

大学数学竞赛指导

国防科学技术大学大学数学竞赛指导组

清华大学出版社

大学数学竞赛指导

国防科学技术大学大学数学竞赛指导组

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是为大学生数学竞赛指导而编写的。全书共分6部分,计19讲。主要内容涵盖高等数学与数学分析、线性代数与高等代数、概率论与数理统计等本科数学基础核心课程。全书例题丰富,行文流畅,深入浅出,富有启发性与可读性。

本书既可作为大学生数学竞赛指导的教材,也可作为本科生参加全国硕士研究生数学课程入学考试的重要辅助资料,同时,对大学数学教师及工程技术人员来说也是一本不可多得的参考书。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

大学数学竞赛指导/国防科学技术大学大学数学竞赛指导组. —北京:清华大学出版社,2009.10

ISBN 978-7-302-21213-3

I. 大… II. 国… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第174310号

责任编辑:佟丽霞 赵从棉

责任校对:赵丽敏

责任印制:

出版发行:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦A座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:

装 订 者:

经 销:全国新华书店

开 本:170×230 印 张:20.75

字 数:369千字

版 次:2009年10月第1版

印 次:2009年10月第1次印刷

印 数:1~ 000

定 价: .00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:010-62770177 转 3103 产品编号:

前言

大学
数学
竞赛
指导

大学生数学竞赛活动为青年学子提供了一个展示基础知识和思维能力的舞台。大学生数学竞赛活动的开展对高等学校培养人才,促进数学课程的改革与建设,增强大学生学习数学的兴趣,培养大学生的创新精神和应用能力有着重要的意义。

本书是为大学生数学竞赛指导而编写的,全书分6部分,共19讲。第1部分由李建平、陈挚、朱健民执笔,第2部分由周治修、覃左平、郑言执笔,第3部分和第4部分由戴清平、冯良贵执笔,第5部分由李永乐执笔。主要内容包括3个系列:第1部分高等数学与第2部分数学分析为第1系列;第3部分线性代数与第4部分高等代数为第2系列;第5部分概率论与数理统计为第3系列。其中,第2部分数学分析内容和第4部分高等代数内容可分别看成第1部分高等数学内容和第3部分线性代数内容的加深和拓广。第6部分包括非数学类与数学类模拟试题共6套,供自我检测。

多年来,我校十分重视大学生数学竞赛活动的开展,形成了以冯良贵、李建平、朱健民、戴清平、陈挚、周治修、覃左平、李永乐、郑言、刘雄伟等为骨干的一支稳定的数学竞赛指导组,并在湖南省历届大学数学竞赛中取得佳绩。本书正是集我们数学竞赛指导组全体同仁多年来的教学经验而成稿的,有些例题属我们原创,有些例题则属摘编而得。由于编者水平有限,加之时间仓促,错误在所难免,不当之处还请各位专家批评指正。

国防科学技术大学大学数学竞赛指导组

2009年8月

目 录

大
学
数
学
竞
赛
指
导

第 1 部分 高等数学	1
第 1 讲 导数与偏导数	3
第 2 讲 定积分与重积分	32
第 3 讲 曲线积分与曲面积分	56
第 4 讲 数列与级数	72
第 5 讲 常微分方程	91
第 6 讲 空间解析几何	100
第 2 部分 数学分析	107
第 7 讲 分析基础	109
第 8 讲 微分与积分	125
第 9 讲 级数与不等式	142
第 3 部分 线性代数	157
第 10 讲 行列式	159
第 11 讲 矩阵	176
第 12 讲 线性方程组	191
第 13 讲 二次型	203
第 4 部分 高等代数	215
第 14 讲 多项式	217
第 15 讲 若尔当标准形	223
第 16 讲 线性空间与线性变换	235
第 5 部分 概率论与数理统计	245
第 17 讲 随机事件的概率	247

第 18 讲 随机变量与数字特征	252
第 19 讲 数理统计	267
第 6 部分 模拟试题	277
非数学类模拟试题 1	279
非数学类模拟试题 1 参考解答	281
非数学类模拟试题 2	288
非数学类模拟试题 2 参考解答	290
非数学类模拟试题 3	295
非数学类模拟试题 3 参考解答	297
数学类模拟试题 1	303
数学类模拟试题 1 参考解答	305
数学类模拟试题 2	310
数学类模拟试题 2 参考解答	312
数学类模拟试题 3	316
数学类模拟试题 3 参考解答	318
参考文献	324

