

## 内 容 简 介

本书是为工科类有关专业的硕士研究生和高年级本科生编写的一本弹塑性力学教材,也可供高等学校工科类专业教师以及有关科研、工程设计人员参考。全书共12章,系统地阐述弹塑性力学的一些基本概念、知识和应用方法,包括简单的弹性和塑性平面问题,弹塑性扭转,变分原理,薄板的弯曲与稳定性,弹性力学的复变函数解法,塑性极限分析以及结构的弹塑性动力响应等。本书的特点是将弹性与塑性这一连续变形过程统一起来进行介绍,其概念清晰,易于理解和掌握,同时还为计算结构力学等后续课程的学习奠定了理论基础。

## 写在“研究生教学用书”出版 15 周年前岁

“接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红。”今天，我国的教育正处在一个大发展的崭新时期，而高等教育即将跨入“大众化”的阶段，蓬蓬勃勃，生机无限。在高等教育中，研究生教育的发展尤为迅速。在盛夏已临，面对池塘中亭亭玉立的荷花，风来舞举的莲叶，我深深感到，我国研究生教育就似夏季映日的红莲，别样多姿。

党的十六大报告以空前的力度强调了“科教兴国”的发展战略，强调了教育的重大作用，强调了教育的基础性全局性先导性，强调了在社会主义建设中教育的优先发展的战略地位。从报告中，我们可以清楚看到，对高等教育而言，不仅赋予了重大的历史任务，而且更明确提出了要培养一大批拔尖创新人才。不言而喻，培养一大批拔尖创新人才的历史任务主要落在研究生教育肩上。“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。”国家之间的激烈竞争，在今天，归根结底，最关键的就是高级专门人才，特别是拔尖创新人才的竞争。由此观之，研究生教育的任务可谓重矣！重如泰山！

前事不忘，后事之师。历史经验已一而再、再而三地证明：一个国家的富强，一个民族的繁荣，最根本的是要依靠自己，要以“自力更生”为主。《国际歌》讲得十分深刻，世界上从来就没有什么救世主，只有靠自己救自己。寄希望于别人，期美好于外力，只能是一种幼稚的幻想。内因是发展的决定性的因素。当然，我们决不应该也决不可能采取“闭关锁国”，自我封闭，固步自封的方式来谋求发展，重犯历史错误。外因始终是发展的必要条件。正因为如此，我们清醒看到了，“自助者人助”，只有“自信、自尊、自主、自强”，只有独立自主，自强不息，走以“自力更生”为主的发展道路，才有可能在向世界开放中，争取到更多的朋友，争取到更多的支持，充分利用好外部的各种有利条件，来扎扎实实地而又尽可能快地发展自己。这一切的关键就在于，我们要有数量与质量足够的高级专门人才，特别是拔尖创新人才。何况，在科技高速发展与高度发达，而知识经济已初见端倪的今天，更加如此。人才，高级专门人才，拔尖创新人才，是我们一切事

业发展的基础。基础不牢,地动山摇;基础坚牢,大厦凌霄;基础不固,木凋树枯;基础深固,硕茂葱绿!

“工欲善其事,必先利其器。”自古凡事皆然,教育也不例外。教学用书是“传道授业解惑”培育人才的基本条件之一。“巧妇难为无米之炊”。特别是在今天,学科的交叉及其发展越来越多及越快,人才的知识基础及其要求越来越广及越高,因此,我一贯赞成与支持出版“研究生教学用书”,供研究生自己主动地选用。早在 1990 年,本套用书中的第一本即《机械工程测试·信息·信号分析》出版时,我就为此书写了个“代序”,其中提出:一个研究生应该博览群书,博采百家,思路开阔,有所创见。但这不等于他在一切方面均能如此,有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在某一特定方面,他也可选择一本有关这一特定方面的书作为了解与学习这方面知识的参考;如果一个研究生的主要兴趣与工作在这一特定方面,他更应选择一本有关的书作为主要的学习用书,寻觅主要学习线索,并缘此展开,博览群书。这就是我赞成要为研究生编写系列的“研究生教学用书”的原因。今天,我仍然如此来看。

还应提及一点,在教育界有人讲,要教学生“做中学”,这有道理;但须补充一句,“学中做”。既要在实践中学习,又要在学习中实践,学习与实践紧密结合,方为全面;重要的是,结合的关键在于引导学生思考,学生积极主动思考。当然,学生的层次不同,结合的方式与程度就应不同,思考的深度也应不同。对研究生特别是对博士研究生,就必须是而且也应该是“研中学,学中研”,在研究这一实践中,开动脑筋,努力学习,在学习这一过程中,开动脑筋,努力研究;甚至可以讲,研与学通过思考就是一回事了。正因为如此,“研究生教学用书”就大有英雄用武之地,供学习之用,供研究之用,供思考之用。

