前　　言

为了适应高等院校数学教学改革的需要，特别是非理工类数学的教学与实践的需要，我们编写了本教材，同时，本书也是《大学文科高等数学系列教材·微积分》(华东理工大学出版社)的配套教材.

本书是作者在多年从事文科高等数学教学的基础上，结合国内文科高等数学教学最新取得的成果，根据2005年国家颁布的考研数学三、四大纲以及2006年教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会提出的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成.在编写过程中，特别针对经济管理类专业对数学教学的要求，力求做到体系详简精当，题型具有一定的广度而又条理顺畅、题目难度适中.全书共分为8章，每章题目分为三类，难度逐渐递增.它既适合教学环节的辅导与练习，也可以作为数学能力提高与准备考研的参考用书.

本书由王龙策划，参加编写的人员有王龙、刘宪、任青萍.其中，王龙执笔第1～5章，刘宪执笔第6～8章，任青萍在编写本书的整个过程中做了大量的、细致的工作，且卓有成效.全书由王龙统稿.在编写和出版本书的过程中，得到了高忠明老师的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中错误疏漏之处在所难免，望广大读者和同行专家批评指正.

编　者

2007年8月

目　录

1 函数、极限与连续

(A)

1. 解下列不等式：

(1) $x^2 < 25$，　(2) $x^2 - x - 2 > 0$，　(3) $0 < (x-2)^2 < 4$，

(4) $|ax - x_0| < \delta$　($a < 0, \delta > 0, x_0$ 为常数).

解　(1) 因为 $(x-5)(x+5) < 0$，所以 $-5 < x < 5$.

(2) 因为 $(x-2)(x+1) > 0$，所以 $x > 2$ 或 $x < -1$.

(3) 因为 $-2 < x-2 < 2$，所以 $0 < x < 4$，又 $x-2 \neq 0$，故 $0 < x < 4$ 且 $x \neq 2$.

(4) 因为 $-\delta < ax - x_0 < \delta$，且 $a < 0$，所以 $\dfrac{x_0+\delta}{a} < x < \dfrac{x_0-\delta}{a}$.

2. 用区间分别表示满足下列不等式的所有 x 的集合，并在数轴上表示出来.

(1) $|x+3| < 2$，　(2) $1 < |x-2| < 2$.

解　(1) 因为 $-2 < x+3 < 2$，得 $x \subset (-5, -1)$，见图 1-1.

(2) 由 $|x-2| > 1$ 得 $x \subset (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$，

由 $|x-2| < 2$ 得 $x \subset (0, 4)$，

综上所得 $0 < x < 1$ 或 $3 < x < 4$，见图 1-2.

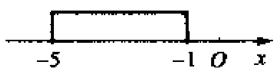

图 1-1

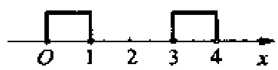

图 1-2

3. 把 -2 的 $\dfrac{1}{3}$ 邻域表示成开区间.

解　由 $|x-(-2)| < \dfrac{1}{3}$，

得 $x \in \left(-\dfrac{7}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$.

4. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，求 $f(\ln x)$ 的定义域.

解　由 $\ln 1 = 0 < \ln x < 1 = \ln e$，

得 $1 < x < e$.

5. 求下列函数的定义域和值域：

(1) $y = \dfrac{x^2}{1+x}$，　(2) $y = \sqrt{2+x-x^2}$，

(3) $y = \ln(1 - 2\cos x)$，　(4) $y = \arccos\dfrac{1-x}{3}$.

解　(1) 定义域：$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

值域：$y=\frac{(x+1)^2-2x-1}{x+1}=\frac{(x+1)^2-2(x+1)+1}{x+1}=(x+1)-2+\frac{1}{x+1}$.

因为 $x+1+\frac{1}{x+1}\geqslant 2$ 或 $x+1+\frac{1}{x+1}\leqslant -2$，

故 $y\in(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$.

(2) 定义域：由 $2+x-x^2\geqslant 0$ 得 $x\in[-1,2]$.

值域：$2+x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

故 $y\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

(3) 定义域：$1-2\cos x>0$，故 $2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5}{3}\pi$　（k 为整数）.

因为 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，所以 $0<1-2\cos x\leqslant 3$，故值域为 $(-\infty,\ln 3]$.

(4) 定义域：$-1\leqslant\frac{1-x}{3}\leqslant 1$，故 $x\in[-2,4]$.

值域：$y\in[0,\pi]$.

6. 判断下列各题中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同：

(1) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$ 与 $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$，　(2) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$ 与 $g(x)=x-1$，

(3) $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$，　(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

解　(1) 相同. 因为 $\frac{x-1}{2-x}>0\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\2-x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1<0\\2-x<0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-1>0,\\2-x>0.\end{cases}$

(2) 不同. 因为 $f(x)\geqslant 0$，而 $g(x)\in\mathbf{R}$.