高等数学

第 1 部分

大学数学竞赛指导

- 第 1 讲 导数与偏导数
- 第 2 讲 定积分与重积分
- 第 3 讲 曲线积分与曲面积分
- 第 4 讲 数列与级数
- 第 5 讲 常微分方程
- 第 6 讲 空间解析几何

导数与偏导数

第 1 讲

大学数学竞赛指导

例 1.1 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有定义, $f(0)=1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + \sin x \cdot f(x)}{e^{x^2} - 1} = 0$. 证明: 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

证 由已知条件, 知

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + \sin x \cdot f(x)}{e^{x^2} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1-x) + x] + \sin x[f(x) - 1] + [\sin x - x]}{x^2}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} &= -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x[f(x) - 1]}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}, \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2},$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}.$$

所以, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0) = \frac{1}{2}$.

注 (1) 等价无穷小代换是指在乘积型极限中, 一个无穷小因式可以用与它等价的无穷小因式代替. 在其他形式中使用会导致错误. 如下面的计算中错误地使用了等价无穷小代换:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + \sin x \cdot f(x)}{e^{x^2} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + x \cdot f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}. \end{aligned}$$

(2) 常用的等价无穷小包括: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x; \quad \tan x \sim x; \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2};$$

$$\ln(1+x) \sim x; \quad e^x - 1 \sim x; \quad (1+x)^a \sim ax.$$

例 1.2 设函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} (x > 0)$, 证明: 存在常数 A, B , 使得当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 恒有

$$f(x) = e + Ax + Bx^2 + o(x^2),$$

并求常数 A, B .

证 先将函数 $f(x)$ 展开为带佩亚诺 (Peano) 余项的二阶麦克劳林 (Maclaurin) 公式, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} \\ &= e^{\frac{1}{x} \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right]} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \\ &= e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \\ &= e \cdot \left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)^2 + o(x^2) \right] \\ &= e \cdot \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!} \frac{x^2}{4} + o(x^2) \right] = e - \frac{e}{2}x + \frac{11}{24}ex^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

由此得 $A = -\frac{e}{2}, B = \frac{11}{24}e$.

例 1.3 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内二阶可导, 且 $f''(x) \neq 0$.

(1) 证明: 对于任何非零实数 x , 存在唯一的 $\theta(x) (0 < \theta(x) < 1)$, 使得

$$f(x) = f(0) + xf'(x\theta(x)).$$

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$.

证 (1) 对于任何非零实数 x , 由拉格朗日中值定理知, 存在 $\theta(x) (0 < \theta(x) < 1)$, 使得

$$f(x) = f(0) + xf'(x\theta(x)).$$

如果这样的 $\theta(x)$ 不唯一, 则存在 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x) (\theta_1(x) < \theta_2(x))$, 使得 $f'(x\theta_1(x)) = f'(x\theta_2(x))$, 由罗尔定理, 存在一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 0$. 这与 $f''(x) \neq 0$ 矛盾, 所以 $\theta(x)$ 是唯一的.

(2) 因为 $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x\theta(x)) - f'(0)}{x\theta(x)}$, 且

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x\theta(x)) - f'(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{f''(0)}{2},\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

例 1.4 求使不等式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$ 对所有的自然数 n 都成立的最大的数 α 和最小的数 β .

解 已知不等式等价于

$$(n + \alpha) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 \leq (n + \beta) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

所以

$$\alpha \leq \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n \leq \beta.$$

令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$, $x \in [0, 1]$, 则

$$f'(x) = -\frac{1}{\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

再令 $g(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$, $x \in [0, 1]$, 则 $g(0) = 0$, 且

$$g'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x, \quad g'(0) = 0,$$

$$g''(x) = \frac{2\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} - 2 = \frac{2[\ln(1+x) - x]}{1+x} < 0,$$

故 $g'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上严格单调递减, 所以 $g'(x) < g'(0) = 0$. 同理, $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上也严格单调递减, 故 $g(x) < g(0) = 0$, 即 $(1+x)\ln^2(1+x) - x^2 < 0$, 从而 $f'(x) < 0$ ($0 < x \leq 1$), 因此 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上也严格单调递减.

