序

1958年，莫迪格里亚尼(Franco Modigliani)和米勒(Merton Miller)的一篇划时代的论文在《美国经济评论》上正式发表. 在这篇文章中，他们提出的“无套利(No-Arbitrage)”分析方法改变了华尔街人的投资思维，从而成为华尔街发展史上一件意义非凡的大事. 也正是这篇文章，使得金融学在研究方法上完全从经济学中独立出来. 然而，这篇文章在美国最著名的学术杂志——《美国经济评论》——上发表时，却遇到了一个尴尬的问题. 那就是在这篇文章中，用到了大量的数学工具，其中一个很常见的数学符号“$\bar{X}$”，一个在数学中司空见惯的平均值符号，居然在杂志社的检字机上无法打印出来，当时的杂志社怎么也不能在一个字母之上再额外加上一个横杠. 结果，这两位后来获得诺贝尔经济学奖的作者不得不自掏腰包帮助杂志社改进他们的检字系统. 这一趣事无疑反映出在那个时代，数学在经济学中的作用并不是多么的重要. 但是，在短短的几十年间，数学在经济学中起到了惊人的作用. 如果不是数学工具在经济学中的广泛应用，也就不会出现20世纪80年代开始的新经济增长理论，尽管这一理论的原始思想在20世纪初便已经产生了. 翻开当今任何一本出色的经济管理类学术杂志，不难发现各种各样的数学符号是如何充斥其中的，在今天的《美国经济评论》上，包含各种希腊符号的数学方程式之复杂，比起当年的“$\bar{X}$”不知要复杂了多少倍.

然而，数学在经济学乃至于其他学科的渗透，在极大地促进了相应学科发展的同时，也带来了一系列的问题. 这些问题的一个集中体现就是，如何把握数学在这些学科中使用的度，尤其是在教学活动中，如何将数学与这些学科很好地结合起来，是一个非常困难并且也是急需解决的问题. 尤其对于非理工科专业的学生而言，如果数学一开始就面面俱到而深奥艰涩，势必导致学生对这门学科望而生畏，乃至于丧失学习的兴趣；如果数学过于简单，甚至于走马观花，所学又不成体系，那么必然给学生以后的学习和研究带来隐患. 所以，既能够做到体系完备、详略得当，又能晓畅易懂，与相关学科很好地结合起来，并不是一件很容易的事. 我院王龙副教授和刘宪及焦志常博士合编的这本《微积分》教材，则是在这方面的一个有益尝试. 王龙副教授从教三十余年，有着丰富的数学教学经验，曾被评为“全国优秀教师”，并多次被评为“学生心中的好老师”；而刘宪和焦志常作为具有理工科背景的经济学博士，对数学在经济学中的应用有着相当深刻的体会. 他们的这一著作，较之于其他同类教材，一个显著特色就是知识面广，但并不凌乱，尤其着眼于经济管理类学科对数学的基本要求，做到了体系完备、详简得当. 在与经济管理类学科的结合上，他们也做了非常出色的尝试，这在他们的大量例题中有着广泛的体现.

他们的著作于付梓之际，正是丁亥之秋，所谓“秋实盈衍，亦蕴其珍”，这是他们多年辛勤耕耘的结晶，也希望这累累硕果，来年更能培育出希望之花.

前　言

文理渗透已成为当今高等教育的主要趋势之一，综合素质和综合能力的培养也是当前高教改革的方向.然而，目前专为文科学生进行教学的高等数学教材却相对较少.为此，编写一本深度适当、广度适中、形式灵活，能受文科学生欢迎的高等数学教材一直是我们所追求的目标.本书就是编者在多年从事文科高等数学教学的基础上，结合国内文科高等数学教学最新取得的成果、2005年国家颁布的考研数学三、四大纲以及2006年教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会提出的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成的.本书力求突出以下几个特点：

(1) 难度上“层次分明”.本着“适合各个层次需求”的原则，力求在难度设计上有一定的“坡度”，拉开层次.根据文科高等数学教学的特点，既要满足广大文科学生(包括经管类、社会学、社区管理等)学习基础知识的需要，又要满足部分学生将来考研的合理需求.