(3) 不同. 因为 $g(x)\geqslant 0$，$f(x)\in\mathbf{R}$.

(4) 相同. 因为 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}=x\sqrt[3]{x-1}=g(x)$.

7. 已知 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^4}$，求 $f(x)$.

解　令 $x-\frac{1}{x}=t$，则 $t^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$，而 $\frac{1}{f(t)}=x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$，

得　$f(t)=\frac{1}{t^2+2}$，

所以 $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$，$D(f)=R$.

8. 已知 $f(x)$ 满足 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{x+1}$，求 $f(x)$.

解　因 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{x+1}$　①

用 $\frac{1}{x}$ 代替 x，则有 $2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2+2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}$　②

①×2－②×x^2 得：$f(x)=\frac{x}{x+1}$ 且 $x\neq -1$.

9. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，设 $f_2(x)=f[f(x)]$，再设 $f_3(x)=f[f_2(x)],\cdots,f_n=f[f_{n-1}(x)]$，求 $f_n(x)(n\geqslant 2)$.

解 $f(x)=\dfrac{x}{1+x},f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{1+x}}{1+\dfrac{x}{1+x}}=\dfrac{x}{1+2x}$,

$f_3(x)=f[f_2(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{1+2x}}{1+\dfrac{x}{1+2x}}=\dfrac{x}{1+3x}$, …，现证 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}\quad(n\geqslant 2)$，事实上：

(1) 当 $n=2$ 时，$f_2(x)=\dfrac{x}{1+2x}$.

(2) 假设 $n=k$ 时，$f_k(x)=\dfrac{x}{1+kx}$ 成立，

则当 $n=k+1$ 时，$f[f_k(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{1+kx}}{1+\dfrac{x}{1+kx}}=\dfrac{x}{1+(k+1)x}$,

即 $\quad f_{k+1}(x)=\dfrac{x}{1+(k+1)x}$.

综上可知：$f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}\quad(n\geqslant 2)$.

10. 下列函数可以看成是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=e^{\sqrt{\log_2\sqrt{x}}}$, (2) $y=\log_2^2\arcsin x^2$.

解 (1) $y=e^u,u=\sqrt{v},v=\log_2\omega,\omega=\sqrt{x}$.

(2) $y=u^2,u=\log_2 v,v=\arcsin\omega,\omega=x^2$.

11. 已知 $f(x^2-1)=\lg\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\lg x$，求 $\varphi(x)$.

解 令 $t=x^2-1$，则 $x^2=t+1$,

所以 $\quad f(t)=\lg\dfrac{t+1}{t-1}$,

故 $\quad f[\varphi(t)]=\lg\dfrac{\varphi(t)+1}{\varphi(t)-1}=\lg t$.

即 $\quad t=\dfrac{\varphi(t)+1}{\varphi(t)-1}$，从而 $\varphi(t)=\dfrac{t+1}{t-1}$,

所以 $\quad \varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\quad(x\neq 1)$.

12. 设 $y=2^u,u=\ln v,v=\arccos t,t=\dfrac{1}{x}$ 试将 y 表示成 x 的函数.

解 $v=\arccos\dfrac{1}{x},u=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)$,

所以 $y=2^{\ln\left(\arccos\frac{1}{x}\right)}\quad(x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty))$.

13. 分别就 $a=3, a=\frac{1}{2}, a=-6$ 讨论 $y=\log_2(a-\sin x)$ 是不是复合函数. 如果是复合函数，求其定义域.

解 $y=f(u)=\log_2 u, u=\varphi(x)=a-\sin x$，

当 $a=3$ 时，$D(f)=(0,+\infty), Z(\varphi)=[2,4]$.

$D(f)\cap Z(\varphi)=[2,4]\neq\varnothing$，

故 $y=\log_2(a-\sin x)$ 是复合函数，其定义域是：$x\in\mathbf{R}$.

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$D(f)=(0,+\infty), Z(\varphi)=\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，

$$D(f)\cap Z(\varphi)=\left(0,\frac{3}{2}\right]\neq\varnothing.$$

故 $y=\log_2(a-\sin x)$ 是复合函数，其定义域是：$2k\pi-\frac{7}{6}\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{6}\quad(k\in\mathbf{Z})$.

当 $a=-6$ 时，$D(f)=(0,+\infty), Z(\varphi)=[-7,-5]$，

$$D(f)\cap Z(\varphi)=\varnothing.$$

故 $y=\log_2(a-\sin x)$ 不是复合函数.