令 $x = \frac{1}{n}$, 则 $\alpha \leq f(x) \leq \beta$,

$$\max \alpha = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \frac{1}{\ln 2} - 1,$$

$$\min \beta = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x + (1+x)\ln(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \ln(1+x) + 1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

因此,使不等式对所有的自然数 n 都成立的最大的数 α 为 $\frac{1}{\ln 2} - 1$,最小的数 β 为 $\frac{1}{2}$.

例 1.5 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导,且 $f(a)f(b) > 0, f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$,证明:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$,使得 $f'(\xi) = f(\xi)$.

证 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $f(a)f(b) > 0, f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$,故 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b) < 0$,则由零点定理知,至少存在点 $x_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ 及 $x_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$,使得 $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$.

作辅助函数 $F(x) = e^{-x}f(x)$,则 $F(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上可导,且 $F'(x) = e^{-x}[f'(x) - f(x)]$,因为 $F(x_1) = F(x_2) = 0$,由罗尔定理知,存在点 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$,使得 $F'(\xi) = 0$,从而 $f'(\xi) = f(\xi)$.

例 1.6 (1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内二阶可导,且 $|f''(x)| \geq m > 0$ (m 为常数),又 $f(a) = f(b) = 0$,证明: $\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \geq \frac{m}{8}(b-a)^2$.

(2) 设函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内二阶可导,且 $|g''(x)| \geq 1$,则在曲线段 $y = g(x)$ ($a \leq x \leq b$) 上,存在 3 个点 A, B, C ,使得 $S_{\triangle ABC} \geq \frac{(b-a)^3}{16}$.

证 (1) 因函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续,故存在 $x_0 \in [a, b]$,使

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = |f(x_0)|.$$

由于 $f(a) = f(b) = 0$,且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不是常数,故 $x_0 \neq a, x_0 \neq b$,即 $x_0 \in (a, b)$.从而, $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值,因此 $f'(x_0) = 0$.由泰勒公式, $\forall x \in (a, b)$,恒有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2,$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间,故

$$|f(x_0) - f(x)| \geq \frac{m}{2}(x - x_0)^2.$$

分别令 $x=a$ 和 $x=b$, 利用 $f(a)=f(b)=0$, 得

$$|f(x_0)| \geq \frac{m}{2}(x_0 - a)^2, \quad |f(x_0)| \geq \frac{m}{2}(b - x_0)^2,$$

从而, $|f(x_0)| \geq \max\left\{\frac{m}{2}(x_0 - a)^2, \frac{m}{2}(b - x_0)^2\right\} \geq \frac{m}{8}(b - a)^2$.

(2) 方法1 令

$$\varphi(x) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a) + g(a) - g(x),$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $|\varphi'(x)| = |g''(x)| \geq 1$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, 由(1)知, 存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得

$$|\varphi(x_0)| \geq \frac{1}{8}(b - a)^2.$$

令 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(a, g(a)), B(b, g(b)), C(x_0, g(x_0))$, 设联结 AB 的直线与 x 轴正向的夹角为 θ , 则点 C 到直线 AB 的距离

$$h = |\cos\theta| |\varphi(x_0)| \geq \frac{b - a}{AB} \cdot \frac{(b - a)^2}{8},$$

故 $\triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h \geq \frac{1}{16}(b - a)^3$.

方法2 令

$$G(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ g(a) & g(b) & g(x) \end{vmatrix}, \quad a \leq x \leq b,$$

则 $G(a) = G(b) = 0$, $|G''(x)| = \left| \frac{1}{2}(b - a)g''(x) \right| \geq \frac{b - a}{2}$, 由(1)知, 存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得

$$|G(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |G(x)| \geq \frac{b - a}{2} \cdot \frac{(b - a)^2}{8} = \frac{(b - a)^3}{16},$$

而 $|G(x_0)|$ 在几何上表示以 $A(a, g(a)), B(b, g(b)), C(x_0, g(x_0))$ 为顶点的三角形面积.

例 1.7 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上三阶可导, 且 $f(0) = -1, f(1) = 0, f'(0) = 0$, 证明: $\forall x \in (0, 1), \exists \xi \in (0, 1)$, 使 $f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{3!} f'''(\xi)$.

