前　言

为推动高等学校数学课程的改革与建设，提高大学数学课程的教学水平，激励大学生学习数学的兴趣，发现和选拔数学创新人才，2009 年 10 月由中国数学会开始主办全国大学生数学竞赛。

根据《中国大学生数学竞赛大纲》，竞赛内容分为数学专业类竞赛题和非数学专业类竞赛题。其中，数学专业类竞赛内容为大学本科数学专业基础课的教学内容，即数学分析占 50%，高等代数占 35%，解析几何占 15%；非数学专业类竞赛内容为大学本科理工科专业高等数学课程的教学内容。

为方便各高校开展大数赛竞赛指导与学习，经过 2009－2010 年二次大数赛培训和参赛的实践，参照数学专业类大数赛竞赛大纲，组织五所高校联合编写了该教材。内容包括数学分析、高等代数和解析几何。本书的特色是：

一、依据中国大学生数学竞赛(数学专业类)大纲进行内容编排，其中数学分析分为 7 章，高等代数分为 9 章，解析几何分为 5 章。

二、每章均由六个模块组成，分别是：

① 知识脉络框图。其功能是：通过框图的形式勾勒出本章基本知识点走向和基本概念之间的关系，使学生能直观的了解本章各知识点和诸多内容间的相互联系及交错关系；

② 重点及难点。其功能是：用文字形式概括出本章的重点内容，并指出难点所在；

③ 基本知识要点。其功能是：指出教材中公认的重要知识点、公式、定理和命题，使学生了解到知识点的形成过程和怎样运用知识点解决问题的基本方法；

④ 基本例题解题点击。其功能是：精选难度中等、具有启发意义和拓展价值的例题，通过对例题的分析与解答，激发学生动手解决更一般、高一级难度问题的热情和冲动，为下个环节做好铺垫；

⑤ 扩展例题解题点击。其功能是：在前个环节的基础上，顺延并发展解题思路，提高解题难度，并通过对例题的分析与解答，提高学生的综合解题能力；

⑥ 训练题提示点评，其功能是：给学生提供训练平台，让学生自己动手尝试解决有一定难度的例题。为稳妥起见，我们在编写过程中给出了训练题的解题思路或提示。

以上编写结构对于快速疏理各部分知识，抓住要点，迅速进入解题学习与训练，会起到较好的引导作用。

三、在“基本例题解题点击”、“扩展例题解题点击”和“训练题提示点评”3 个环节中，精选了相关教材和参考资料的典型例题或训练题，每个环节有 10 个左右题数，这些题目是作者在多年教学实践中总结和精选的，题型全面，针对性强。同时融入了“2009 年全国大学生数学竞赛预、决赛试题”和“2010 年全国大学生数学竞赛预赛试题”。

本书是在广西师院任北上老师主持下，由广西 5 所高校 17 位专任教师合作完成。同时在此，特别感谢任北上老师从框架设计到合编整理所付出的辛劳；感谢在初稿和定稿环节提出宝贵

修正意见的李碧荣、黄倩霞、张更容、黄敬频、冯大河、胡源艳等老师。本书共三分篇，其中各章的作者和学校分布为

第一篇，数学分析部分：第 1 章（莫愿斌，广西民族大学），第 2 章（马忠军，桂林电子科大），第 3 章（韦程东，广西师范学院），第 4、6 章（张更容，广西大学），第 5 章（李碧荣，广西师范学院），第 7 章（冯大河，桂林电子科大）。

第二篇，高等代数部分：第 1、3 章（黄留佳，广西民族大学），第 2 章（苏华东，广西师范学院），第 4 章（韦华全，广西师范学院），第 5 章（郑项伟，广西大学），第 6 章（任北上，广西师范学院），第 7 章（胡源艳，广西玉林师院），第 8 章（凌征球，广西玉林师院），第 9 章（段雪峰，桂林电子科大）。

第三篇，解析几何部分：第 1 章（李光云，桂林电子科大），第 2 章（黄敬频，广西民族大学），第 3、5 章（黄倩霞，广西师范学院），第 4 章（郑项伟，广西大学）。

本书的编写过程中一直得到中国科学院郭柏灵院士和广西大学戴牧民教授、韦增欣教授的支持及鼓励，尤其是韦增欣教授还为本书的出版给予了鼎力支助，谨致以深切的感谢。本书还得到下列基金项目的支助：国家自然科学基金项目（10961007），广西教育厅科研项目（200911MS145），广西自然科学基金项目（0991102，2010GXNSFB013048），新世纪广西高等教育教学改革工程“十一五”第四批立项项目。在偏写过程中我们也参阅了部分中外代数书籍和教材，特将其罗列在本书中以表我们向编者致谢。

编写本书的教师都长期从事相关课程的教学与考研辅导以及近期的大数赛培训的工作，有丰富的教学经验。书中习题均经作者精心选择和设计，有较好的代表性和示范性，对指导大学生数学竞赛、报考硕士研究生入学考试复习、学生平日的相关课程复习以及教师教学等都有十分有益的参考价值。由于编者水平有限，加之时间仓促，错误在所难免，不妥之处还请各位专家批评指正。

作者 2010 年 12 月

序

自1993年开展全国大学生数学建模竞赛以来，已经有十七年了。竞赛的实践证明，它在激励大学生的数学兴趣和提高大学生的数学素质两方面都起到了巨大的作用。有鉴于此，自2009年，中国数学会又在全国开展了大学生数学竞赛一项新的赛事。两年来的竞赛表明，这项赛事获得了众多高等院校的积极响应，对促进高等学校数学课程改革与课程建设，提高教学水平，激发学生兴趣，发现和选拔数学创新人才等方面也都取得了显著的成效。

为了让有志于参赛的同学和组织辅导数学竞赛的高校老师们能有一份合适的培训，指导性参考读物，我区一些高校的数学教师串联组织起来，根据《中国大学生数学竞赛大纲》共同编写了这本书籍。参加编写的老师们大多数从事《高等数学》、《数学分析》和《高等代数与空间解析几何》课程教学多年，具有相当高的数学素养，丰富的教学经验，同时又是处在数学竞赛培训、辅导工作第一线，不少人都先后担任过本校的数学课程考研，数学竞赛等教练培训，教学辅导等工作，对竞赛的组织辅导具有亲身的实际体验。所以我相信他们编出的这本书的水平，相信能较好地符合当前高等数学竞赛的实际情况，对我区的竞赛起到良好的促进作用。

