



DAKAISHUXUEZHICHUANG  
**打开数学之窗**

SHICHU  
TANZHONGXUESHUXUEXUEXI

**施储谈中学数学学习**

浙江教育出版社



DAKAISHUXUEZHICHUANG

# 打开数学之窗

SHICHU

TANZHONGXUESHUXUEXUEXI

施储谈中学数学学习

浙江教育出版社



徐承楠 老师

原杭州二中校长

江南实验学校总校长

浙江省特级教师

浙江省特级教师

## 前言

数学是一门科学,数学更是一种文化;数学是一种语言,数学更是一种工具.在信息社会的今天,数学已经深入到各行各业和我们日常生活之中.因此在中学阶段,学好数学,打好基础,其重要性是不言而喻的.

可是我们的学生,在学习数学的过程中,有的如饥似渴,有的如鱼得水;而有的则望而生畏,举步维艰.是什么原因造成孩子们在学习数学过程中那么大的反差?有什么办法在中学阶段夯实数学知识的坚实基础?施储老师力求为中学生学好数学付出一份努力.

施老师从下乡黑龙江在东北农场当老师起步,教师生涯至今已有35个年头了.特别是在杭州二中执教期间,教过“文革”后第一届恢复高考的学生,一直到带出获得浙江省第一块国际奥赛物理金牌的实验班学生.30多年的教学实践,形成了施老师数学教学思想和理念上的这样几个特色:

**全面发展:**施老师在教数学的同时,要求他的学生扩大视野和知识面,为自己将来走向社会能公平地参与竞争而学习,努力促进学生的全面发展、协调发展和可持续发展.

**以生为本:**施老师的学生,不论是学习成绩优秀的还是学习有困难的,和他的私人关系都十分融洽.因为他是站在一个朋友的立场来进行他的数学教学的,也正因为如此,他的教学才收到了丰硕的成果.

**轻负高质:**施老师能随时注意激发学生兴趣、提高课堂效率、构建知识网络、自主分层要求.所以他的学生从没有抱怨学习数学吃力,都能在相对比较轻松的环境和心情下,使数学成绩不同程度地得到提高.

**思维拓展:**数学教育除了讲授数学双基知识外,一个主要任务是培

养学生具有创造性的数学学习能力和应用数学知识解决实际问题的能力。施老师希望他的学生今后不管从事什么工作，都能让深深铭刻于头脑中的数学精神、数学思维、数学方法等随时发挥作用，使他们受益终生。

在本书中，施老师给中学生描绘了一个丰富多彩的数学世界：如何认识我们正在学习的数学知识，怎样抓住数学的主干知识和重点内容，应该培养哪些良好的数学学习习惯，面对各种考试如何自主复习发挥最佳水平；从初中到高中应该注意怎样的衔接，文科同学如何发挥自己的优势，女同学又该怎样树立信心，学有余力的同学又应如何攀登高峰；在新课程改革发展之中，我们该怎样正确面对；如何关注我们身边的数学，怎样以信息技术促进我们的数学学习；数学思想方法在数学学习中起到怎样的作用，我们如何在平时的学习中渗透数学思想方法……大到怎样提纲挈领，运筹帷幄；小到如何打好草稿，是否要在适当的时候请家教……

希望本书能给在数学学习上迷惘的同学指出方向，给学习数学有困难的学生增强信心，使数学优秀生更上一层楼！

徐承楠

2006年5月

# 目 录

■ 数学是什么	1
■ 关注我们身边的数学	11
■ 数学学习从知识立意向能力立意的转变	18
■ 培养良好的数学学习习惯	24
■ 夯实基础是不断进步的台阶	33
■ 抓住数学的主干知识和重点内容	39
■ 文科学生的数学学习	43
■ 女同学当然能学好数学	47
■ 谈谈在数学复习中的“自主学习,自我发展”	54
■ 轻装上阵,在考试中发挥最佳水平	61
■ 和同学们谈谈新课程的理念和实施	67
■ 全球性的行动——数学课程改革	74
■ 重视初高中数学学习的衔接	81

■ 信息技术的发展促进了我们的数学学习	86
■ 我和我的“数学超前班”	92
■ 我所结识的数学少年	102
■ 学一点数学思想方法	111
■ 附:数学思想方法的应用	119



# 数学是什么

我们在小学学习了6年的数学,中学又是一个6年,许多同学还将在大学继续学习数学.那么数学究竟是什么?