在此,还应进一步讲明一点。作为一个研究生,来读“研究生教学用书”中的某书或其他有关的书,有的书要精读,有的书可泛读。记住了书上的知识,明白了书上的知识,当然重要;如果能照着用,当然更重要。因为知识是基础。有知识不一定有力量,没有知识就一定没有力量,千万千万不要轻视知识。对研究生特别是博士研究生而言,最为重要的还不是知识本身这个形而下,而是以知识作为基础,努力通过某种实践,同时深入独立思考而体悟到的形而上,即《老子》所讲的不可道的“常道”,即思维能力的提高,即精神境界的升华。《周易·系辞》讲了:“形而上谓之道,形

而下谓之器。”我们的研究生要有器,要有具体的知识,要读书,这是基础;但更要有“道”,更要一般,要体悟出的形而上。《庄子·天道》讲得多么好:“书不过语。语之所贵者意也,意有所随。意之所随者,不可以言传也。”这个“意”,就是孔子所讲的“一以贯之”的“一”,就是“道”,就是形而上。它比语、比书,重要多了。要能体悟出形而上,一定要有足够数量的知识作为必不可缺的基础,一定要在读书去获得知识时,整体地读,重点地读,反复地读;整体地想,重点地想,反复地想。如同韩愈在《进学解》中所讲的那样,能“提其要”,“钩其玄”,以达到南宋张孝祥所讲的“悠然心会,妙处难与君说”的体悟,化知识为己之素质,为“活水源头”。这样,就可驾驭知识,发展知识,创新知识,而不是为知识所驾驭,为知识所奴役,成为计算机的存储装置。

这套“研究生教学用书”从第一本于 1990 年问世以来,到明年,就经历了不平凡的 15 个春秋。从研究生教育开始以来,我校历届领导都十分关心研究生教育,高度重视研究生教学用书建设,亲自抓研究生教学用书建设;饮水思源,实难忘怀!“逝者如斯夫,不舍昼夜。”截至今天,“研究生教学用书”的出版已成了规模,蓬勃发展。目前已出版了用书 69 种,有的书发行了数万册,有 22 种分别获得了国家级、省部级教材奖、图书奖,有数种已为教育部列入向全国推荐的研究生教材,有 20 种一印再印,久销不衰。采用此书的一些兄弟院校教师纷纷来信,称赞此书为研究生培养与学科建设做出了贡献。我们深深感激这些鼓励,“衷心藏之,何日忘之?!”没有读者与专家的关爱,就没有我们“研究生教学用书”的发展。

唐代大文豪李白讲得十分正确:“人非尧舜,谁能尽善?”我始终认为,金无足赤,物无足纯,人无完人,文无完文,书无完书。“完”全了,就没有发展了,也就“完”蛋了。江泽民同志在党的十六大报告中讲得多么深刻:“实践没有止境,创新也没有止境。”他又指出,坚持“三个代表”重要思想的关键是与时俱进。这套“研究生教学用书”更不会例外。这套书如何?某本书如何?这样的或那样的错误、不妥、疏忽或不足,必然会有。但是,我们又必须积极、及时、认真而不断地加以改进,与时俱进,奋发前进。我们衷心希望与真挚感谢读者与专家不吝指教,及时批评。当局者迷,兼听则明;“嚶其鸣矣,求其友声。”这就是我们肺腑之言。当然,在这里,还应该深深感谢“研究生教学用书”的作者、审阅者、组织者(华中科技大学研究生院的有关领导和工作人员)与出版者(华中科技大学出版社的编辑、

校对及其全体同志);深深感谢对“研究生教学用书”的一切关心者与支持者,没有他们,就决不会有今天的“研究生教学用书”。

我们真挚祝愿,在我们举国上下,万众一心,在“三个代表”重要思想的指引下,努力全面建设小康社会,加速推进社会主义现代化,为实现中华民族伟大复兴,“芙蓉国里尽朝晖”这一壮丽事业中,让我们共同努力,为培养数以千万计高级专门人才、特别是一大批拔尖创新人才,完成历史赋予研究生教育的重大任务而做出应有的贡献。

谨为之序。

中国科学院院士

华中科技大学学术委员会主任

杨叔子

2003 年 7 月于喻园

## 前 言

本书是在多年为研究生讲授《弹塑性力学》的讲稿以及相关科研工作的基础上编写而成的。

在具体工程结构设计中,工程设计人员都会遇到各种各样的力学问题,一些较简单的问题采用材料力学的方法就可解决,但是多数工程结构问题均较复杂。当各种材料的物体或结构受到各种各样的载荷作用时,要判断其工作状态,或者要对其做出安全可靠、经济适用的设计,材料力学就远显得不够。尤其是对那些重要的工程,要求给出科学的判断或精确的设计,就需要固体力学的知识,特别是弹塑性力学的基本理论和分析方法。