14. 讨论下列函数的有界性，奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{x^4}{x^4+1}$，　(2) $f(x)=\cos\frac{1}{x}$，　(3) $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$，

(4) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$，　(5) $f(x)=\log_2(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $f(x)=\frac{x^4}{1+x^4}=1-\frac{1}{1+x^4}$，故 $0\leqslant f(x)<1$，即 $f(x)$ 在 $D(f)=R$ 内有界，

$f(-x)=\frac{(-x)^4}{(-x)^4+1}=f(x)$，为偶函数.

(2) $|f(x)|\leqslant 1$ 有界，

$f(-x)=\cos\left(-\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}=f(x)$，为偶函数.

(3) 无界，奇函数.

因 $x\neq 0$，定义域关于原点对称，

$f(-x)=\left(-\frac{1}{x}\right)\cos\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}=-f(x)$，为奇函数.

对 $\forall M>0$，总存在 x，使得 $\frac{1}{x}=2k\pi\ (k\in\mathbf{N})$，且 $2k\pi>M$，

于是 $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}=2k\pi\cos 2k\pi=2k\pi>M$，按定义 $f(x)$ 无界.

(4) 无界，奇函数.

因 $\frac{1+x}{1-x}>0\Leftrightarrow(x+1)(x-1)<0\Leftrightarrow-1<x<1$，定义域关于原点对称.

$f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$，为奇函数.

$\frac{1+x}{1-x}=-1+\frac{2}{1-x}=-\frac{2}{x-1}-1$ 可取 $(0,+\infty)$ 中所有的数，

故 $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 可取 $(-\infty,+\infty)$ 中所有的数，所以 $f(x)$ 无界.

(5) 无界，奇函数.

因为对 $\forall x\in\mathbf{R}, x+\sqrt{1+x^2}>0$，故 $D(f)=R$，

又 $f(-x)=\log_2(-x+\sqrt{1+x^2})=\log_2\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$=-\log_2(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$，

显然 $f(x)$ 无界.

15. 讨论函数 $y=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ (a 为常数且 $a>1$) 的单调性，奇偶性，有界性.

解 设 $\forall x_1<x_2, y_1-y_2=\frac{a^{x_1}-a^{-x_1}}{a^{x_1}+a^{-x_1}}-\frac{a^{x_2}-a^{-x_2}}{a^{x_2}+a^{-x_2}}=\frac{2a^{x_1-x_2}-2a^{x_2-x_1}}{(a^{x_1}+a^{-x_1})(a^{x_2}+a^{-x_2})}$，

$\because a>1, \therefore 2a^{x_1-x_2}-2a^{x_2-x_1}<0, \therefore y_1-y_2<0$，即 $y_1<y_2$，

所以 y 为单调递增函数.

又 $y(-x)=\frac{a^{-x}-a^x}{a^{-x}+a^x}=-y(x)$，$\therefore$ 该函数为奇函数，

且 $|f(x)|=\left|\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\right|\leqslant\frac{a^x+a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=1$，即有界.

故函数为单调递增，有界的奇函数.

16. 判断函数 $f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & \text{当 } x<0 \text{ 时;}\\ e^x-1, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}\end{cases}$ 的奇偶性.

解 当 $x<0$ 时，$-x>0$，

$f(-x)=e^{-x}-1=-(1-e^{-x})=-f(x)$.

当 $x>0$ 时，$-x<0$，

$f(-x)=1-e^{-(-x)}=-(e^x-1)=-f(x)$.

当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，

综上可知，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内为奇函数.

17. 求函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的周期.

解 $T=\frac{\pi}{2}$.

18. 试给出函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称的充要条件.

解 必要性.

设函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称，由于点 x 关于 $x=a$ 对称的对称点为 $2a-x$，故有 $f(x)=f(2a-x)$.

令 $x=t+a$，则 $f(t+a)=f(a-t)$，即 $f(x+a)=f(a-x)$.

充分性. 显然.

因此 $f(x+a)=f(a-x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称的充要条件.

19. 设 $y=f(x)$ 是偶函数且其图像对称于直线 $x=a\,(a>0)$，证明 $f(x)$ 是周期函数.

证　由于图像对称于直线 $x=a(a>0)$，所以 $f(x)=f(2a-x)$.

又 $\because y=f(x)$ 是偶函数，

$\therefore f(-x)=f(x)$,

$\therefore f(x)=f(x+2a)$,

即 $T=2a$，$f(x)$ 是周期函数.

20. 设 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$，$D(f)=[-1,0]$，求其反函数 $f^{-1}(x)$ 及定义域和值域.

解　因为 $\sin^2 y=1-x^2$，$x=-\sqrt{1-\sin^2 y}$，互换 x,y 得

$y=f^{-1}(x)=-\sqrt{1-\sin^2 x}$；值域 $y\in[-1,0]$，定义域 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

21. 求函数 $y=\begin{cases}x, & \text{当 } x<1 \text{ 时；}\\ x^2, & \text{当 } 1\leqslant x<4 \text{ 时；}\\ 2^x, & \text{当 } x\geqslant 4 \text{ 时}\end{cases}$ 的反函数.