(2) 内容上“够用为度”.本着“打好基础、够用为度”的原则，强调基础知识的运用，既删除了较艰深的理论推导，又突出了以“教学基本要求”为主线，保持理论的连贯和完整，而且例题和习题的题型较丰富，体现了各类考试的特点与方向.

(3) 风格上“通俗易懂”.本着“破解难点，兼顾体系”的原则，本书的定位在于使其成为学生学习的“导学”.通过对基本概念的要素、基本知识的特征、基本方法的要点给予较深入的概括和总结，做到深入浅出，以拓展学生的思路，加深对概念的理解和掌握旨在解决问题的数学分析方法.

(4) 实践上“注重实用”.本着“面向实际，注重实用”的原则，不求面面俱到，但求切实可用，特别注重高等数学在经济上应用的基本思想，着力培养学生解决实际问题的数学能力.

本教材的第1～5章由王龙执笔，第6～7章由刘宪执笔，第8章由焦志常、刘宪执笔，全书由王龙统稿.

我们在编写本书的过程中，得到了任青萍老师和高忠明老师的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中错误疏漏之处在所难免，望广大读者和同行专家批评指正.

编　者

2007年6月

目　　录

1 函数、极限与连续

在中学我们已经学习过函数的概念，而函数又是高等数学的主要研究对象. 极限是在研究变量的变化趋势时所引出的一个非常重要的概念，高等数学中许多基本概念都是建立在极限的基础上的，而且极限的方法又是研究函数的一种最基本的方法. 为此，本章将系统介绍函数、极限与连续的基本理论与方法，为以后各章的学习做好准备.

1.1 函数

1.1.1 区间、绝对值、邻域

1. 区间

设 a,b 为实数，且 $a<b$，则开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$；闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；半开半闭区间 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；还有无限区间，如 $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$，$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

2. 绝对值

(1) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$

(2) $|x|<\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ 即 $-\varepsilon<x<\varepsilon$

(3) $|x|>M\ (M>0)$ 即 $x>M$ 或 $x<-M$

(4) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$　(x,y 为任意实数)

(5) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$　(x,y 为任意实数)

3. 邻域

(1) 实心邻域

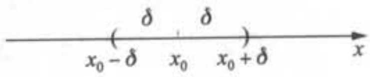


图 1-1

数：实数集合

$\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}=\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta,\delta>0\}$.

形：在数轴上，是一个以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称此为点 x_0 的 δ 邻域. x_0 称为邻域的中心，δ 为邻域的半径(图 1-1).

(2) 空心邻域

$\{x\ |0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$表示数集.

称 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 为以 x_0 为中心，δ 为半径的空心邻域(图 1-2).

例 1　把 -1 的 $\frac{1}{2}$ 空心邻域表示成区间.

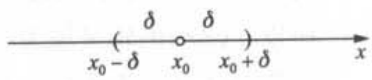


图 1-2

解：因为 -1 的 $\frac{1}{2}$ 空心邻域可以表示为

$$0<|x-(-1)|<\frac{1}{2}$$

即 $\quad -\frac{1}{2}<x+1<\frac{1}{2}$ 且 $x\neq-1$，即 $-\frac{3}{2}<x<-1$ 或 $-1<x<-\frac{1}{2}$，

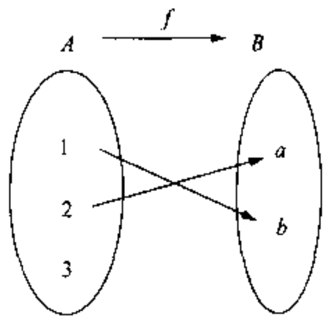
得 $$\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$$

1.1.2 函数、反函数、复合函数

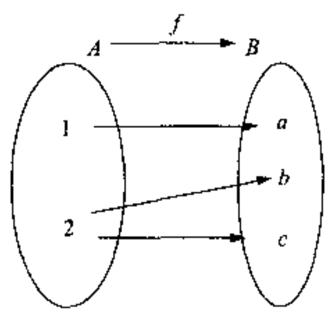
1. 函数

定义 1.1 设 D 是一个非空实数集，若对于 D 中的任一 x 值，变量 y 按照一定的对应法则都有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 自变量的取值范围称为定义域，记作 $D(f)$；因变量 y 的取值范围称为函数的值域，记作 $Z(f)$.