固体材料在受到外力作用后,随着载荷的逐渐增加,材料将经历弹性状态到塑性状态的变化,一直到损坏而失效为止。材料由弹性状态到塑性状态是一连续的变形过程,物体或结构处于塑性状态下并不等于丧失承载能力,仍可安全地工作。有时,为了发挥材料的潜能,根据实际允许物体或使其局部进入塑性状态。因此,有必要学习和掌握弹塑性力学的基础理论、概念和分析方法。

全书共分 12 章,首先介绍弹性和塑性的一些基本理论,即第 2、3、4 章应力和应变的基本概念和表达方法,以及材料的本构关系。第 5 章阐述求解弹塑性力学问题的基本方法。第 6 章介绍弹塑性力学的平面问题,所讨论的问题应该说比材料力学更精确,且均可获得完善的解答。第 7 章介绍柱体的扭转,第 8 章介绍弹塑性力学的变分原理与应用,第 9 章介绍薄板的弯曲与稳定性分析,主要是为结构的近似分析和数值计算奠定理论基础。为了扩大研究生的专业基础理论知识,第 10、11 和 12 章介绍弹性力学的复变函数解法、结构极限分析以及结构的弹塑性动力学等内容,这部分内容主要是为研究生在科学研究中一旦需要这方面的知识以便于他们自学而编写的。

为了学生能较好地巩固和掌握基础理论知识,得到良好的解题方法的训练,各章后面附有思考题和习题,大部分习题还给出了答案,以便自查。

全书讲授约需 70~80 学时,当学时数较少时,可根据需要选择有关章节讲授。

本书可供船舶与海洋结构物设计制造、土木工程、桥梁结构、机械工程、动力工程以及机械加工等专业的硕士研究生使用,同时也可供学有余力的高年级本科生选修。

本书的部分插图由研究生朱海飞完成,其为本书的完稿花了不少心血和时间,同时,黄玉盈教授、曾广武教授和张维衡教授对本书的编写提出了宝贵意见,本书出版之前曾使用过《弹塑性力学基本理论和应用》讲义的博士生和硕士生均给予了帮助,

在此表示衷心感谢!

本书获得研究生院教材基金的资助,值此向研究生院表示深切的感谢!同时,船舶与海洋工程系也给予了积极支持,在此也表示衷心的感谢!

书中内容虽经反复修改,但不妥或错误之处仍在所难免,欢迎读者批评指正。

刘士光 张 涛

2007.8

# 目 录

|                         |      |
|-------------------------|------|
| 第 1 章 绪论                | (1)  |
| 1.1 弹塑性力学的任务            | (1)  |
| 1.2 力学分析模型              | (2)  |
| 1.3 材料的基本力学性能试验         | (5)  |
| 1.4 材料拉伸曲线的简化与经验公式      | (9)  |
| 1.5 弹塑性力学的发展及其研究方法      | (12) |
| 思考题                     | (15) |
| 第 2 章 应力状态理论            | (16) |
| 2.1 应力和应力张量             | (16) |
| 2.2 二维应力状态与平面问题的平衡微分方程式 | (18) |
| 2.3 一点的应力状态             | (22) |
| 2.4 边界条件                | (25) |
| 2.5 主应力、主切应力和正八面体应力     | (28) |
| 2.6 应力球张量与应力偏张量         | (33) |
| 思考题                     | (35) |
| 习题                      | (35) |
| 第 3 章 应变状态理论            | (37) |
| 3.1 位移与线元长度、方向的变化       | (37) |
| 3.2 应变张量与转动张量           | (42) |
| 3.3 主应变和应变不变量           | (48) |
| 3.4 应变率张量和应变增量张量        | (52) |
| 3.5 小变形的应变协调方程          | (53) |
| 3.6 正交曲线坐标系中的应变几何方程     | (55) |
| 思考题                     | (58) |
| 习题                      | (59) |
| 第 4 章 本构方程              | (60) |
| 4.1 弹性应变能函数             | (60) |
| 4.2 线弹性变形体的广义胡克定律       | (63) |
| 4.3 屈服函数与应力空间           | (69) |
| 4.4 常用(初始)屈服条件          | (75) |