解　当 $x<1$ 时，$y<1$，且 $x=y$，即 $y=f^{-1}(x)=x$；

当 $1\leqslant x<4$ 时，$1\leqslant y<16$，且 $x=\sqrt{y}$，即 $y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}$；

当 $x\geqslant 4$ 时，$y\geqslant 16$，且 $x=\log_2 y$，即 $y=f^{-1}(x)=\log_2 x$，

综上所述，$f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x<1 \text{ 时；}\\ \sqrt{x}, & \text{当 } 1\leqslant x<16 \text{ 时；}\\ \log_2 x, & \text{当 } x\geqslant 16 \text{ 时.}\end{cases}$

22. 设某商品需求函数为 $Q=-aP+b(a,b>0)$，讨论 $P=0$ 时的需求量 Q 和 $Q=0$ 时的价格 P.

解　当 $P=0$，$Q=b$，

当 $Q=0$，$P=\dfrac{b}{a}$，

$\therefore$ $P=0$ 时的需求量为 b，$Q=0$ 时的价格为 $\dfrac{b}{a}$.

23. 某商品的需求量 Q 与价格 P 之间呈线性关系，若该商品的最大需求量为 2 000 件，最高价格为 500 元每件，求该商品的线性需求函数.

解　需求量与价格呈线性关系：设 $Q=-aP+b$，

$\because$ 当 $P=0$ 时，Q 达到最大值，即 $Q_{\max}=2\,000$；当 $Q=0$ 时，P 达到最大值，即 $P_{\max}=500$. 代入 $Q=-a+bP$ 得 $b=2\,000$，$a=4$.

$\therefore$ 该商品的线性需求函数为 $Q=(-4)P+2\,000$ 且 $0\leqslant P\leqslant 500$.

24. 某厂商原来每年向市场提供价格为 P_1 的商品 m 件. 现在为了增加供应量，采取提价措施，若价格每增加 k 元，该厂商就可以为市场多提供 n 件，求该厂商每年向市场提供该商品的供应函数.

解　设 P 为现价，P_1 为原价，供应量的增长幅度为 $\dfrac{P-P_1}{k}\cdot n$，

因此，该厂商每年向市场提供该商品的供应函数为 $Q=m+\dfrac{P-P_1}{k}\cdot n$(件).

25. 设需求函数 $Q=20-2P$，供给函数 $Q=4P-10$，求：

(1) 均衡点(P_0,Q_0)；

(2) 若政府对每单位该商品征收固定的W元消费税，求此时的平衡点(P_0',Q_0').

解 (1) $Q=20-2P,Q=4P-10$,联立方程得均衡点(5,10).

(2) 征收W元消费税后，$Q=4(P+W)-10,Q=20-2P$,

联立得均衡点$\left(5+\frac{2}{3}W,10-\frac{4}{3}W\right)$.

26. 某产品总成本C万元为年产量Q_t的函数，$C(Q)=a+bQ^2$，其中a，b为待定常数.已知固定成本为200万元，且当年产量$Q=100$吨时，总成本$C=500$万元，试求平均单位成本$\bar{C}$万元/吨与年产量Q_t的函数关系.

解 由题意可得：$a=200$,

又$C(100)=200+b\cdot100^2=500$,得$b=\frac{3}{100}$,

所以总成本函数表达式：$C(Q)=200+\frac{3Q^2}{100}$,

故平均单位成本：$\bar{C}=\bar{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{200}{x}+\frac{3x}{100}$.

27. 某产品总成本C元为日产量Q(千克)的函数，$C(Q)=Q^2+Q+80$，产品的销售价格为P元/千克，它与产量Q(千克)的关系为$P(Q)=20-Q$，试将每日产品全部销售后获得的总利润L表示为日产量Q(千克)的函数.

解 由$L(Q)=PQ-C(Q)=(20-Q)Q-Q^2-Q-80$

得：$L=L(Q)=-2Q^2+19Q-80\quad(0<Q<20)$.

28. 已知某产品价格为P时，需求函数为$Q=30-3P$，成本函数$C=30+2Q$，问产量Q为多少时，利润L为最大？最大利润是多少？

解 由$Q=30-3P$,得$P=10-\frac{Q}{3}$,$R(Q)=PQ=10Q-\frac{Q^2}{3}$,

得$L(Q)=R(Q)-C(Q)=10Q-\frac{Q^2}{3}-30-2Q=-\frac{1}{3}(Q-12)^2+18$

故当$Q=12$时，最大利润为18.

29. 某工厂生产产品1 000吨，每吨定价为120元，销售在600吨以内时，按原价出售；超过600吨时，超过部分打8折出售，试求销售总收益与总销量之间的函数关系.