[注] (1) 理解“D 中的任一 x 值”、“有一个确定的值”的含义，如：



和



都不能确定从 A 到 B 的函数.

(2) 当且仅当给定的两个函数，其定义域与对应规则完全相同时，才认为它们是同一函数.

例 2 求函数 $y=f(x)=x^2-x+1$ 在点 $x=1, x=x_0+1, x=x_0+\Delta x$ 处的函数值.

解：$f(1)=1^2-1+1=1$

$f(x_0+1)=(x_0+1)^2-(x_0+1)+1=x^2+x_0+1$

$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)+1=x_0^2+2\Delta x\cdot x_0-x_0+(\Delta x)^2-\Delta x+1$

例 3 设函数 $f(x+1)=x^2-x-1$，求 $f(x)$.

解：令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，代入得

$$f(t)=(t-1)^2-(t-1)-1=t^2-3t+1$$

故 $$f(x)=x^2-3x+1$$

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & \text{当}|x|<1\text{时；}\\ x^2+x, & \text{当}1\leqslant|x|\leqslant2\text{时.}\end{cases}$ 求 $h(x)=f(2x)+f(2-x)$ 的 $D(h)$.

解：因为 $f(x)$ 的定义域为：$-2\leqslant x\leqslant2$，

所以 $f(2x)$ 的定义域为：$-2\leqslant 2x\leqslant2$，即 $-1\leqslant x\leqslant1$

$f(2-x)$ 的定义域为：$-2\leqslant2-x\leqslant2$，即 $0\leqslant x\leqslant4$

故 $D(h)=[-1,1]\cap[0,4]=[0,1]$

2. 反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x), x\in D(f), y\in Z(f)$，如果对任意的 $y\in Z(f)$，由 $y=f(x)$ 可以确定唯一的 $x\in D(f)$ 与其对应，则称变量 x 为变量 y 的函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，并称它为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

[注] (1) 习惯上，由 $x=f^{-1}(y)$，互换 x,y 后所得的函数 $y=f^{-1}(x)$ 才称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

(2) 只有一一对应的函数(即函数所确定的关系是一一对应)才有反函数.

综合之，已知：$y=f(x) \quad x\in D(f) \quad y\in Z(f)$ ①

反解：$x=f^{-1}(y) \quad x\in D(f) \quad y\in Z(f)$ ②

互换：$y=f^{-1}(y) \quad x\in Z(f) \quad y\in D(f)$ ③

结论：若函数 $y=f(x), x\in D(f), y\in Z(f)$ 所确定的关系是一一对应，则①和③互为反函数；①和②的图像是相同的；①和③的图像关于直线 $y=x$ 对称.

3. 复合函数

定义 1.3 设 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$，且 $Z(\varnothing)\cap D(f)\neq\varnothing$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数. x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

[注] 在复合函数定义中，为什么要求 $Z(\varphi)\cap D(f)\neq\varnothing$？中间变量有何特征？

例 5 已知 $y=f(u)=\sqrt{u}, u=\varphi(x)=a-x^2$，试考察 $a=1, a=-1$ 时 $y=f[\varphi(x)]$ 是不是复合函数.

解：(1) $a=1$ 时，$y=\sqrt{u}, u=1-x^2$

$$D(f)=[0,+\infty), Z(\varphi)=(-\infty,1]$$

因为 $Z(\varphi)\cap D(f)=[0,1]\neq\varnothing$，所以 $y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2}$ 是复合函数.