全国大学生数学竞赛这项赛事开展时间不长，编者们又都是在繁忙的日常教学工作之余来编写这本书的，所以难免有仓促之感。但这本书的编辑出版，无疑是及时的和有积极意义的，至于其中或许有些不尽人意之处，就有待今后更多的经验积累和听取广大读者的意见建议来进一步完善了。

戴牧民

2011年1月8日

目　　录

第一篇　数学分析

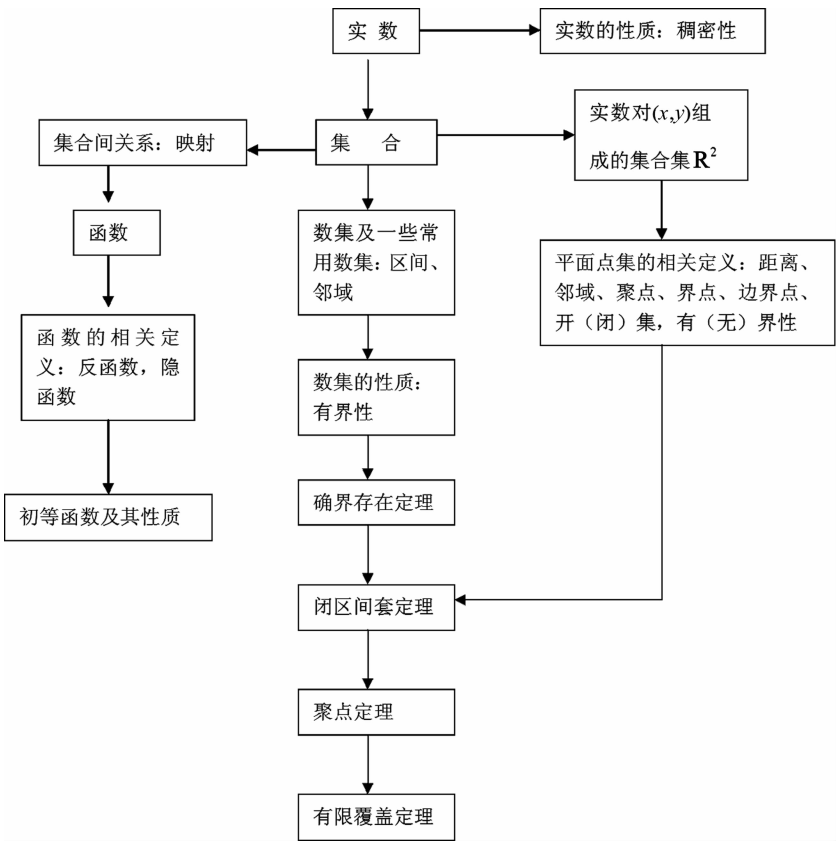
第二篇　高等代数

第三篇　解析几何

第一篇　数学分析

第一章　集合与函数

一、本章知识脉络框图



二、本章重点及难点

数学是分析处理问题的系统方法论学科. 对事物分析，量化是第一步；数是表示量的符号. 随

着科学的发展,数的内涵与表示得到不断地发展;同时随着数的内涵与表示的发展,分析解决问题的方法也得到了质的发展.数从自然数→整数→有理数→实数→复数的发展过程,也反映了社会的进步与解决问题能力的提升.因此,对数以及一些数组成的集合进行研究是数学的基础.

本章在中学数学的基础上主要讨论了实数的性质、数集的性质,实数对组成的二维空间 $\mathbf{R}^2$ 的一些集合的性质;同时还通过两个集合之间的映射关系引进函数的定义,并且讨论与函数相关的其他一些定义.

本章的难点主要有以下两个方面:

- 函数的概念、隐函数、一些简单函数的反函数存在性的判定与函数反函数的求法.
- 实数集上的确界存在定理、闭区间套定理、聚点定理、有限覆盖定理的证明与应用;熟练运用这些定理证明闭区间上连续函数的性质.

三、本章的基本知识要点

(一)实数及其性质

(1)实数集 $\mathbf{R}$ 具有稠密性,即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数,也有无理数.

(2)实数集 $\mathbf{R}$ 具有阿基米德性,即对任何 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $b>a>0$,则存在正整数 n,使得 $na>b$.

(二)实数集 $\mathbf{R}$ 的性质

(1)a,b 是实数,实数集合上的 $\{x|a<x<b\}\triangleq(a,b)$、$\{x|a\leqslant x<b\}\triangleq[a,b)$、$\{x|a<x\leqslant b\}\triangleq(a,b]$、$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}\triangleq[a,b]$ 称为有限区间;而 $\{x|x<a\}\triangleq(-\infty,a)$、$\{x|x\leqslant a\}\triangleq(-\infty,a]$、$\{x|x<a\}\triangleq(-\infty,a)$、$\{x|x\geqslant a\}\triangleq[a,+\infty)$、$\{x|-\infty<x<+\infty\}\triangleq(-\infty,+\infty)$ 称为无限区间,有限区间与无限区间统称为区间.

(2)设 $a\in\mathbf{R}$,$\delta>0$,称集合 $\{x||x-a|<\delta\}\triangleq U(a;\delta)$ 为 a 的 δ 邻域,称集合 $\{x|0<|x-a|<\delta\}\triangleq U^{o}(a;\delta)$ 为 a 的空心 δ 邻域;称 $[a,a+\delta)\triangleq U_{+}(a)$ 为 a 的 δ 右邻域,称 $(a-\delta,a]\triangleq U_{-}(a)$ 为 a 的左 δ 邻域;称 $(a,a+\delta)\triangleq U_{+}^{0}(a)$ 为 a 的右空心邻域,称 $(a-\delta,a)\triangleq U_{-}^{0}(a)$ 为 a 的左空心邻域.