|            |                      |       |
|------------|----------------------|-------|
| 4.5        | 后继屈服条件               | (82)  |
| 4.6        | 塑性应力应变关系的增量理论        | (92)  |
| 4.7        | 塑性应力应变关系的全量理论        | (97)  |
|            | 思考题                  | (99)  |
|            | 习题                   | (100) |
| <b>第5章</b> | <b>弹塑性力学问题的建立与求解</b> | (101) |
| 5.1        | 弹塑性力学边值问题            | (101) |
| 5.2        | 弹性力学问题的基本解法与解的唯一性    | (104) |
| 5.3        | 圣维南原理和叠加原理           | (109) |
| 5.4        | 矩形截面梁的弹塑性纯弯曲         | (111) |
|            | 思考题                  | (117) |
|            | 习题                   | (118) |
| <b>第6章</b> | <b>弹塑性平面问题</b>       | (119) |
| 6.1        | 弹性平面问题的基本方程          | (119) |
| 6.2        | 应力解法与应力函数            | (122) |
| 6.3        | 梁的弹性平面弯曲             | (125) |
| 6.4        | 用三角级数解弹性平面问题         | (133) |
| 6.5        | 极坐标系下的基本方程           | (138) |
| 6.6        | 厚壁圆筒在内外压力下的弹塑性分析     | (144) |
| 6.7        | 孔边的应力分布规律与应力集中       | (149) |
|            | 思考题                  | (156) |
|            | 习题                   | (156) |
| <b>第7章</b> | <b>等截面柱体的弹塑性扭转</b>   | (160) |
| 7.1        | 弹性柱体自由扭转的基本关系式与应力函数解 | (160) |
| 7.2        | 常见截面形状柱体的扭转          | (164) |
| 7.3        | 薄膜比拟法                | (172) |
| 7.4        | 薄壁杆件的扭转              | (173) |
| 7.5        | 塑性扭转与沙堆比拟法           | (178) |
| 7.6        | 弹塑性扭转与薄膜屋顶比拟法        | (181) |
|            | 思考题                  | (184) |
|            | 习题                   | (184) |
| <b>第8章</b> | <b>能量原理及其应用</b>      | (186) |
| 8.1        | 基本概念                 | (186) |
| 8.2        | 虚位移原理与最小势能原理         | (187) |
| 8.3        | 位移变分法的应用             | (196) |

|        |                         |       |
|--------|-------------------------|-------|
| 8.4    | 虚应力原理和最小余能原理 .....      | (201) |
| 8.5    | 应力变分法与应用 .....          | (206) |
| 8.6    | 最大耗散能原理 .....           | (212) |
|        | 思考题 .....               | (213) |
|        | 习题 .....                | (213) |
| 第 9 章  | 薄板的弹性弯曲与稳定 .....        | (215) |
| 9.1    | 基本概念与基本假设 .....         | (215) |
| 9.2    | 薄板弯曲的平衡微分方程 .....       | (218) |
| 9.3    | 边界条件 .....              | (225) |
| 9.4    | 矩形板的经典解法 .....          | (228) |
| 9.5    | 圆板的轴对称弯曲 .....          | (235) |
| 9.6    | 用变分法解薄板弯曲问题 .....       | (241) |
| 9.7    | 简支矩形板的弹性稳定性 .....       | (247) |
|        | 思考题 .....               | (250) |
|        | 习题 .....                | (250) |
| 第 10 章 | 平面问题的复变函数解法 .....       | (253) |
| 10.1   | 弹性平面问题的复变函数表示 .....     | (253) |
| 10.2   | 极坐标系中应力和位移的复变函数表示 ..... | (257) |
| 10.3   | 保角变换与曲线坐标 .....         | (259) |
| 10.4   | 多连通体中应力和位移的单值条件 .....   | (262) |
| 10.5   | 无限大单孔弹性板的复变函数解法 .....   | (264) |
| 10.6   | 开孔有限板孔边的应力场分布 .....     | (271) |
| 10.7   | 裂纹尖端附近的应力集中 .....       | (274) |
|        | 思考题 .....               | (277) |
|        | 习题 .....                | (277) |
| 第 11 章 | 结构的塑性极限分析 .....         | (279) |
| 11.1   | 复合应力梁的屈服条件 .....        | (279) |
| 11.2   | 板的屈服条件 .....            | (281) |
| 11.3   | 极限分析定理 .....            | (283) |
| 11.4   | 曲梁的塑性极限分析 .....         | (289) |
| 11.5   | 薄板的塑性极限分析 .....         | (291) |
| 11.6   | 杆系的塑性极限计算 .....         | (300) |
|        | 思考题 .....               | (308) |
|        | 习题 .....                | (308) |
| 第 12 章 | 结构的弹塑性动力响应 .....        | (311) |