(2) $a=-1$ 时，$y=\sqrt{u}, u=-1-x^2$

$$D(f)=[0,+\infty), Z(\varphi)=(-\infty,-1]$$

因为 $Z(\varphi)\cap D(f)=\varnothing$，所以 $y=f[\varphi(x)]=\sqrt{-1-x^2}$ 不是复合函数.

例 6 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & 当\ x<1\ 时; \\ x, & 当\ x\geqslant 1\ 时. \end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & 当\ x<0\ 时; \\ x^2-1, & 当\ x\geqslant 0\ 时. \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解：$f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & 当\ \varphi(x)<1\ 时; \\ \varphi(x), & 当\ \varphi(x)\geqslant 1\ 时. \end{cases}$

(1) 当 $\varphi(x)<1$ 时：

① $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，即 $x<-1$

② $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2-1<1 \end{cases} \Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$

(2) 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时：

① $x<0$，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $-1\leqslant x<0$

② $x\geqslant 0$, $\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$, $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2-1\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}$

因此
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & \text{当 } x<-1 \text{ 时;}\\ x+2, & \text{当 } -1\leqslant x<0 \text{ 时;}\\ e^{x^2-1}, & \text{当 } 0\leqslant x<\sqrt{2} \text{ 时;}\\ x^2-1, & \text{当 } x\geqslant\sqrt{2} \text{ 时.}\end{cases}$$

1.1.3 函数的基本性质

1. 有界性

定义 1.4 设函数 $f(x)$在区间 D 上有定义,若存在数 $M>0$,使得对于一切 $x\in D$,恒有:$|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 D 上有界.如果不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$在 D 上是无界的.

[注] (1) 若对任意 $x\in D$,恒有 $f(x)\leqslant K$ ($f(x)\geqslant K$),则称 $f(x)$在 D 上有上界(下界),数 K 称为函数 $f(x)$的一个上界(下界).易知,函数 $f(x)$在 D 上有界的充要条件是它在 D 上既有上界又有下界.

(2) 仔细考察 $f(x)$取值的范围,例如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,2)$内是无界的,而在$[1,+\infty)$上则是有界的.

常见的有界函数有:$|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$, $|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $|\text{arccot}\, x|<\pi$, $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1$ 等等.

2. 单调性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$在某区间 D 内有定义,若对任意的 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$在区间 D 内是单调增加的(或单调减少的).

若函数在其整个定义域内都是单调增加的(或单调减少的),就说函数 $y=f(x)$是单调函数.

3. 奇偶性

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$定义在对称区间 D 上,若对任意的 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为 D 上的偶函数;如果恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$为 D 上的奇函数.

[注] (1) 偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

(2) 奇函数的代数和仍为奇函数,偶函数的代数和仍为偶函数;奇函数与偶函数的乘积为奇函数;同为偶(奇)函数的乘积为偶函数.

4. 周期性

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$在区间 D 上有定义,若存在一个与 x 无关的正数 T,使得对任意的 $x\in D$,当$(x\pm T)\in D$ 时,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为周期函数,满足上

式的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

[注] (1) 并非所有的周期函数都存在周期.

(2) 若 T 为函数 $f(x)$ 的周期,则 $\frac{T}{|a|}$ 是函数 $f(ax+b)$ 的周期.

例 7 设 $f(x)$ 为定义在 $(-a,a)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在 $(-a,0)$ 内也单调增加.

证明: 对 $\forall x_1,x_2\in(-a,0)$,且 $x_1<x_2$,则 $-x_1,-x_2\in(0,a)$,且 $-x_1>-x_2$,因为 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调增加,所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$.

又因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $-f(x_1)>-f(x_2)$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

故按定义知,$f(x)$ 在 $(-a,0)$ 内单调增加.