(3)M 是正数,$\{x||x|>M\}\triangleq U(\infty)$,称为 ∞ 邻域,$\{x|x>M\}\triangleq U(+\infty)$ 称为 $+\infty$ 邻域,$\{x|x<-M\}\triangleq U(-\infty)$ 称为 $-\infty$ 邻域.

(4)设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集,若数 η 满足:①对一切 $x\in S$,有 $x\leqslant\eta$,即 η 是上界;②对任何 $\alpha<\eta$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>\alpha$,即 η 又是 S 的最小上界.则称数 η 为 S 的上确界,记作 $\eta=\sup S$.

(5)设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集,若数 ξ 满足:①对一切 $x\in S$,有 $x\geqslant\xi$,即 ξ 是下界;②对任何 $\beta>\xi$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0<\beta$,即 ξ 又是 S 的最大下界.则称数 ξ 为 S 的下确界,记作 $\xi=\inf S$.

(6)确界原理:设 S 为非空数集,若 S 有上界,则 S 必有上确界;若 S 有下界,则 S 必有下确界.

(7)区间套定理:若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套,则在存在唯一的实数 $\xi\in[a_n,b_n]$,$n=1,2,3,\cdots$,即 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$,$n=1,2,3,\cdots$.

(8)区间套定理的推论:若 $\xi\in[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$ 是区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 所确定的,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得 $n>N$ 时有 $[a_n,b_n]\subset U(\xi;\varepsilon)$.

(9)(维尔斯特拉斯(Weierstrass)聚点定理):实轴上的任一有界无限点集 S 至少有一个聚点.

(10)(海涅-波雷尔(Heine-Borel)有限覆盖定理)设 H 为闭区间$[a,b]$的一个(无限)开覆盖，则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖$[a,b]$.

(三)二维平面 $\mathbf{R}^2$ 的性质

(1)全平面上的点所组成的点集$\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<x<+\infty\}\triangleq\mathbf{R}^2$；坐标平面上的满足条件 P 的点的集合 $E=\{(x,y)\mid(x,y)$满足条件 $P\}$，称为平面点集.

(2)平面上的点 $A(x_0,y_0)$，平面点集$\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$称为点 A 的 δ 邻域，记为$U(A)$；平面点集$\{(x,y)\mid 0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$称为点 A 的空心邻域. 记为 $U^0(A)$.

(3)对于平面点集 E，若存在点 A 的某邻域$U(A)\subset E$，则称点 A 是 E 的内点；若点 A 的任何空心邻域 $U^0(A)$内都含有 E 中的点，则称 A 是 E 的聚点；若 E 的每一个点都是内点，则称 E 为开集；若 E 的所有聚点都属于 E，则称 E 是闭集；若 E 中的任意两点都可以用一条完全含于 E 的有限折线相连接，则称 E 具有连通性；连通的开集叫开域；开域连同其边界叫闭域.

(4)(闭域套定理)：设$\{D_n\}$是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭域列，它满足：① $D_n\supset D_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，② $\mathrm{d}_n=\mathrm{d}(D_n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{d}_n=0$，则存在唯一的点 $P_0\in D_n$，$n=1,2,\cdots$.

(5)(聚点定理)设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 为有界无限点集，则 E 在 $\mathbf{R}^2$ 中至少有一个聚点.

(6)(有限覆盖定理)设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为一有界闭域，$\{\Delta_\alpha\}$为一开域族，它覆盖了 D(即 $D\subset\bigcup\limits_{\alpha}\Delta_\alpha$)，则在$\{\Delta_\alpha\}$中必存在有限个开域 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$，它们同样覆盖 D(即 $D\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Delta_i$).

(四)集合间的关系：映射、函数

数学是为解决实际问题提供一些系统方法的学科，它通过量化的数来表示事物，通过数的变化来反映事物的变化. 在不同的时间、不同的地点所表示物体的量的不同，实质就是建立了表示物体的量与时间、地点之间的一个映射，当一个映射满足一定的条件时，就是函数. 因此，函数是数学中最重要的一个概念，同时对函数性质的研究是数学分析处理问题的基础.

(1)给定两个实数集 D 和 M，若有对应法则 f，使得 $\forall x\in D$，都存在唯一的 $y\in M$ 与之对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，记作 $f:D\to M$，通常记为 $y=f(x)$.

注：只要讲清了对应法则，而且满足对于第一个集合上的每一个元素，在第二个集合都有唯一的元素和它对应，则这个法则就建立了从第一个集合到第二个集合的函数.

例如，符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(2)设有两个函数 $y=f(u),u\in D$；$u=g(x),x\in E$，令 $E^*=\{x\mid g(x)\in D\}\cap E$，若 $E^*\neq\varphi$，则对每一个 $x\in E^*$，可通过函数 g 对应 D 内唯一的一个值 u，而 u 又通过函数 f 对应唯一的一个值 y. 这就确定了一个定义在 E^* 上的函数，称为函数 f 与 g 的复合函数. 记作 $y=f(g(x))$.

注：两个函数能否复合的充分必要条件就是 $E^*\neq\varphi$.

(3)以形式 $y=f(x),x\in D$ 表示函数的，称为显函数；而以方程的形式 $f(x,y)=0$ 表示一个函数的，称为隐函数. 例如 $y^3-2x^2=0,x\in[-1,1]$就是一个隐函数.

(4)设函数 $y=f(x),x\in D$ 满足：对于值域 $f(D)$中的每一个值 y，D 中有且只有一个值 x 使得 $f(x)=y$. 则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$上的函数，称这个函数为 f 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y),y\in f(D)$. 通常改记做 $y=f^{-1}(x),x\in f(D)$.

注：函数 $y=f(x),x\in D$ 存在反函数$\Leftrightarrow f$ 是 D 与 $f(D)$之间的一一映射.

(5)常量函数 $y=c$、幂函数 $y=x^\alpha$、指数函数 $y=a^x$、对数函数 $y=\log_a x$、三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$、反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}x$ 统称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数，统称为初等函数. 并不是每个函数都是初等函数，例如：$y=x^x$就不是初等函数.