证 $\forall x \in (0, 1)$, 作函数 $g(t) = f(t) + 1 - t^2 - \frac{f(x) + 1 - x^2}{x^2(x-1)} t^2(t-1)$,

$t \in [0, 1]$. 因为函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上三阶可导, $f(0) = -1, f(1) = 0$, 故 $g(x) = g(0) = g(1) = 0$, 从而 $\exists \xi_1 \in (0, x), \xi_2 \in (x, 1)$, 使得 $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$, 且 $0 < \xi_1 < x < \xi_2 < 1$, 同时

$$g'(t) = f'(t) - 2t - \frac{f(x) + 1 - x^2}{x^2(x-1)}(3t^2 - 2t),$$

由 $f'(0) = 0$ 知, $g'(0) = 0$. 由 $g'(0) = g'(\xi_1) = 0$ 知, $\exists \eta_1 \in (0, \xi_1)$, 使得 $g''(\eta_1) = 0$; 由 $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$ 和 $\xi_1 < \xi_2$ 知, $\exists \eta_2 \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得 $g''(\eta_2) = 0$; 再由 $g''(\eta_1) = g''(\eta_2) = 0$ 知, $\exists \xi \in (\eta_1, \eta_2)$, 使得 $g'''(\xi) = 0$.

$$\text{又} \quad g''(t) = f''(t) - 2 - \frac{f(x) + 1 - x^2}{x^2(x-1)}(6t - 2),$$

$$g'''(t) = f'''(t) - 6 \frac{f(x) + 1 - x^2}{x^2(x-1)},$$

由 $g'''(\xi) = 0$, 得 $f'''(\xi) = 6 \frac{f(x) + 1 - x^2}{x^2(x-1)}$, 即 $f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{3!} f'''(\xi)$.

例 1.8 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且满足 $|f''(x)| \leq 1$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内取得最大值 $\frac{1}{4}$. 证明: $|f(0)| + |f(1)| \leq 1$.

证 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内点 x_0 处取得最大值 $\frac{1}{4}$, 则 $f'(x_0) = 0$. 由泰勒公式知

$$f(0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2, \quad 0 < \xi_1 < x_0,$$

$$f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2, \quad x_0 < \xi_2 < 1.$$

因为 $|f''(x)| \leq 1$, 所以

$$|f(0)| + |f(1)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[x_0^2 + (1-x_0)^2].$$

又当 $0 < x_0 < 1$ 时, $x_0^2 + (1-x_0)^2 = 2\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leq 1$, 所以, 结论成立.

例 1.9 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内二阶可导, 且 $f(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 证明: $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

证 依题意, 存在正常数 M_0, M_2 , 使得 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有

$$|f(x)| \leq M_0, \quad |f''(x)| \leq M_2.$$

由泰勒公式, 有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(\xi), \quad \text{其中 } \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x+1 \text{ 之间,}$$

整理得 $f'(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2}f''(\xi)$, 所以,

$$|f'(x)| \leq |f(x+1)| + |f(x)| + \frac{1}{2} |f''(\xi)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}.$$

所以, 函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

例 1.10 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内三阶可导, 且 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 证明: $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

证 依题意, 存在正常数 M_0, M_3 , 使得 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有

$$|f(x)| \leq M_0, \quad |f'''(x)| \leq M_3.$$

由泰勒公式, 有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{3!}f'''(\xi), \text{ 其中 } \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x+1 \text{ 之间,}$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{3!}f'''(\eta), \text{ 其中 } \eta \text{ 介于 } x \text{ 与 } x-1 \text{ 之间,}$$

上述两式相加, 整理得

$$f''(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) - \frac{1}{6}[f'''(\xi) - f'''(\eta)],$$

所以,

$$\begin{aligned} |f''(x)| &\leq |f(x+1)| + 2|f(x)| + |f(x-1)| + \frac{1}{6}[|f'''(\xi)| + |f'''(\eta)|] \\ &\leq 4M_0 + \frac{M_3}{3}. \end{aligned}$$

再由两式相减, 整理得

$$f'(x) = \frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)] - \frac{1}{6}[f'''(\xi) + f'''(\eta)],$$

所以,

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq \frac{1}{2}[|f(x+1)| + |f(x-1)|] + \frac{1}{6}[|f'''(\xi)| + |f'''(\eta)|] \\ &\leq M_0 + \frac{M_3}{3}. \end{aligned}$$

综上所述, 函数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

例 1.11 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有二阶导数, 并且

$$|f(x)| \leq M_0, \quad |f''(x)| \leq M_2, \quad -\infty < x < +\infty.$$

证明: $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$, $-\infty < x < +\infty$.