例 8 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\sin x\cdot e^{x^8}$, (2) $f(x)=x^k-x^{-k}$(k 为非零整数),

(3) $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}(a>0,a\neq1)$, (4) $f(x)=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$($a$ 为常量且 $a\neq0$).

解: (1) 由于 $\sin x$ 为奇函数,e^{x^8} 为偶函数,因此,它们的乘积为奇函数.

(2) 当 k 为奇数时,x^k 与 $x^{-k}=\frac{1}{x^k}$ 均为奇函数,因此,它们的差仍然为奇函数.

当 k 为偶数时,x^k 与 $x^{-k}=\frac{1}{x^k}$ 均为偶函数,因此,它们之差仍然为偶函数.

(3) $f(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{1-a^x}{1+a^x}=-f(x)$,故 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$ 为奇函数.

(4) $f(-x)=\ln\left[-x+\sqrt{a^2+(-x)^2}\right]=\ln\frac{(\sqrt{x^2+a^2}-x)(\sqrt{x^2+a^2}+x)}{\sqrt{x^2+a^2}+x}$

$$=\ln\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}+x}=\ln a^2-\ln(\sqrt{x^2+a^2}+x)$$

易知,当 $a^2=1$,即 $a=\pm1$ 时,$f(x)$ 为奇函数;当 $a^2\neq1$ 时,$f(x)$ 非奇非偶.

例 9 判断下列函数在其定义域内的有界性:

(1) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, (2) $f(x)=\frac{1+\sin x}{3}$, (3) $f(x)=x\cdot\sin x$.

解: (1) 由于 $1+x^2\geqslant2|x|$,所以 $|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$,故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(2) 由于 $|f(x)|=\left|\frac{1+\sin x}{3}\right|\leqslant\frac{1}{3}(1+|\sin x|)\leqslant\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$,故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(3) 因为,对不论多大的 M_0,总有 $x_0=2n\pi+\frac{\pi}{2}$,n 为正整数且充分大,使

$$|f(x_0)|=|x_0\sin x_0|=\left|\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=2n\pi+\frac{\pi}{2}>M_0$$

故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无界.

例 10 证明:定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证明:设 $f(x)$是定义在对称区间$(-l,l)$上的函数,易知

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$, $\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,则

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x),\ \psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\psi(x)$$

即 $\varphi(x)$是偶函数,$\psi(x)$是奇函数.

故 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$是一个偶函数与一个奇函数之和.

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常数函数:$y=f(x)=C$

$D(f)=(-\infty,+\infty)$,见图 1-3.

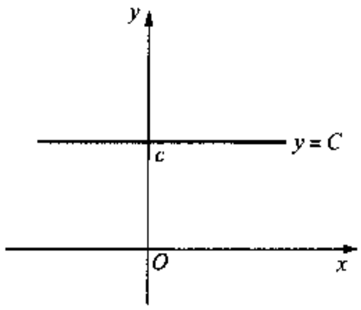


图 1-3

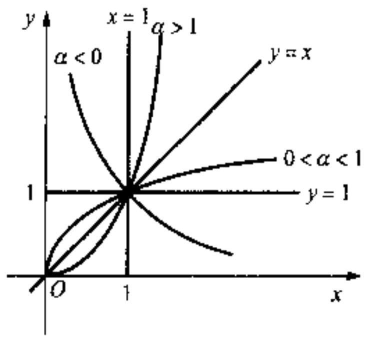


图 1-4

(2) 幂函数:$y=x^{\alpha}$(α 为常数)

当 $\alpha>0$ 时,$y=x^{\alpha}$ 在$(0,+\infty)$内单调增加;

当 $\alpha<0$ 时,$y=x^{\alpha}$ 在$(0,+\infty)$内单调减少,见图 1-4.

[注] 当 $x\in(0,+\infty)$时,$y=x^{\alpha}$ 与 $y=x^{\frac{1}{\alpha}}$ 互为反函数,其图像关于直线 $y=x$ 对称($\alpha\neq 0$).