解 设R为总收益，x为销售量.

由题意得，$R=\begin{cases}120x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 600\text{ 时；}\\ 72\,000+0.8(x-600), & \text{当 } 600<x\leqslant 1\,000\text{ 时.}\end{cases}$

30. 用数列极限定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{n}=1$, (2) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ (a为常数，且$|a|<1$).

证 (1) $\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\frac{n-3}{n}-1\right|=\frac{3}{n}<\varepsilon$,只需$n>\frac{3}{\varepsilon}$,因此取$N=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$,于是

对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$,当$n>N$时，有$\left|\frac{n-3}{n}-1\right|<\varepsilon$恒成立，

这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{n}=1$.

(2) 当 $a\neq 0$ 时，$\forall \varepsilon>0$，要使 $|a^n-0|=|a|^n<\varepsilon$，只需 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}$，因此取 $N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}\right]$，

于是对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}\right]$（取 $\varepsilon<1$），当 $n>N$ 时，有 $|a^n-0|<\varepsilon$ 恒成立，

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$. 当 $a=0$ 时，显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$.

31. 用函数极限定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-1}=\dfrac{1}{2}$， (2) $\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-1)=3$， (3) $\lim\limits_{x\to x_0^-}(-x)=-x_0$.

证 (1) $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{3}{2}\left|\dfrac{1}{2x-1}\right|<\varepsilon$，

因 $|2x-1|\geqslant|2x|-1>0$ （因 $x\to\infty$，可设 $|2x|>1$），

故 $\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{|2x-1|}\leqslant\dfrac{3}{2(|2x|-1)}$.

从而，只要 $\dfrac{3}{2(|2x|-1)}<\varepsilon$，即 $|x|>\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4\varepsilon}$ 即可. 故取 $M=\dfrac{3}{4\varepsilon}+\dfrac{1}{2}$.

于是对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M=\dfrac{3}{4\varepsilon}+\dfrac{1}{2}>0$，当 $|x|>M$ 时，有 $\left|\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 恒成立，

这就证明了 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-1}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\forall\varepsilon>0$，要使 $|2x-1-3|=|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，只需取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，于是

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，当 $|x-2|<\delta$ 时，有 $|2x-1-3|<\varepsilon$ 恒成立，

这就证明了 $\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-1)=3$.

(3) $\forall\varepsilon>0$，要使 $|-x-(-x_0)|=|x-x_0|<\varepsilon$，只要取 $\delta=\varepsilon$，于是

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，当 $x_0-x<\delta$ 时，有 $|-x-(-x_0)|<\varepsilon$ 恒成立，

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0^-}(-x)=-x_0$.

32. 设 $f(x)=\begin{cases}8, & \text{当 } x<3 \text{ 时;}\\ 3x-1, & \text{当 } x\geqslant 3 \text{ 时.}\end{cases}$ 作 $f(x)$ 的图形，并讨论当 $x\to 3$ 时，$f(x)$ 的左右极限.

解 图形略. 当 $x\to 3^-$ 时，$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=8$，$\therefore f(x)$ 的左极限为 8；

当 $x\to 3^+$ 时，$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(3x-1)=8$，$\therefore f(x)$ 的右极限为 8.

33. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ 不存在.

证 当 $x\to 1^-$ 时，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\dfrac{1-x}{x-1}=-1$，

当 $x\to 1^+$ 时，$\lim\limits_{x\to 1^+}=\dfrac{|x-1|}{x-1}=\dfrac{x-1}{x-1}=1$，

$\because \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ 不存在.

34. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2-3x+2)$，(2) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|}{x-2}$，(3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2}{x+1}$，

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$，(5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$，(6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[5]{1-x^3}}{1-x}$，

(7) $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{(n-1)^3}{n^2-1}$，(8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x+1}-2}$，(9) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-3})$，

(10) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$，(11) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-2x+1}{x^5+1}(5-\sin x)$.

解： (1) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2-3x+2)=\lim\limits_{x\to -1}2x^2-\lim\limits_{x\to -1}3x+2=2+3+2=7.$

(2) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{x-2}=-1.$

(3) $$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)(x+1)-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-1)-\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}$$
$$=-2-\infty=-\infty.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{3}{4}.$

(5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+2}{x+3}=\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x+3}\right)=1.$

(6) $$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[5]{1-x^3}}{1-x}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^5}-\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x}-1}=0.$$

(7) $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{(n-1)^3}{n^2-1}=\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{(n-1)^2}{n+1}=\infty.$

(8) $$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x-2}+1)}$$
$$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x-2}+1}=2.$$

(9) $$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-3})=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-3}}$$
$$=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\dfrac{4}{x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x^4}}}=0.$$

(10) $$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)}$$
$$=\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{-(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(x+8)(\sqrt{1-x}+3)}=-2.$$

(11) $x\to\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-2\cdot\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}}{1+\dfrac{1}{x^5}}=0$，而 $|5-\sin x|\leqslant 5+1=6$，有界，由于无穷小

量与有界量之积为无穷小量，因此$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x+1}{x^5+1}(5-\sin x)=0$.