证 由泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2, \quad \xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间.}$$

任取 $h > 0$, 分别令 $x = x_0 - h$ 与 $x_0 + h$, 那么

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_1)}{2!}h^2, \quad x_0 - h < \xi_1 < x_0,$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2, \quad x_0 < \xi_2 < x_0 + h,$$

于是,由以上两式得

$$2f'(x_0)h = f(x_0 + h) - f(x_0 - h) + \left[\frac{f''(\xi_1)}{2!} - \frac{f''(\xi_2)}{2!} \right] h^2,$$

从而由题设条件知

$$|f'(x_0)|h \leq M_0 + \frac{M_2}{2}h^2.$$

如果 $M_2 = 0$, 则 $|f'(x_0)| \leq \frac{M_0}{h} (h > 0)$, 令 $h \rightarrow +\infty$, 得 $f'(x_0) = 0$.

如果 $M_2 > 0$, 则二次三项式 $M_2 h^2 - |f'(x_0)|h + 2M_0 \geq 0 (h > 0)$, 故其判别式

$$|f'(x_0)|^2 - 2M_0 M_2 \leq 0.$$

由此得不等式 $|f'(x_0)| \leq \sqrt{2M_0 M_2}$, 其中 x_0 为任意实数.

例 1.12 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 且 $f''(x) \neq 0$, 满足

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = 0.$$

证明: $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上恰好有两个零点.

证 因为 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内不能同号, 从而由闭区间上连续函数的性质知, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点.

假定 $x = \alpha$ 是 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内的唯一零点, 不妨设当 $0 < x < \alpha$ 时, $f(x) < 0$, 当 $\alpha < x < 1$ 时, $f(x) > 0$, 则 $\int_0^1 (x - \alpha) f(x) dx > 0$, 但是 $\int_0^1 (x - \alpha) f(x) dx = 0$, 矛盾. 所以, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有两个零点.

如果 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上至少有 3 个零点, 设为 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$, 则 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, 由罗尔定理知, 存在点 $a \in (x_1, x_2), b \in (x_2, x_3)$, 使 $f'(a) = 0, f'(b) = 0$. 对 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上应用罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, b) \subset (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = 0$, 这与 $f''(x) \neq 0$ 矛盾. 所以, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上恰好有两个零点.

例 1.13 设 $y = f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的正值连续函数.

(1) 试证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得在区间 $[0, \xi]$ 上以 $f(\xi)$ 为高的矩形面积, 等于在区间 $[\xi, 1]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积;

(2) 如果 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$, 证明: (1) 中的 ξ 是唯一的.

证 (1) 问题等价于证明方程

$$\int_x^1 f(t) dt - xf(x) = 0$$

在区间 $(0, 1)$ 内有实数根. 作辅助函数

$$F(x) = x \int_x^1 f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且

$$F'(x) = \int_x^1 f(t) dt - xf(x).$$

又因为 $F(0) = F(1) = 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $\xi f(\xi) = \int_{\xi}^1 f(x) dx$.

(2) 依条件知, $F''(x) = -2f(x) - xf'(x) < 0 (0 < x < 1)$, 所以 $F'(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上严格单调减少, 从而 $F'(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上只有唯一的零点.

例 1.14 设在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$ 单调减少, 证明: $f(x) \equiv 0$.

证 作辅助函数

$$F(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2,$$

则

$$F'(x) = 2f(x) \int_0^x f(t) dt = 2g(x)$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少. 因为, $F'(0) = 0$, 则当 $x \leq 0$ 时,

$$F'(x) \geq F'(0) = 0,$$

当 $x > 0$ 时,

$$F'(x) \leq F'(0) = 0.$$

所以, $F(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 内单调增加, 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少, 所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处取最大值. 从而, 对于任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有

$$F(x) \leq F(0) = 0,$$

但 $F(x) \geq 0$, 所以, $F(x) \equiv 0$. 于是,

$$\int_0^x f(t) dt \equiv 0,$$

所以, $f(x) \equiv 0$.