(3) 指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$,$D(f)=(-\infty,+\infty)$,$Z(f)=(0,+\infty)$

当 $a>1$ 时,$y=a^{x}$ 单调增加;

当 $0<a<1$ 时,$y=a^{x}$ 单调减少,见图 1-5.

(4) 对数函数 $y=\log_{a}x$ $(a>0,a\neq 1)$,$D(f)=(0,+\infty)$,$Z(f)=(-\infty,+\infty)$,见图 1-6.

[注] $y=\log_{a}x$ 与 $y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$互为反函数,其图像关于直线 $y=x$ 对称.

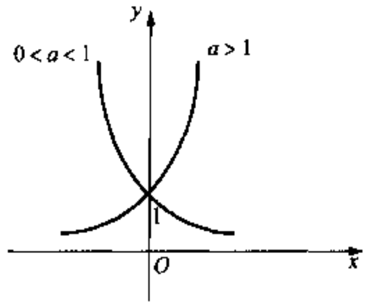


图 1-5

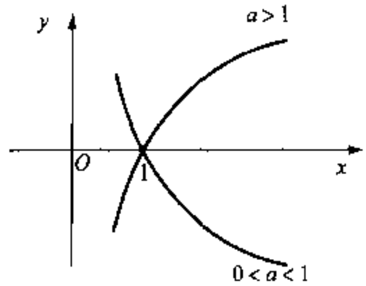


图 1-6

(5) 正弦函数　$y=\sin x$, $D(f)=(-\infty,+\infty)$, $Z(f)=[-1,1]$，见图 1-7.

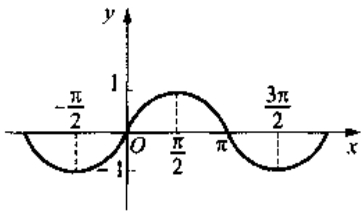


图 1-7

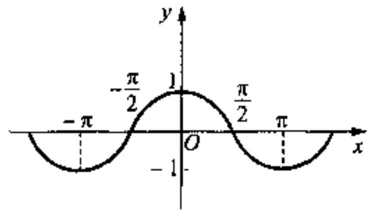


图 1-8

(6) 余弦函数　$y=\cos x$, $D(f)=(-\infty,+\infty)$, $Z(f)=[-1,1]$，见图 1-8.

(7) 正切函数　$y=\tan x$, $D(f)=\left\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\right\}$, $Z(f)=(-\infty,+\infty)$，见图 1-9.

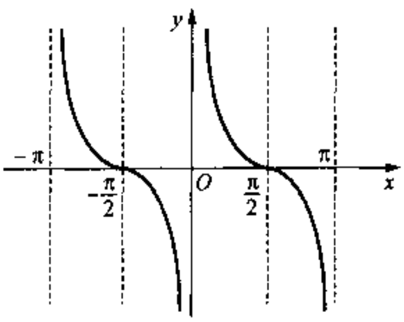


图 1-9

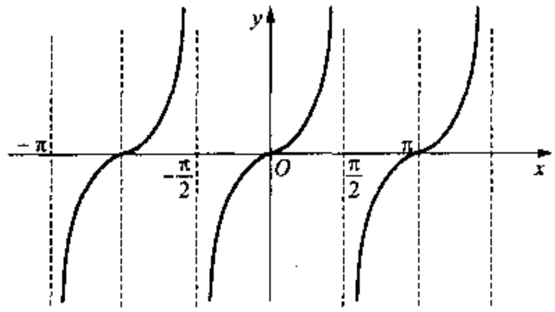


图 1-10

(8) 余切函数　$y=\cot x$, $D(f)=\{x \mid x\neq k\pi, k\in Z\}$, $Z(f)=(-\infty,+\infty)$，见图1-10.

(9) 反正弦函数　$y=\arcsin x$, $D(f)=[-1,1]$, $Z(f)=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，见图 1-11.

[注]　$y=\arcsin x$, $x\in[-1,1]$, $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$与 $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $y\in[-1,1]$互为反函数.