35. 指出下列运算的错误，并计算出正确的结果：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0+0+\cdots+0=0$,

(2) $\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\dfrac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}x^3\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x^3}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x^3}=0$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\dfrac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{1}{x^3}}=1$,

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$.

解 (1) 无穷个无穷小量之和未必是无穷小量. 正确的做法是：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

(2) 当$x\to 0$时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}$极限不存在，因此不能写成两个极限的积，但$\left|\sin\dfrac{1}{x^3}\right|\leqslant 1$有界，故可根据无穷小量与有界变量的积仍为无穷小量知，原式的极限为0.

(3) 当$x\to 0$时，$\dfrac{1}{x^3}\to\infty$，因此不能应用$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$这一重要极限. 与上题同理，原式极限应为0.

(4) 在减法运算中，一般不可用等价无穷小量代换. 正确的做法是：

当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\dfrac{1}{\cos x}\to 1$，

$$\text{故}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\frac{x^2}{2}}{x^3}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

36. 已知 $f(x)=\dfrac{mx^3-1}{x^3-1}+2nx-1$，当$x\to\infty$，$m,n$取何值时$f(x)$为无穷小？$m,n$取何值时$f(x)$为无穷大？

解 要使$f(x)$为无穷小，

$$\text{则}\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{mx^3-1}{x^3-1}+2nx-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2nx+(m-1)-2n\cdot\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}}=0,$$

∴ 当$m=1$，$n=0$时，为无穷小.

要使$f(x)$为无穷大，

$$\text{则}\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{mx^3-1}{x^3-1}+2nx-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2nx+(m-1)-2n\cdot\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}}=\infty,$$

∴ 当$n\neq 0$时，为无穷大.

37. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x}$，　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$，　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-2\sin x}{5x+2\sin x}$，

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}$，　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{5\arcsin x}$，　(6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x+2}$，

(7) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^2+3x+2}$，　(8) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin\dfrac{4}{n^2}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3}{\dfrac{1}{x^2}}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3x}{2x}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\right)=\dfrac{3}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-2\sin x}{5x+2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5-2\cdot\dfrac{\sin x}{x}}{5+2\cdot\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{3}{7}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin\sin x}{\sin x}}{\dfrac{x}{\sin x}}=1$.

(5) 令 $x=\sin t$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{5\arcsin x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{3\sin t}{5t}=\dfrac{3}{5}$.

(6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\dfrac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}}{\dfrac{x+2}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-4$.

(7) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{(x+1)(x+2)}=-1$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin\dfrac{4}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{4}{n^2}}{\dfrac{4}{n^2}}\cdot 4=4$.

38. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{x-1}$，　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$，　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{-x}\right)^{-5\cdot\frac{-x}{5}-1}=e^{-5}$.

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^{\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}=e^{1}\cdot e^{-1}=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

39. 函数 $f(x)=\begin{cases}3x, & 当 0\leqslant x<1 时;\\ 4-x, & 当 1\leqslant x\leqslant 3 时\end{cases}$ 在闭区间$[0,3]$上是否连续？并作出 $f(x)$ 的图形.

解 显然 $f(x)$ 在$(0,1)$ 和$(1,3)$内连续，因 $\lim\limits_{x\to 0^+}(3x)=0=f(0)$，$\lim\limits_{x\to 3^-}(4-x)=1=f(1)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，在 $x=3$ 处左连续.

又 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=3=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续(图 1-3).

因此，函数在$[0,3]$上连续.

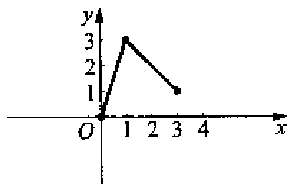

图 1-3

40. 函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & 当 |x|\leqslant 1 时;\\ \dfrac{x}{|x|}, & 当 1<|x|\leqslant 3 时\end{cases}$ 在定义域内是否连续？并作出 $f(x)$ 的图形.

解 $f(x)$ 在定义域内除$|x|=1$ 外都是连续的.

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x}=1$，∴ $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，

∴ $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{-x}=-1$，$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(-x)=1$，

∴ $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$，∴ $f(x)$ 在 $x=-1$ 处不连续.

因此，$f(x)$ 除在 $x=-1$ 不连续外，其余点都连续，见图 1-4.

