + \left(\vec{a} \cdot \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{r^3} \right) \vec{r} + 0 + \left(\vec{a} \cdot \frac{1}{r^3} \nabla_{\vec{r}} \right) \vec{r} \\ &= \left(\vec{a} \cdot \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{r^3} \right) \vec{r} + \left(\vec{a} \cdot \frac{1}{r^3} \nabla_{\vec{r}} \right) \vec{r}. \end{aligned}$$

方程右边为

$$\begin{aligned}
 & -\nabla \times \left(\frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3} \right) = -\nabla_{r^3} \times \left(\frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3} \right) - \nabla_{\vec{r}} \times \left(\frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3} \right) \\
 & = -\nabla_{r^3} \frac{1}{r^3} \times (\vec{a} \times \vec{r}) - \frac{1}{r^3} \nabla_{\vec{r}} \times (\vec{a} \times \vec{r}) \\
 & = -\left[\left(\nabla_{r^3} \frac{1}{r^3} \cdot \vec{r} \right) \vec{a} - \left(\nabla_{r^3} \frac{1}{r^3} \cdot \vec{a} \right) \vec{r} \right] - \left[\left(\frac{1}{r^3} \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right) \vec{a} - \left(\frac{1}{r^3} \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{a} \right) \vec{r} \right] \\
 & = -\left(-3 \frac{\vec{r}}{r^5} \cdot \vec{r} \right) \vec{a} + \left(\vec{a} \cdot \nabla_{r^3} \frac{1}{r^3} \right) \vec{r} - 3 \frac{1}{r^3} \vec{a} + \left(\vec{a} \cdot \frac{1}{r^3} \nabla_{\vec{r}} \right) \vec{r} \\
 & = \left(\vec{a} \cdot \nabla_{r^3} \frac{1}{r^3} \right) \vec{r} + \left(\vec{a} \cdot \frac{1}{r^3} \nabla_{\vec{r}} \right) \vec{r}.
 \end{aligned}$$

方程左边等于右边,证毕.

1.7. 设 \vec{c} 为恒矢量, \vec{r} 为位置矢量, 计算下列各式:

(1) $\nabla \times (\vec{c} \times \vec{r})$; (2) ∇r^2 ; (3) $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right)$ ($r \neq 0$).

【解】(1) 将 \vec{c} 和 \vec{r} 写为分量式

$$\begin{aligned}
 \vec{c} &= c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z, \\
 \vec{r} &= (x-x_0) \vec{e}_x + (y-y_0) \vec{e}_y + (z-z_0) \vec{e}_z,
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \vec{c} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ c_x & c_y & c_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
 &= (c_y z - c_z y) \vec{e}_x + (c_z x - c_x z) \vec{e}_y + (c_x y - c_y x) \vec{e}_z. \\
 \nabla \times (\vec{c} \times \vec{r}) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (c_y z - c_z y) & (c_z x - c_x z) & (c_x y - c_y x) \end{vmatrix} \\
 &= 2(c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z) = 2\vec{c}.
 \end{aligned}$$

(2) 同理,

$$\nabla r^2 = \frac{d}{dr} r^2 = 2r \vec{e}_r = 2\vec{r}.$$

(3) 同理,

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = \nabla \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{r} - \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \cdot \vec{r} = -\frac{3}{r} + 3 \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r} = 0.$$

1.8. 直接由 $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}') \vec{r}}{r^3} dV'$ 证明:

(1) $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x})$;