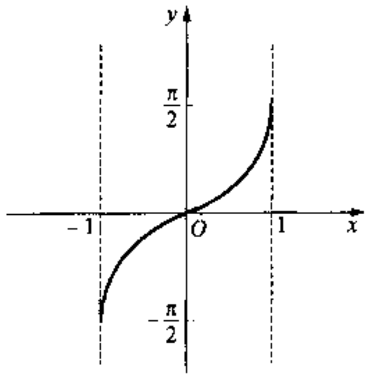


图 1-11

(10) 反余弦函数　$y=\arccos x$, $D(f)=[-1,1]$,

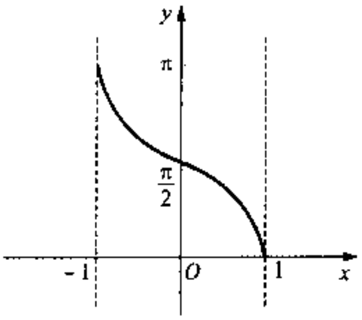


图 1-12

$Z(f)=[0,\pi]$，见图 1-12.

［注］ $y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$与 $y=\cos x$，$x\in[0,\pi], y\in[-1,1]$互为反函数.

(11) 反正切函数　$y=\arctan x, D(f)=(-\infty,+\infty)$，$Z(f)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，见图 1-13.

［注］ $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$与 $y=\tan x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), y\in(-\infty,+\infty)$互为反函数.

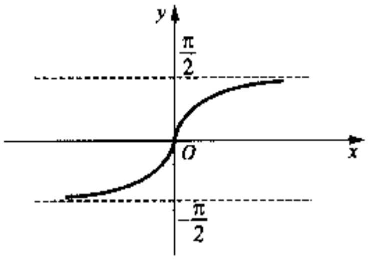


图 1-13

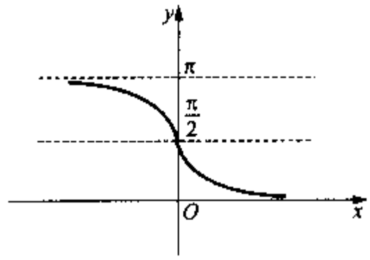


图 1-14

(12) 反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x$, $D(f)=(-\infty,+\infty)$, $Z(f)=(0,\pi)$，见图 1-14.

［注］ $y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$与 $y=\cot x, x\in(0,\pi), y\in(-\infty,+\infty)$互为反函数.

2. 初等函数

定义 1.8　由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而成，并可用一个解析式子表示的函数，称为初等函数.

如 $y=e^{\arccos\sqrt{x^2+1}}+\cos^2 x$ 是初等函数，其中 $y_1=\cos^2 x$ 的复合层次可由外到里分析为：$y_1=u^2, u=\cos x$，而 $y_2=e^{\arccos\sqrt{x^2+1}}$的复合层次可由外到里分析为：$y_2=e^u, u=\arccos v$，$v=\sqrt{\omega}, \omega=x^2+1, \omega=x^2+1$ 是幂函数与常数函数的和，最后 $y=y_1+y_2$.

1.1.5　分段函数

定义 1.9　在自变量的不同变化范围中，自变量与因变量的对应规则用不同的式子来表示的函数，称为分段函数，例如 $f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x\leqslant 1 \text{ 时；}\\ \sin x, & \text{当 } x>1 \text{ 时.}\end{cases}$

由于在一般情况下，分段函数在其定义域内不能用一个解析式子表示，因此它一般不属于初等函数.

1.1.6　隐函数

定义 1.10　设 $F(x,y)$是一个已知二元函数，D是一个区间，如果对于每个 $x\in D$，都有唯一的 y 满足方程 $F(x,y)=0$，则称这个函数 $y=f(x)$是由 $F(x,y)=0$ 在区间 D 上确定的隐函数.