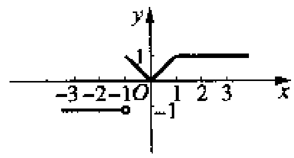

图 1-4

41. 当 m,n 为何值时，下列函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续？

(1) $f(x)=\begin{cases}2e^x, & 当 x<0 时;\\ m-x^2, & 当 x\geqslant 0 时,\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x-2, & 当 x<m 时;\\ 4-x, & 当 m\leqslant x<n 时;\\ 2x-14, & 当 x\geqslant n 时.\end{cases}$

解 (1) $f(x)$ 在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续，要使 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续，必须 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(m-x^2)=\lim\limits_{x\to 0^+}m=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2e^x=2$，即 $m=2$.

(2) 要使 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续，

则 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to m^-}(x-2)=\lim\limits_{x\to m^+}(4-x),\\ \lim\limits_{x\to n^-}(4-x)=\lim\limits_{x\to n^+}(2x-14).\end{cases}$

即 $\begin{cases}m-2=4-m,\\ 4-n=2n-14.\end{cases}$　故 $\begin{cases}m=3,\\ n=6.\end{cases}$

42. 求下列函数的间断点，并判别类型：

(1) $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x^3}{x^3}, & 当 x<0 时;\\ 0, & 当 x=0 时;\\ -e^{-x^3}, & 当 x>0 时,\end{cases}$　　(2) $y=\tan x$,　　(3) $y=\arctan\dfrac{1}{x^2}$,

(4) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,　　(5) $y=\dfrac{(e^{3x}-1)\sin x}{x^2(x-1)}$.

解 (1) $\because \lim\limits_{x\to 0^-} y = 1, \lim\limits_{x\to 0^+} y = -1, y|_{x=0} = 0, \lim\limits_{x\to 0^+} y \neq \lim\limits_{x\to 0^-} y$,

$\therefore x = 0$ 是函数的跳跃间断点.

(2) 当 k 为奇数时, $\lim\limits_{x\to \frac{k\pi}{2}} \tan x = \infty$, 所以 $x = \frac{k\pi}{2}$ 是函数的无穷间断点.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}$, 当 $x = 0$ 时, y 不存在, 所以 $x = 0$ 为函数的可去间断点.

(4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, 当 $x = 1$ 时, y 不存在, 所以 $x = 1$ 为该函数的可去间断点.

(5) 当 $x \to 0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{3x} - 1)\sin x}{3x \cdot x(x-1)} \cdot 3 = -3$;

当 $x = 0$ 时, y 不存在, 故 $x = 0$ 是该函数的可去间断点;

当 $x \to 1$ 时, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$, 故 $x = 1$ 是该函数的无穷间断点.

43. 利用函数连续性求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \left(\sin x \ln \frac{12}{\pi} x\right)$, (2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$.

解 (1) 原式 $= \sin \frac{\pi}{6} \cdot \ln \frac{\pi}{6} \cdot \frac{12}{\pi} = \frac{1}{2} \ln 2$,

(2) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + 1)}{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{1+x} + 1) = 2$.

44. 证明: 方程 $x^5 - 3x = 1$ 在区间 $(1,2)$ 内有根.

证 令 $f(x) = x^5 - 3x - 1$, 由于 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, 且 $f(1) = -3 < 0, f(2) = 25 > 0$,

$f(1) \cdot f(2) < 0$, 所以由零点定理可知, 至少存在一点 $\xi \in (1,2)$, 使 $f(\xi) = 0$,

即 $x^5 - 3x = 1$ 在区间 $(1,2)$ 内有根.

45. 证明: 方程 $x = a \sin x + b$, 其中 $a > 0, b > 0$, 至少有一个正根, 并且不超过 $a + b$.

证 令 $F(x) = x - a \sin x - b, x \in [0, a+b]$,

$F(0) = -b < 0, F(a+b) = a[1 - \sin(a+b)]$,

当 $\sin(a+b) = 1$, 则 $F(a+b) = 0$, $a + b$ 是 $F(x)$ 的一个根,

当 $\sin(a+b) < 1, F(a+b) > 0$, 即 $F(0) \cdot F(a+b) < 0$,

根据零点定理知, $\exists \zeta \in (0, a+b)$, 使得 $F(\zeta) = 0$,

总之, 原方程至少存在一个不超过 $a + b$ 的正根.

46. 证明: 若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 则存在 ξ 使 $f(\xi) = f(\xi + \pi)$.

证 令 $F(x) = f(x+\pi) - f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,

$F(0) = f(\pi) - f(0), F(\pi) = f(2\pi) - f(\pi) = f(2\pi + 0) - f(\pi) = f(0) - f(\pi)$,

故 $F(0) \cdot F(\pi) < 0$,

根据介值定理可知, 至少存在一点 $\xi(0,\pi)$, 使 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi + \pi) - f(\xi) = 0$.