(6)设 f 为定义在 D 上的函数. ①若$\exists M>0$，使得对$\forall x\in D$ 有$|f(x)|\leqslant M$，则称 f 为 D 上的有界函数；②若对$\forall x_1,x_2\in D,x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 f 为 D 上的增(减)函数；③若 D 为对称于原点的数集，且对$\forall x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$(或$f(-x)=f(x)$)，则称 f 为D 上的奇(偶)函数；④若存在 $\sigma>0$，使得对一切 $x\in D$ 都有 $f(x\pm\sigma)=f(x)$，则称 f 为周期函数.

(7)设平面点集 $D\subset\mathbf{R}^2$，若按照某对应法则 f，D 中每一点 $P(x,y)$都有唯一确定的实数 z 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的二元函数. 记作 $z=f(x,y),(x,y)\in D$.

四、基本例题解题点击

【例 1】设 x，y 为实数，$x<y$. 证明：存在有理数 r 满足 $x<r<y$；存在无理数 α 满足 $x<\alpha<y$.【提示及点评】考察实数的稠密性，利用不足近似与过剩近似来证明.

【证明】由于 $x<y$，故存在非负整数 n，使得$\overline{x_n}<y_n$(其中$\overline{x_n}$，y_n分别为 x 的 n 位过剩近似值与 y 的 n 位不足近似值). 令 $r=\dfrac{1}{2}(\overline{x_n}+y_n)$，则 r 为有理数，且

$$x\leqslant\overline{x_n}<r<y_n\leqslant y \text{ 即 } x<r<y.$$

设 η 是任意一无理数，由 $x<y$，则 $x-\eta<y-\eta$，根据上面可知，存在有理数 r，使得 $x-\eta<r<y-\eta$，从而 $x<r+\eta<y$，令 $\alpha=r+\eta$，则 $x<\alpha<y$，且 α 是无理数.

【知识扩展提示】稠密性是实数的重要性质，证明有关稠密性时，经常利用不足近似值与过剩近似值来证明，在证明过程中两边同时加上或减去一个数是常用的技巧之一.

【例 2】设 S 是非空数集，定义 $S^-=\{x|-x\in S\}$. 证明：$\inf S^-=-\sup S$.

【提示及点评】证明集合的上下确界的关键点在于抓住上下确界的定义.

【证明】$\forall x\in S^-$，则$-x\in S$，故$-x\leqslant\sup S$，从而 $x\geqslant-\sup S$，即$-\sup S$ 是 S^- 的下界. 又对$\forall\varepsilon>0$，由于 $\sup S$ 是 S 的上确界，故存在$-x\in S$，使得$-x>\sup S-\varepsilon$，从而 $x<-\sup S+\varepsilon$，而 $x\in S^-$，因此$-\sup S$ 是 S^-最大下界，即 $\inf S^-=-\sup S$.

【例 3】设 $a>1$，x 为有理数. 证明：$a^x=\sup\{a^r|r$ 为有理数，$r<x\}$.

【证明】由于 $a>1$，因此对于任意的 $r<x$，都有 $a^r<a^x$，从而 a^x是上界. 对于$\forall b<a^x$，不妨设 $b>0$，则由 $b<a^x$得 $a^{\log_a b}<a^x$，又 $a>1$，于是得 $\log_a b<x$，根据实数稠密性，存在有理数 α，使得 $\log_a b<\alpha<x$，因此 $b<a^\alpha$，而显然 $a^\alpha\in\{a^r|r$ 为有理数，且 $r<x\}$，因此，a^x是最小的上界. 于是得到 $a^x=\sup\{a^r|r$ 为有理数，$r<x\}$.

【例 4】判断(1)函数 $y=\dfrac{1}{1+u}$，$u\neq-1$ 与函数 $u=2+x^2$，$x\in\mathbf{R}$ 是否可以复合；(2)函数 $y=\arcsin u$，$-1\leqslant u\leqslant1$ 与函数 $u=2+x^2$，$x\in\mathbf{R}$ 是否可以复合.

【提示及点评】判断两个函数 $y=f(u)$，$u\in D$；$u=g(x)$，$x\in E$ 是否可以复合，关键就看$E^*=\{x|g(x)\in D\}\cap E$ 是否为空集. 是空集则不能复合，不是空集则可以复合.

【解】(1)由于$\{x|2+x^2\neq -1\}\cap\mathbf{R}\neq\varphi$,因此它们可以复合.且复合得到

$$y=\frac{1}{3+x^2},x\in\mathbf{R}.$$

(2) 由于$\{x|-1\leqslant 2+x^2\leqslant 1\}\cap\mathbf{R}=\varphi$,因此它们不能复合.

【例 5】在什么条件下,函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$的反函数就是它本身?

【提示及点评】反函数存在的充分必要条件是该函数是一一对应.对这种类型的题目,首先要保证反函数存在,再在存在的前提下把反函数求出来.

【解】(1)函数要存在反函数,则对于定义内的任意两个值 $x_1\neq x_2$,必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,从而得$\frac{ax_1+b}{cx_1+d}\neq\frac{ax_2+b}{cx_2+d}$,即

$$acx_1x_2+adx_1+bcx_2+bd\neq acx_1x_2+bcx_1+adx_2+bd,$$

$$(ad-bc)(x_1-x_2)\neq 0,$$

从而 $ad-bc\neq 0$,所以函数存在反函数的条件是 $ad-bc\neq 0$.

(2) 当 $ad-bc\neq 0$ 时,由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$解得 $x=\frac{b-dy}{cy-a}$,因此反函数为 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$.根据两个函数相等的条件(定义域相同,对应法则相同)可知

当 $c\neq 0$ 时,原函数的定义域为 $x\neq -\frac{d}{c}$,反函数的定义域为 $x\neq\frac{a}{c}$,因此得 $a=-d$,此时,两个函数的表达式也相同,因此这时原函数与反函数相同.

当 $c=0$ 时,由反函数存在条件 $ad-bc\neq 0$,则 $ad\neq 0$,这时原函数为 $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$,反函数为 $y=\frac{d}{a}x-\frac{b}{a}$,定义域都是 $\mathbf{R}$,因此,有$\frac{a}{d}=\frac{d}{a}$,$\frac{b}{d}=-\frac{b}{a}$,从而得 $a=-d$ 或 $a=d,b=0$.