易知，若把隐函数 $y=f(x)$代入方程 $F(x,y)=0$，便得到在区间 D 上成立的恒等式

$F(x,f(x))\equiv 0, x\in D$. 在大多数情况下，不能从方程 $F(x,y)=0$ 中解出隐函数 $y=f(x)$ 的显示表达式，即显化. 例如由 $e^y-xy=0$ 所确定的隐函数就不能显化. 但是，我们在后面将要探讨利用上述恒等式研究隐函数的某些性质.

1.1.7 幂指函数

定义 1.11 形如 $y=[f(x)]^{g(x)}$ 的函数称为幂指函数. 例如 $y=x^x, y=\left[\frac{\pi}{2}-\arctan x\right]^{\frac{1}{x}}$ 等等.

幂指函数也是一种非初等函数，因为它无法由基本初等函数经四则运算或复合而成. 值得注意的是，读者应了解它与幂函数、指数函数的联系与区别.

1.1.8 其他准备知识

为学好微积分，读者还应熟记以下数学基础知识.

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(2) 排列数公式 $P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ $(m\leqslant n)$

$$P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}\ (m\leqslant n)$$

$P_n^n=n!=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$；并规定 $0!=1$

组合数公式 $C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m^m}$ $C_n^m=C_n^{n-m}$ $(m\leqslant n)$

(3) 一元二次不等式 $(x-x_1)(x-x_2)\geqslant 0\ (x_1<x_2)$，解为 $x\leqslant x_1$ 或 $x\geqslant x_2$

$(x-x_1)(x-x_2)\leqslant 0\ (x_1<x_2)$，解为 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$

(4) 对任何实数 x 都有 $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时;}\\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时.}\end{cases}$ 取整函数 $[x]=n, n\leqslant x<n+1$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(5) $a^{\log_a N}=N$(对数恒等式) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}=\frac{\ln b}{\ln a}$

(6) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots C_n^na^0b^n$

(n 为正整数，$k=0,1,2,\cdots,n$)

(7) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\cos^2\beta=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，　$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

$\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2}$

$\arctan\alpha+\operatorname{arccot}\alpha=\frac{\pi}{2}$

(8) 首项 $a\neq 0$,公比 $q\neq 1$ 的等比数列 $a,aq,aq^2\cdots,aq^{n-1},\cdots$的前 n 项和 $S_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$.

(9) 若条件 A 成立,则结论 B 成立,我们称条件 A 是结论 B 的充分条件;

若结论 B 成立,则必有条件 A 成立,我们称条件 A 是结论 B 的必要条件;

原命题与逆否命题等价.

(10) 已知实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,它们中最大者记作 $\max\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$,最小者记作 $\min\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$,它们的总和记作 $\sum_{i=1}^{n}X_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$.

1.1.9　常见的经济函数

1. 几个常见的经济量词解释

(1) 需求量:某种商品的需求量是指在一定期限、一定价格条件下,消费者愿意购买并且有支付能力购买的商品量.

(2) 供给量:某种商品的供给量是指在一定价格条件下,生产者愿意出售并且有可供出售的商品量.

(3) 均衡价格:是指市场上需求量与供给量相等时的价格.

(4) 均衡商品量:是指对应于均衡价格的需求量(或供给量).

(5) 固定成本:是指一定时期或一定任务量范围内,不随生产量增加而变动的那部分费用. 如折旧费、管理人员工资、办公费、保险费等.

(6) 可变成本:是指随着生产量增加而变动的那部分费用. 如原材料费、动力费、计件工资等.

(7) 总成本:是指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入(劳动力、原料、设备等)的价格或费用总额. 它由固定成本与可变成本组成.

(8) 平均成本:是指生产一定数量的产品时,平均每个单位产品的成本.

(9) 总收益:是指生产者销售一定量产品所得的全部收入.

(10) 总利润:是指生产者销售一定量产品所得的总收益扣除成本后的那部分费用.

2. 几个常见的经济函数的表达式

(1) 需求函数:市场对商品的需求量 Q 与商品价格 P 之间的函数关系