47. 当 $x \to 0$ 时, 下列无穷小量与 x 相比是什么阶的无穷小量:

(1) $x + \tan 3x$, (2) $\sqrt{3x} - \sin x$,

(3) $\ln(1 + 3x)$, (4) $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \tan x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x + \tan 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \frac{3 \sin 3x}{3x \cos 3x}\right) = 4$,

所以当 $x\to 0$ 时，$x+\tan 3x$ 与 x 相比是同阶非等价无穷小量.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x}-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{3}{x}}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\infty$,

所以当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{3x}-\sin x$ 与 x 相比是较低阶无穷小量.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 3}=3$,

所以当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+3x)$ 与 x 相比是同阶非等价无穷小量.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\tan x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\tan x})}=1$,

所以当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\tan x}$ 与 x 相比是等价无穷小量.

(B)

1. 若 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$，函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是(　　).

A. $[-a,1-a]$　　B. $[-a,1+a]$　　C. $[a,1-a]$　　D. $[a,1+a]$

解　选 C. $f(x)$ 中定义域为 $[0,1]$，故可知 $f(x+a)+f(x-a)$ 中

$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1.\end{cases}$ 又因为 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$，故 $-a\leqslant a,1-a<1+a$,

所以 $f(x+a)+f(x-a)$ 定义域为 $[a,1-a]$.

2. 设函数 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x-\sqrt{1+x^2}$，则 $f(x)=$(　　).

A. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$　　B. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$　　C. $2x-\sqrt{1+x^2}$　　D. $\dfrac{1}{2x}-\sqrt{x^2+1}$

解　选 B. 令 $t=\dfrac{1}{x}$，有 $f(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}$.

3. 已知等式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 对于一切实数都成立，则 $f(x)$ 是(　　).

A. 奇函数　　B. 非奇非偶　　C. 偶函数　　D. 又奇又偶

解　选 A. 令 $x=y=0$，则 $f(0)=0$,

又令 $y=-x$，则 $f(x-x)=f(x)+f(-x)=0$,

得 $f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 为奇函数.

4. 设函数 $g(x)=1+x$ 且当 $x\neq 0$ 时，$f[g(x)]=\dfrac{1-x}{x}$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. -3

解　选 D. 由题意得 $f[g(x)]=f(1+x)=\dfrac{1-x}{x}$，令 $t=1+x$，则 $x=t-1$,

所以 $f(t)=\dfrac{2-t}{t-1}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}-1}=-3$.

5. 函数 $y=\lg(x-2)$ 在区间(　　)内有界.

A. $(2,+\infty)$　　B. $(3,+\infty)$　　C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

解　选 D. 函数 $y=\lg(x-2)$ 在其定义域 $(2,+\infty)$ 内是无界的,所以 $y=\lg(x-2)$ 只能在 $(3,4)$ 有界.

6. 函数 $y=\dfrac{6x}{1+x^2}$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 单调函数　　D. 有界函数

解　选 B D. 因为 $y=f(x)=\dfrac{6x}{1+x^2}$,$f(-x)=-\dfrac{6x}{1+x^2}=-f(x)$,为奇函数;又因为 $3\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 3$,则函数是有界的;但是 $\dfrac{6\times 0}{1+0^2}=0<\dfrac{6\times 1}{1+1^2}=3>\dfrac{6\times 2}{1+2^2}=\dfrac{12}{5}$,说明 y 不随 x 的递增而递增(或递减),所以不是单调函数.

7. 下列各对函数中(　　)是同一个函数.

A. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$　　B. $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$

C. $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$　　D. $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$

解　选 D. (A) 选项中两式定义域不同,(B) 选项中两式值域不同,(C) 选项中两式定义域不同.

8. $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义是当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 有极限的(　　)条件.

A. 无关条件　　B. 充分条件　　C. 必要条件　　D. 充要条件

解　选 A. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义未必表明当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有极限;$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,也不能表明函数在 $x=x_0$ 处有定义.

9. 下列极限有错误的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=\infty$　　C. $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$

解　选 B D. 选项(B) 中 $x\to 0^-$,$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{-(-\frac{1}{x})}=0$,而选项(D) 则未考虑点 $x=0$ 处的左右极限结果不同.

10. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,则必有(　　).

A. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\infty$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=\infty$ (k 为非零常数)

解　选 D. 若取 $f(x)=\dfrac{1}{x-x_0}$,$g(x)=-\dfrac{1}{x-x_0}$,$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=0$,同理(B),(C) 都错,但 $\lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

11. 当 $|x|<1$ 时,$y=\sqrt{1-x^2}$(　　).

A. 是有界函数　　B. 是连续函数

C. 有最大值与最小值　　D. 有最大值无最小值

解　选 A B D. 函数显然是连续和有界的,且当 $x=0$ 时,有最大值为 1,无最小值.

12. 当 $x\to 0$ 时,无穷小量 $\sin(5x+2x^2)$ 与 x 比较是(　　)无穷小量.