|       |                      |       |
|-------|----------------------|-------|
| 12.1  | 基本概念                 | (312) |
| 12.2  | 梁动力分析的基本方程           | (316) |
| 12.3  | 简支弹塑性梁受均布冲击波作用的动力响应  | (325) |
| 12.4  | 悬臂梁在集中质量撞击下的刚塑性运动    | (330) |
| 12.5  | 梁中移行塑性铰的特性           | (334) |
| 12.6  | 轴向约束对刚塑性梁动力分析的影响     | (337) |
| 12.7  | 横向剪力对刚塑性梁动力响应的影响     | (342) |
| 12.8  | 刚塑性薄板动力响应的基本方程       | (349) |
| 12.9  | 简支刚塑性圆板在矩形脉冲载荷下的动力响应 | (354) |
| 12.10 | 简支矩形板的刚塑性动力响应        | (362) |
| 12.11 | 加筋板的非线性动力响应          | (367) |
| 12.12 | 冲击载荷作用下加筋板的塑性动力响应    | (372) |
|       | 思考题                  | (379) |
|       | 习题                   | (380) |
|       | 参考文献                 | (381) |

# 第1章 绪论

## 1.1 弹塑性力学的任务

固体力学是研究固体材料及其构成的物体结构在外部干扰(载荷、温度变化等)下的力学响应的学科,按其研究对象分为弹性力学和塑性力学两部分,它们是固体力学的两个重要分支。弹性力学研究固体材料及其构成的物体结构在弹性变形阶段的力学行为,包括在外部干扰下弹性物体的内力(应力)、变形(应变)和位移的分布,以及与之相关的理论和方法;塑性力学则研究它们在塑性变形阶段的力学响应。大多数材料都同时具有弹性和塑性性质,当外载较小时,材料的行为呈现为弹性的或基本上是弹性的;当载荷渐增时,材料将进入塑性变形阶段,即材料的行为呈现为塑性的。所谓弹性和塑性,只是材料力学性质中两个典型性质或理想模型;同一种材料在不同条件下可以主要表现为弹性或塑性。因此,所谓弹性材料或弹性物体是指在一定条件下主要呈现弹性性态的材料或物体。塑性材料或塑性物体的含义与此相类似。

大多数材料往往同时具有弹性和塑性性质,特别是在塑性变形阶段,变形中既有可恢复的弹性变形,又有不可恢复的塑性变形,因此有时又称为弹塑性材料。本书主要介绍弹塑性材料及其结构在外部干扰下力学响应的基础理论和方法,以及相应的破坏准则或失效准则。

以弹性分析为基础的结构设计是假定材料为理想弹性的情况下,相应于这种设计观点就以分析结果的实际适用范围作为设计的失效准则,即认为应力(严格地说是应力的某一函数值)达到一定界限值(弹性界限),将进入塑性变形阶段时,材料将发生破坏的一种设计方法。结构中如果有一处或部分材料发生破坏,则认为结构失效(丧失设计所规定的效用)。由于一般的结构都处于非均匀受力状态,因此,当高应力点或高应力区的材料达到弹性界限时,大部分材料仍处于弹性界限之内;而实际材料在应力超过弹性界限以后并不立即发生破坏,仍具有一定的继续承受应力(载荷)的能力,只不过刚度相对降低。可见,弹性设计方法不能充分发挥材料的潜力,导致材料的某种浪费。实际上,当结构内的局部材料进入塑性变形阶段,再继续增加外载荷时,结构的内力(应力)分布规律与弹性阶段不同,即所谓内力(应力)重分布,这种重分布总的是使内力(应力)分布更趋均匀,使原来处于低应力区的材料承受更大的应力,从而更好地发挥材料的潜力,提高结构的承载能力。显然,以塑性分析为基础的设计比以弹性分析为基础的设计更为优越。但是,塑性设计允许结构有更大的

变形,以及完全卸载后结构将存在残余变形,因此,对于刚度要求较高及不允许出现残余变形的场合,这种设计方法不适用。

另外,在有些问题中,如金属压延成型工艺,需要利用全局的塑性;在有些问题中,如集中力作用点附近及裂纹尖端附近的应力场问题,如果不考虑材料的塑性,就从本质上得不到切合实际的结果。综上所述可见,弹塑性力学是近代工程技术所必需的基础技术学科。