综上所述,函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$的反函数就是它本身的条件是:

(1)$ad-bc\neq 0,c\neq 0,a=-d$ 或 (2)$ad-bc\neq 0,c=0,a=-d$ 或 (3)$ad-bc\neq 0,a=d,b=c=0$.

【例 6】判断函数 $y=x^3$,$-1<x<2$ 的奇偶性.

【提示及点评】函数是奇函数或偶函数,必须具备两个条件:定义域关于原点对称,$f(-x)=-f(x)$或 $f(-x)=f(x)$.定义域关于原点对称这一条件很容易被忽略.

【解】由于该函数的定义域不关于原点对称,因此它没有奇偶性.

【例 7】设$\{(a_n,b_n)\}$是一个严格开区间套,即满足

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1,$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.证明:存在唯一的一点 ξ,使得 $a_n<\xi<b_n$,$n=1,2,\cdots$.

【提示及点评】这个题目表明对于严格的开区间套也有类似于闭区间套定理的结论,但是要求一定要是严格开区间套,不是严格的就不一定成立;首先把它看作闭区间套,利用闭区间套定理证明,再证明所存在的点满足题目要求.

【证明】考虑闭区间序列$\{[a_n,b_n]\}$,由题中条件可知它是闭区间套,因此存在唯一的点 ξ,满足 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$,$n=1,2,\cdots$.又 $a_{n+1}\leqslant\xi\leqslant b_{n+1}$,$n=1,2,\cdots$,而 $a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n$,因此 $a_n<\xi<b_n$,$n=1,2,\cdots$.

【例 8】试举例说明:在有理数集内,确界原理、单调有界定理、聚点定理和柯西收敛准则一般

不能成立.

【提示及点评】实数的完备性定理,只在实数域内才能成立,在有理数域一般是不成立的.本题只要做一个有理数列,而它的极限却是无理数就可以说明问题.

【解】作有理数列 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,则它是递增有界的,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.它的上确界为 e,因此在有理数集内无上确界,也没有极限.该数列有唯一一个聚点 e,因此在有理数集上没有聚点.该数列显然满足柯西收敛准则,但在有理数集内却没有极限,因此在有理数集内柯西准则不成立.

【例 9】设 $H=\{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})\,|\,n=1,2,\cdots\}$.问(1) H 能否覆盖(0,1)?(2) 能否从 H 中选出有限个开区间覆盖(a)$(0,\frac{1}{2})$;(b)$(\frac{1}{100},1)$?

【提示及点评】这是关于覆盖的问题,有限覆盖定理是指一个开覆盖 H,它覆盖一个闭区间,则可以从这选出有限个出来覆盖这个闭区间,但现在不是一个闭区间,因此,结论未必成立.

【证明】(1) H 可以覆盖(0,1),因为对于任意的 $r\in(0,1)$,有 $\frac{1}{r}>1$,取 $n=\left[\frac{1}{r}\right]$;则当 $n=1$,必有 $\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}<r<\frac{1}{n}=1$,这时 $r\in(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})$;当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}<r\leqslant\frac{1}{n}<\frac{1}{n-1}$,这时 $r\in(\frac{1}{(n-1)+2},\frac{1}{n-1})$.因此 H 能覆盖(0,1).

(2) 不能选出有限个开区间覆盖$(0,\frac{1}{2})$.设 $H_k=\{(\frac{1}{n_m+2},\frac{1}{n_m})\,|\,m=1,2,\cdots k\}$能覆盖$(0,\frac{1}{2})$,令 $p=\max\{n_1+2,n_2+2,\cdots,n_k+2\}$,显然$(0,\frac{1}{P})$上的点不属于 H_k 中的任何一个区间,因此不能从 H 中选出有限个开区间覆盖$(0,\frac{1}{2})$.

可以选出有限个开区间覆盖$(\frac{1}{100},1)$,首先选一个覆盖端点 1 附近的,选取的区间为:$(\frac{1}{1+2},1)$.考虑闭区间$[\frac{1}{100},\frac{1}{2}]$,则 H 中可以选出有限个覆盖$[\frac{1}{100},\frac{1}{2}]$,这有限个再加上$(\frac{1}{1+2},1)$,则它们能覆盖$(\frac{1}{100},1)$.

【例 10】设 I 为有限区间,证明:若 f 在 I 上一致连续,则 f 在 I 上有界.举例说明此结论当 I 为无限区间时未必成立.

【提示及点评】利用实数的完备性证明函数的性质.

【证明】设区间 I 的左、右端点为 a、b,不妨设区间是开区间.由 $f(x)$在 I 上一致连续,所以对于 $\varepsilon=1$,存在 $0<\delta<\frac{b-a}{2}$,使得当 $x',x''\in I$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时,就有 $|f(x')-f(x'')|<1$.考虑闭区间$[a+\frac{\delta}{2},b-\frac{\delta}{2}]$,则 $f(x)$在该闭区间上亦连续,从而有界,设 $|f(x)|\leqslant M_1$,$x\in[a+\frac{\delta}{2},b-\frac{\delta}{2}]$.

对于任意 $x\in(a,a+\frac{\delta}{2}]$,由于 $|x-(a+\frac{\delta}{2})|<\frac{\delta}{2}<\delta$,从而 $|f(x)-f(a+\frac{\delta}{2})|<1$,$|f(x)|$

$<|f(a+\frac{\delta}{2})|+1\leqslant M_1+1$.

同理可以证明 $x\in[b-\frac{\delta}{2},b)$，有 $|f(x)|<|f(a+\frac{\delta}{2})|+1\leqslant M_1+1$.

因此，任意的 $x\in(a,b)$ 都有 $|f(x)|\leqslant M_1+1$，即函数有界.

若 I 为无限区间时，则结论未必成立，例如函数 $y=2x, x\in\mathbf{R}$ 是一致连续，但不是有界函数.

【例 11】试用有限覆盖定理证明根的存在定理.

【提示及点评】本题关键是构造一个开覆盖.