材料力学、弹性力学和塑性力学在研究的基本内容及方法上有某些相同之处。例如,它们研究的都是结构(构件)在外部干扰下的力学响应。具体地说,它们研究的都是结构的强度、刚度和稳定性问题(有时统称为强度问题),以及结构的破坏准则或失效准则。在方法上它们都在一定的边界条件(或再加上初始条件)下求解三类基本方程:平衡(运动)方程、几何方程和本构(物理)方程。同时,它们都以实验结果为依据,所得结果由实验来检验。但是,由于材料力学(严格地说,是一般材料力学教材和课程)研究的对象主要限于细长体,即杆件,从而在三类基本方程之外,需根据实验观察引入几何性假设,即平面假设。这实际上是对应变沿杆件横截面的分布规律作了近似的(线性的)假设,从而大大简化了计算,使得用初等方法求解就可获得解答。弹塑性力学一般不需引入这类假设,从而可以获得更为精确的结果,更重要的是扩大了研究对象的范围,它可包括各种实体结构(如挡土墙、堤等)、深梁、非圆截面杆的扭转、孔边应力集中,以及板壳等材料力学初等理论所不能解决的力学问题。当然,在弹塑性力学基础理论中,有时也引入某些几何性的假设,如薄板、薄壳变形中的直法线假设等;又如,在处理边界条件中同样要应用圣维南原理,这不仅能使问题得到简化,进而使求解成为可能,又能获得足够精确的结果。

作为一门课程,弹塑性力学以理论力学、材料力学、高等数学、数理方程等课程为基础,系统地介绍弹塑性力学的基础概念、理论和方法,为进一步学习板壳理论、断裂力学、实验应力分析、计算结构力学等后续课程打下基础。无疑,在船舶与海洋工程专业、建筑结构专业以及涉及结构、构件设计的机械类专业学生的培养中,这是一门重要的专业基础课程。

## 1.2 力学分析模型

弹塑性力学问题的研究,与所有科学研究一样,都要对所研究的对象建立相应的力学分析模型。模型是原型的近似描述。所建立的模型,应尽可能地近似表示原型,并尽可能方便应用。然而,模型的建立常常会受到科学技术水平的制约。力学分析模型一般有三个层次,即材料构造模型、材料力学性质模型以及结构计算模型。第一类模型属于基本的,往往以假设的形式出现,属于科学假设范畴。通常模型与一种理论相对应,因此模型、假设和理论一般情况下是意义相等的。

## 1. 材料的构造模型

### 1) 连续性假设

假设固体材料是连续介质,即认为组成物体的质点连续而紧密地分布于物体所占的整个空间,质点与质点之间不存在任何间隙。于是可以认为应力、应变和位移等一些物理量可以表示为坐标的连续函数,从而在作数学推导时可方便地运用连续和极限的概念。事实上,一切物体都是由分子、原子等微粒组成的,都不可能符合这个假设。但是,微粒尺寸及各微粒之间的距离远比物体的几何尺寸小,因此运用这个假设不会引起显著的误差。

### 2) 各向同性及均匀性假设

弹塑性力学并不根据物质的粒子结构来研究物体内的受力和变形,因此可假设物体由同一类型的均匀材料组成,即物体内部任意一点在各方向上的物理性质相同(各向同性);同时还假设物体各部分具有相同的物理性质,不会随坐标的改变而变化(均匀性)。

## 2. 材料的力学性质模型

### 1) 弹性材料

弹性材料是对实际固体材料的理想化,它是对真实材料的构成的近似理想模型。弹性材料的特征是:对应于一定的温度,物体在变形过程中,应力与应变之间呈一一对应的关系,它与载荷的持续时间及变形历史无关;卸载后,其变形可以完全恢复。大多数金属材料在变形过程中,应力与应变之间呈线性关系,服从胡克定律的弹性材料称为线性弹性材料;而某些金属和塑料等,其应力与应变之间呈非线性性质,称为非线性弹性材料。材料弹性规律的应用,成为弹性力学区别于其他固体力学分支学科的本质特征。

### 2) 塑性材料

塑性材料也是固体材料的一种理想化模型。塑性材料的特征是:在变形过程中,应力和应变之间不再具有一一对应的关系,应变的大小与加载的历史有关,但与时间无关;卸载过程中,应力与应变之间按材料固有的弹性规律变化;完全卸载后,物体保持一定的永久变形,或称残余变形。应力和应变之间不存在一一对应的关系和部分变形的不可恢复性是塑性材料的两个基本特征。

### 3) 黏性材料

力学性质具有时间效应,即力学性质与载荷的持续时间和加载速率相关的材料,称其为黏性材料。实际材料都具有不同程度的黏性性质,只不过有时可以略去不计。

### 3. 结构计算模型

#### 1) 小变形假设

固体因外部因素引起的变形,可能很小,也可能很大。但在弹塑性力学问题中,均假设物体在外部因素作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸,此所谓小变形假设。应用该假设,可使计算模型大大简化。例如,在研究物体的平衡时,可不考虑变形引起的物体尺寸和位置的变化;在建立几何方程和物理方程时,可以略去其中的二次及更高次项,使得到的基本方程是线性偏微分方程组。与之相对应的是大变形情况,这时必须考虑几何关系中的二阶或高阶非线性项,导致变形与载荷之间为非线性关系,得到的基本方程是较难求解的非线性偏微分方程组。