【证明】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，证明方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根. 假设方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内没有根，则对任意的 $x\in(a,b)$，都有 $f(x)\neq 0$，根据连续的局部保号性，因此存在一个邻域 $U(x,\delta_x)$，使得函数在该邻域内的函数值同号.

构造开覆盖 $H=\{U(x,\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$，则 H 覆盖 $[a,b]$，由有限覆盖定理得，存在有限个邻域 $U(x_1,\delta_{x_1}),U(x_2,\delta_{x_2}),\cdots,U(x_n,\delta_{x_n})$ 覆盖 $[a,b]$，不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，则 $U(x_j,\delta_{x_j})\cap U(x_{j+1},\delta_{x_{j+1}})\neq\varphi, j=1,2,\cdots,n-1$，而 $f(x)$ 在每个邻域内都不变号，因此推出 $f(x)$ 在 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}U(x_i,\delta_{x_i})$ 不变号，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，因此 $f(a),f(b)$ 同号. 矛盾. 从而 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上至少有一个根.

【知识扩展提示】实数的完备性定理不仅可以用来证明连续函数的一些性质，在其他的证明方面也经常用到，所以对这些定理必须做到能灵活应用.

五、扩展例题解题点击

【例 1】下列各对函数是同一个函数的是(　　)(浙江理工大学 2009 年研究生入学试题).

(A) $f(x)=\frac{\ln x}{2}, g(x)=\ln(\sqrt{x})$；　　(B) $f(x)=x, g(x)=\sin(\arcsin x)$；

(C) $f(x)=\frac{1}{x-1}, g(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$；　　(D) $f(x)=1, g(x)=x^0$.

【提示及点评】利用两个函数相同的条件：对应法则相同，定义域相同.

【解】由答案是(A)，其他三个答案的两个函数的定义域都不相同.

【例 2】若数 M 是非空数集 S 的上界，但不是 S 的上确界，则下列结论中错误的是(　　).

(A)任何大于 M 的数都是 S 的上界；　　(B)任何小于 M 的数都不是 S 的上界；

(C)数集 S 必有上确界；　　(D) $M\geqslant\sup\{S\}$.

【提示及点评】利用上下确界的定义.

【解】根据上确界是：(1)是上界；(2)是最小的上界，可知答案(B)是错的.

【例 3】若 F_1,F_2 为闭集，则(　　).

(A) $F_1\cap F_2$ 为闭集，$F_1\cup F_2$ 不一定是闭集；　　(B) $F_1\cap F_2$，$F_1\cup F_2$ 都为闭集；

(C) $F_1\cup F_2$ 为闭集，$F_1\cap F_2$ 不一定是闭集；　　(D) $F_1\cap F_2$，$F_1\cup F_2$ 都不一定为闭集.

【提示及点评】利用闭集的定义.

【解】如果一个点集的所有聚点都属于它，则这个点集称为闭集，答案 B 正确.

【例 4】设 f,g 为 D 上的有界函数，证明：(1) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\geqslant\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)$；

(2) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\sup\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

【提示及点评】利用上下确界的定义.

【证明】对任意 $x\in D$ 有 $\inf\limits_{x\in D}f(x)\leqslant f(x)$，$\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant g(x)$，因此

$\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant f(x)+g(x)$，从而 $\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)$ 是 $f(x)+g(x)$ 在 D 上的一个下界，因此 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\geqslant\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)$.

同理可以证明(2).

【知识扩展提示】利用上下确界的运算性质，对证明其它问题将带来很大的帮助.

【例 5】设 f,g 为 D 上的有界函数. 证明：(1) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$；

(2) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\geqslant\sup\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)$.

【提示及点评】直接利用上面的例 4 可以很简洁地证明.

【证明】由于 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\inf\limits_{x\in D}-g(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)-g(x)\}$，得

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf_{x\in D}f(x)-\inf_{x\in D}-g(x),$$

即 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

同理可以证明(2).

【例 6】设 f,g 为 D 上的非负有界函数，证明：(1) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\geqslant\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)$；

(2) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\leqslant\sup\limits_{x\in D}f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

【提示及点评】利用上下确界乘法的运算法则.

【证明】$\inf\limits_{x\in D}f(x)\leqslant f(x)$，$\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant g(x)$，而且都非负，因此有

$$\inf_{x\in D}f(x)\cdot\inf_{x\in D}g(x)\leqslant f(x)\cdot g(x),$$

从而 $\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)$ 是 $f(x)\cdot g(x)$ 在 D 上的一个下界，故 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\geqslant\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)$.

同理可以证明(2).

【例 7】求函数 $y=x+[x]$ 的反函数.

【提示及点评】反函数的求法必须通过原函数把自变量解出来.

【解】先把函数写成比较容易解出自变量的形式，当 $k\leqslant x<k+1,k\in\mathbf{Z}$ 时 $y=x+[x]=x+k$，$2k\leqslant y<2k+1,k\in\mathbf{Z}$，由此解出 $x=y-k$，从而反函数为 $y=x-k,2k\leqslant x<2k+1,k\in Z$.

【知识扩展提示】求反函数时，先通过原函数的值域把反函数的定义域求出来.

【例 8】证明：不连续函数 $y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$ 的反函数是连续函数.

【提示及点评】关键是求反函数.

【证明】由 $y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$ 得

$$y=\begin{cases}1+x^2, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -(1+x^2), & x<0.\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1,\\ 0, & y=0,\\ -\sqrt{-y-1}, & y<-1.\end{cases}$$

$y=0$ 定义域中的孤立点，反函数除了孤立点外，其它点都连续.

【知识扩展提示】对于分段函数，需要一段一段地把它的反函数求出来.

【例 9】证明：对于 x 和 y 的一切实数值满足方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

的唯一的连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是齐次线性函数 $f(x)=ax$,其中 $a=f(1)$.

【提示及点评】利用函数的性质.

【证明】先证明对任意有理数 c 均成立 $f(cx)=cf(x)$,$-\infty<x<\infty$.

设 m 与 n 是正整数,则有

$$\begin{aligned}f(mx)&=f(x+(m-1)x)=f(x)+f((m-1)x)\\&=f(x)+f(x)+f((m-2)x)\\&=\cdots=\underbrace{f(x)+f(x)+\cdots+f(x)}_{m个}=mf(x)\end{aligned}$$

由 $f(x)=f(n\cdot\frac{x}{n})=nf(\frac{x}{n})$,得 $f(\frac{x}{n})=\frac{1}{n}f(x)$, 因此 $f(\frac{m}{n}x)=mf(\frac{x}{n})=\frac{m}{n}f(x)$.

又 $f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)$, 因此 $f(0)=0$.

由 $0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$,得 $f(-x)=-f(x)$.

从而有 $f(-\frac{m}{n}x)=-f(\frac{m}{n}x)=-\frac{m}{n}f(x)$.

综上所述,对任意的有理数 c,成立 $f(cx)=cf(x)$,$-\infty<x<\infty$.

下面证明对无理数 c,也成立 $f(cx)=cf(x)$,$-\infty<x<\infty$.

对于任意的无理数 c,由实数稠密性可知,存在一有理数列 $\{c_n\}$,$c_n\to c(n\to\infty)$. 于是有 $f(c_nx)=c_nf(x)$, 由于函数连续,两边取极限得 $f(cx)=cf(x)$.

综合以上两点得到,对于任意的实数 c, 成立 $f(cx)=cf(x)$,$-\infty<x<\infty$. 从而 $f(x)=f(x\cdot1)=xf(1)=ax$.

【知识扩展提示】在证明过程中要充分利用函数的连续性和实数的稠密性等性质.

【例 10】证明:对 x 和 y 的一切值满足方程

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是指数函数 $f(x)=a^x$,其中 $a=f(1)>0$.

【证明】先证明对一切的 $x\in\mathbf{R}$,均有 $f(x)>0$. 由于 $f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=[f(\frac{x}{2})]^2$,因此,$f(x)\geqslant0$. 又由于 $f(x)$ 不恒等于 0,因此存在 x_0 使得 $f(x_0)>0$. 而 $f(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0)f(0)$,因此 $f(0)=1$. 又由于 $1=f(0)=f(x+(-x))=f(x)f(-x)$,因此 $f(x)\neq0$. 从而,对于任意的 x,都有 $f(x)>0$.

接着证明对于任意的有理数 c,有 $f(cx)=[f(x)]^c$,$-\infty<x<\infty$.

对于任意的正整数 m, n, 有

$f(mx)=f((m-1)x+x)=f((m-1)x)f(x)=f((m-2)x)f(x)f(x)=\cdots=[f(x)]^m$

由 $f(x)=f(n\cdot\frac{x}{n})=[f(\frac{x}{n})]^n$,得 $f(\frac{x}{n})=[f(x)]^{\frac{1}{n}}$. 从而 $f(\frac{m}{n}x)=[f(\frac{x}{n})]^m=[f(x)]^{\frac{m}{n}}$.

因此,对于任意的有理数 c,有 $f(cx)=[f(x)]^c$,$-\infty<x<\infty$.

由于 $f(x)$ 是连续函数,因此对于任意的实数 c,亦有 $f(cx)=[f(x)]^c$,$-\infty<x<\infty$.

从而 $f(x)=f(x\cdot1)=[f(1)]^x=a^x$,$a=f(1)>0$.

【例 11】用有限覆盖定理证明聚点定理.

【证明】设 S 是有界无限点集,则存在 a, b,使得 $S\subset[a,b]$. 假设 $[a,b]$ 中不含有 S 的聚点. 则对 $\forall x\in[a,b]$,都存在邻域 $U(x,\delta_x)$,使得该邻域内只包含有 S 中的有限个点. 考虑开覆盖

$H=\{U(x,\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$，显然 H 覆盖了 $[a,b]$. 由有限覆盖定理得，存在有限个开区间 $U(x_1,\delta_{x_1}),U(x_2,\delta_{x_2}),\cdots,U(x_n,\delta_{x_n})$覆盖$[a,b]$，从而也覆盖了 S，而由于每一个只含有 S 中的有限个点. 因此，S 是有限点集. 这与题设矛盾. 从而 S 存在聚点.

六、本章训练题提示点评

【训练题 1】研究 Dirichlet 函数基本特性(单调性、有界性、周期性).

【训练题 2】设 $f(x)$在$[-a,\ a]$上有定义，证明 $f(x)$在$[-a,\ a]$上可表为奇函数与偶函数之和.

【训练题 3】证明：

(1)$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$；

(2)$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}$.

【训练题 4】设 f,g 为$(a,\ b)$上的单调增加函数，证明 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$和 $\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$也是$(a,\ b)$上单调增加函数.

【训练题 5】设 E 为一实数集合，函数 $f(x)$在 E 上一致连续，$\overline{E}$为 E 的闭包，证明：在$\overline{E}$上存在唯一的连续函数 $\varphi(x)$，使得对任意的 $x\in E$，有 $\varphi(x)=f(x)$.

【提示及点评】先构造 $\varphi(x)$，再证明它满足题设的条件.

【训练题 6】设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(0)=f(1)$，设 n 为一自然数，证明存在 $x\in[0,1]$，使得 $f(x)=f(x+\frac{1}{n})$.

【提示及点评】作辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$，则

$$f(0)-f(1)=F(0)+F(\frac{1}{n})+F(1-\frac{1}{n}),$$

然后利用根的存在性定理来证明.

【训练题 7】(天津工业大学 2005 年研究生入学试题) 证明：闭区间$[a,\ b]$到$[a,\ b]$上的连续函 $f(x)$ 必存在不动点(即存在 $x\in[a,b]$，使得 $f(x)=x$).

【提示及点评】作辅助函数 $F(x)=x-f(x)$，利用根的存在性定理证明.

【训练题 8】(中国科学技术大学 1997 年硕士研究生入学试题) 设 $f(x)$在$[a,\ b]$上连续，且至少有一个零点，求证：$f(x)$在$[a,\ b]$上必有最小零点.

【提示及点评】利用下确界与连续证明.