#### 2) 无初应力假设

假设物体原来是处于一种无应力的自然状态,即在外力作用前,物体各点应力均为零。分析计算是从这种状态出发的。

#### 3) 载荷分类

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力两种,二者分别简称为体力和面力。

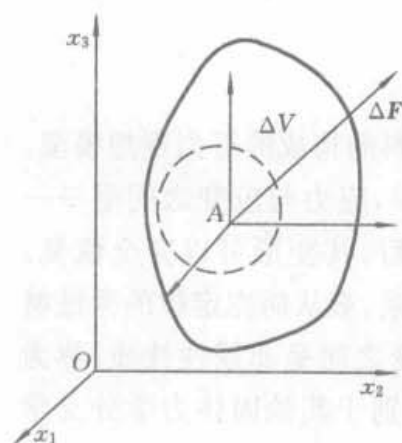


图 1.1 体力示意图

所谓体力是分布在物体体积内的力,如重力、惯性力和电磁力等。物体各点所受的体力一般是不同的,如图 1.1 所示,为了表明物体某一点 A 所受体力的大小和方向,在这一点取包含点 A 的一小微元体  $\Delta V$ 。设作用于  $\Delta V$  的体力为  $\Delta F$ ,则体力的平均集度为  $\Delta F/\Delta V$ 。如果把所取的这一小部分物体  $\Delta V$  不断减小,则  $\Delta F$  和  $\Delta F/\Delta V$  都将不断地改变大小、方向和作用点。现在,假设体力为连续分布,则  $\Delta V$  无限减小而趋于点 A 时,  $\Delta F/\Delta V$  将趋于一定的极限  $f$ ,即

$$f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V}$$

这个极限矢量  $f$  就是该物体在点 A 所受体力的集度。由于  $\Delta V$  是标量,所以  $f$  的方向就是  $\Delta F$  的极限方向。矢量  $f$  在坐标轴  $x_i (i=1,2,3)$  上的投影  $X_i$  称为该物体在点 A 的体力分量,以沿坐标轴正方向时为正,它们的量纲是  $[\text{力}][\text{长度}]^{-3}$ 。

面力是分布在物体表面上的力,如风力、流体压力、两固体间的接触力等。物体上各点所受的面力一般是不同的。为了表明物体表面上一点 B 所受面力的大小和方向,仿照对体力的讨论,可得出当作用于  $\Delta S$  面积上的面力为  $\Delta P$  时,面力的平均集度为  $\Delta P/\Delta S$ ,微小面  $\Delta S$  无限缩小而趋于点 B 时  $\Delta P/\Delta S$  将趋于一定的极限  $p$ ,即

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S}$$

矢量  $p$  在坐标轴  $x_i$  上的投影  $\bar{X}_i$  称为点  $B$  的面力分量, 以沿坐标轴正方向时为正, 它们的量纲是  $[\text{力}][\text{长度}]^{-2}$ 。作用在物体表面上的力都占有一定的面积, 当作用面很小或呈狭长形时, 可分别理想化为集中力或线分布力。

注意, 材料的构造模型和结构计算模型是讨论弹塑性力学问题的共同基础, 而材料的力学性质模型的选取, 则需根据材料本身的力学性质、工作环境及限定的研究范围来确定。弹性、塑性和黏性只是材料的三种基本理想性质, 在一定条件下可近似地反映材料在某一方面的力学行为。因此, 它们是材料力学性质的理想模型。大多数材料的力学性质在一定条件下可采用上述三种模型之一或其组合加以近似描述。

由于弹塑性力学问题的复杂性, 还有一些针对具体问题所作的假设, 将在以后各章节中给出。

### 1.3 材料的基本力学性能试验

固体材料一旦受力, 就会产生变形, 从变形开始到破坏, 一般要经历弹性变形和塑性变形两个阶段。根据材料力学性质的不同, 有的材料弹性阶段较明显, 而塑性阶段则很不明显。例如, 铸铁等脆性材料, 往往经历弹性阶段后就破坏。有的材料则弹性阶段很不明显, 从弹性变形开始就伴随着塑性变形, 弹塑性变形总是耦联产生的, 如混凝土材料。大部分固体材料都呈现出明显的弹性变形阶段和塑性变形阶段。今后主要讨论有弹性与塑性变形阶段的固体材料, 并统称其为弹塑性材料。