【训练题 9】(上海交通大学 2003 年硕士研究生入学试题)证明：若 $f(x),g(x)$ 连续，则 $\varphi(x)=\min(f(x),g(x))$连续.

【提示及点评】直接利用【训练题 3】的结论.

【训练题 10】(天津工业大学 2006 年研究生入学试题)用有限覆盖定理证明：闭区间上连续的函数必有界.

【训练题 11】证明 Dirichlet 函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{p}{q}\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$$

在所有无理点上连续，在所有有理点上间断（大连理工大学 2000 年研究生入学试题）.

【训练题 12】（广西大学 2003 年研究生入学试题）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 定义 $\varphi(x)=\sup\{f(t),t>x\}$，$\varphi(x)=\inf\{f(t),t>x\}$. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\inf\{\varphi(x)\mid x\in(0,+\infty)\mid\}$ 与 $\sup\{\varphi(x)\mid x\in(0,+\infty)\}$ 存在且相等.

【提示及点评】直接利用上下确界的定义证明.

【训练题 13】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一个非常值的连续函数. 求证：存在子区间 $[\alpha,\beta]$，使得 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上取得到最值，但在 (α,β) 内取不到最值.

【提示及点评】利用上下确界来证明. 设 $f(x)$ 的最大值为 $f(x_1)=M$，最小值为 $f(x_2)=m$，由于 $f(x)$ 是非常数函数，所以存在 $x_0\in[x_1,x_2]$，使得 $m<f(x_0)<M$.

令 $\alpha=\inf\{y\mid y\in[x_1,x_0],f(y)\neq M,m\}$，$\beta=\sup\{y\mid y\in[x_0,x_2],f(y)\neq M,m\}$.

【训练题 14】（浙江大学 2004 年硕士研究生入学试题）证明：若一簇开区间 $\{I_\alpha\}$ 覆盖闭区间 $[0,1]$，则必存在正数 δ，使得 $[0,1]$ 中任意两点 x',x'' 满足 $|x'-x''|<\delta$ 时，必属于某一个 $I_\beta\in\{I_\alpha\}$.

【提示及点评】利用有限覆盖定理证明.

【训练题 15】（中国矿业大学 2003 硕士研究生入学试题）利用闭区间套定理证明数列的柯西收敛准则.

【训练题 16】设 f 在区间 I 上有界，记 $M=\sup\limits_{x\in I}f(x)$，$m=\inf\limits_{x\in I}f(x)$，证明：

$$\sup_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m.$$

【提示及点评】利用上、下确界的定义来证明.

【训练题 17】证明：对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

的唯一不恒等于 0 的连续函数 $f(x)(0<x<+\infty)$ 是对数函数 $f(x)=\log_a x$，a 为正的常数.

【提示及点评】先证明存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$. 作辅助函数 $F(x)=f(a^x)$，类似前一个部分的【例 9】，可证得 $F(x)=F(1)x=f(a)x=x$.

【训练题 18】证明：对于 x 和 y 的一切正值满足方程 $f(xy)=f(x)f(y)$ 的唯一不恒等于 0 的连续函数 $f(x)(0<x<+\infty)$ 是幂函数 $f(x)=x^a$，a 为正的常数.

【提示及点评】作辅助函数 $F(x)=f(e^x)$，类似前一个部分的【例 10】，可证得 $F(x)=b^x$，最后变形就可以得到所要证明的结论.

【训练题 19】设 $\{x_n\}$ 为单调数列. 证明：若 $\{x_n\}$ 存在聚点，则必是唯一的，且为 $\{x_n\}$ 的确界.

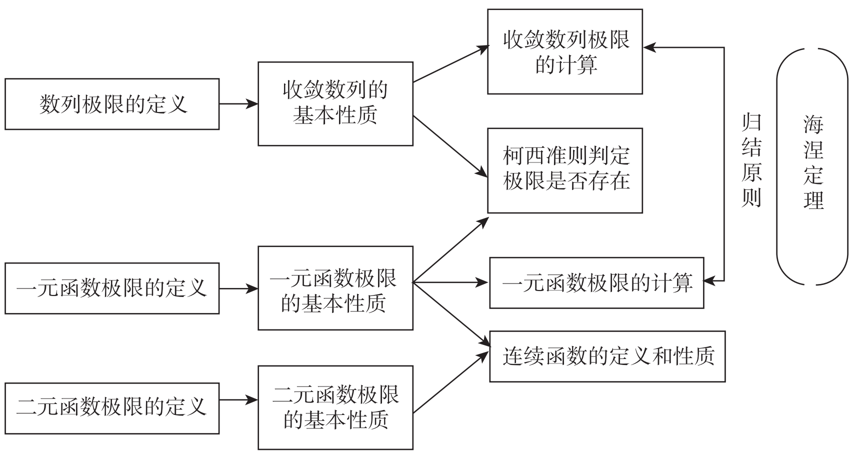
【提示及点评】利用聚点与确界的定义.

【训练题 20】证明：(a,b) 内的连续函数 f 为一致连续的充要条件是 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 都存在.

【提示及点评】证明必要性时，利用柯西收敛准则.

第二章　极限与连续

一、本章知识脉络框图



二、本章重点及难点

（一）重点：

极限的定义与性质、数列极限和一元函数极限的计算、两个重要极限的运用、归结原则、柯西准则以及有界闭集上连续函数的性质.

（二）难点

运用柯西准则和归结原则进行证明、理解多元函数重极限与累次极限的概念、有界闭集上连续函数的性质以及一致连续性.

三、本章的基本知识要点

（一）数列极限

1. 数列极限定义

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\text{当 }n>N\text{ 时，有 }|a_n-a|<\varepsilon.$$

注：(1) 数列极限的等价定义：

① $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<k\varepsilon$，其中 k 为某个正数.

② $\forall 0<\varepsilon<c,\exists N>0$，当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<k\varepsilon$，其中 c 与 k 为某个正数.

(2) 定义中的 N 可不取整数，$|a_n-a|<\varepsilon$ 可以是 $|a_n-a|\leqslant\varepsilon$.

(3) 增加、改变或去掉数列的有限项不影响数列的收敛性和极限. 重排不改变数列敛散性.