#### 1. 应力应变曲线

应力应变曲线可以通过单向拉伸(或压缩)、薄壁管扭转试验得到, 这是弹塑性理论最基本的试验资料之一。由于纯扭转试验所得的曲线几乎与拉伸图完全相似, 因此只介绍单向拉伸(或压缩)的某些试验结论。

##### 1) 塑性变形的分类

一般的金属材料可根据其塑性性能的不同分成两类, 一类具有明显的屈服流动阶段, 有的材料流动阶段很长, 往往变形可以达到 1%, 如低碳钢、铸钢、某些合金钢等, 通常把初始屈服时的应力作为屈服点, 用  $\sigma_s$  表示。如图 1.2 所示, 退火软钢及某些铝合金有上、下屈服点时, 上屈服点一般不稳定, 对试验条件很敏感, 采用下屈服点  $C$  为  $\sigma_s$ 。另一类是没有明显的屈服流动阶段, 如中碳钢、某些高

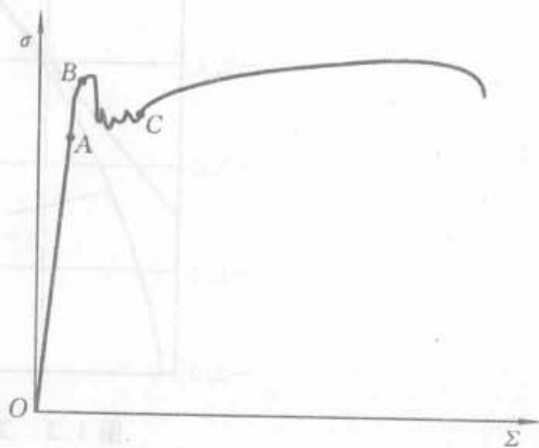


图 1.2 退火软钢拉伸试验图

强度合金钢及某些非铁金属等,则规定以0.2%残余应变时的应力作为条件屈服点,记为 $\sigma_{0.2}$ 。

## 2) 应力应变曲线与真应力图

在小弹塑性阶段,按照原始断面计算的应力应变曲线与按瞬时断面计算的真应力图基本一致。当塑性变形较大时,两种拉伸曲线才有明显的差异,这时应力应变曲线必须以真应力图表示。

令拉伸试验的瞬时长度为 $l$ ,原始长度为 $l_0$ ,则瞬时应变(也称对数应变或自然应变)用 $\Sigma$ 表示。因 $d\Sigma = dl/l$ ,因此有

$$\Sigma = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$$

常用的条件应变(也称工程应变)为

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

自然应变与条件应变的关系为

$$\Sigma = \ln(1 + \epsilon)$$

在小变形阶段, $\Sigma$ 与 $\epsilon$ 几乎相等,但随着应变量的增加,两者差别越来越大,如图1.3所示。

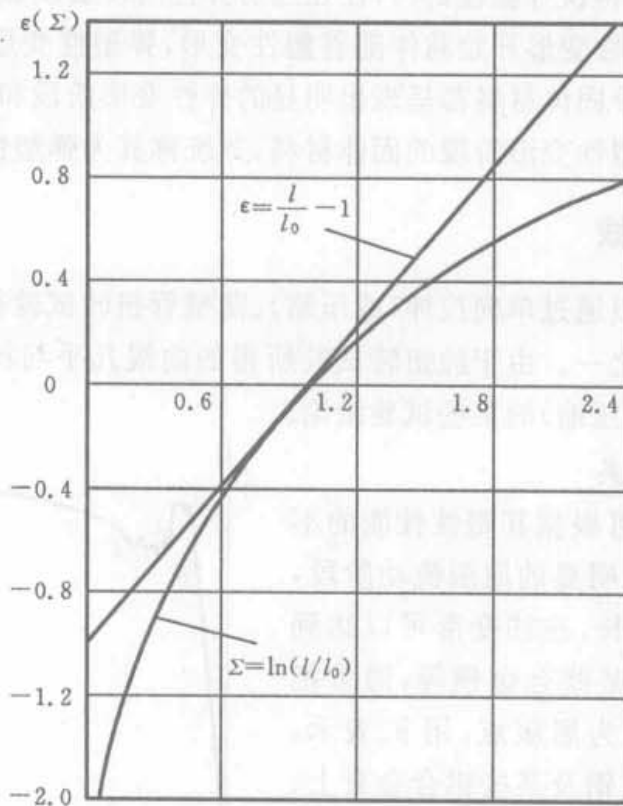


图 1.3 工程应变和自然应变