我想和同学们说的是,千万不要把数学看成是一堆简单的、乏味的、枯燥的数字和符号,不要把数学家看成是整天拿着一支笔(或现在是在电脑前)没完没了地计算的人.那样你就会逐渐陷入烦恼,带来厌倦,日益疲惫,离数学越来越远.

数学是一个抽象的概念;数学是以数量关系和空间形式为主要研究对象的一门科学.也可以通俗地解释为:数量关系就是代数,空间关系就是几何;数学是由基础和应用两部分组成的,前者追求真和美,后者的重要性在于各方面的应用.

数学还应该是一首美妙的乐曲,是一门理性的艺术,是一种思维的体操;数学是乐谱,数学是阳光,数学是娱乐;数学是人类生活的工具,是我们用于交流的语言;数学隐含深邃的文化,数学包罗奇妙的思想方法.一群群数字和一组组字母纵横交织,构成了人类文化进步的一个个阶梯,严谨的数学也因此傲居科学之母的地位.著名数学家高斯曾经说:数学是科学之王!

## 数学是“好玩”的

我国数学泰斗陈省身先生 92 岁时为第七届国际数学家大会少年数学论坛写下了这样一句话——数学好玩。他的意思是数学并不枯燥，是很有趣味的一门科学。事实上，陈省身先生从十几岁起觉得数学好玩，对数学产生浓厚的兴趣，并孜孜以求，才“玩”成了数学大师，并不是成了大师后才觉得“数学好玩”的。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏，如七巧板、九连环、华容道等。数学中有许多极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深思，使人深省。

请看下面两个小小的拼图游戏：

游戏一：如何把一个正方形分成 4 块，然后拼成一个矩形？

有的同学的解答是：将边长为 8 的正方形依图 1 方式裁成 4 块后可以拼成图 2 的矩形。

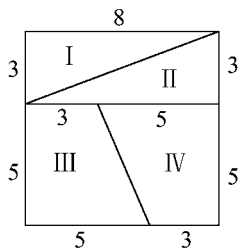


图 1

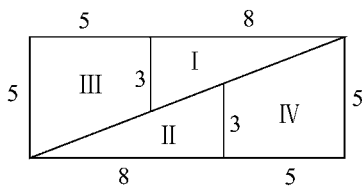


图 2

同学们，这样的拼图方法正确吗？注意，我们这里所说的拼图，应该是无缝隙且无重叠的。上述拼图方法乍看起来似乎天衣无缝，无可挑剔，但是细心的同学立即可以从计算它们的面积中找出破绽：

$$S_{\text{正方形}} = 8^2 = 64 (\text{面积单位})；$$

$$S_{\text{矩形}} = 13 \times 5 = 65 (\text{面积单位})。$$

为什么面积增大了？其中的原因是，所拼成的矩形中间有“缝”。你能试着找出“缝”在哪里吗？

游戏二：这怎么可能呢？

把一个边长为 12 的正方形按图 3 所示的方法剪成 5 块，然后按图 4 所示的方法重新拼成一个正方形。这时，一个奇怪的现象出现了，5 块图形一块不多一块不少，每个图形的面积都没有发生变化，拼成的正方形的边长还是 12。为什么会多出一个正方形的空当呢？你能解释这个奇怪的现象吗？

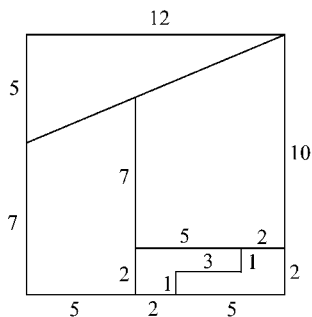


图 3

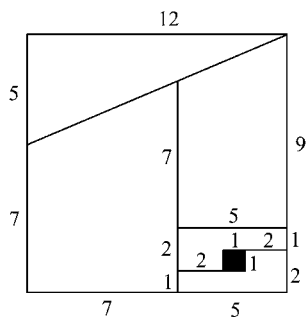


图 4

这个问题先不公布答案，请同学们自己动动脑筋，也可以与你的同伴讨论一下。

英国趣味数学家杜登尼在 20 世纪初曾在《迈尔日报》上提出下面的问题：一个正三角形如何剖分成 4 块后，用它们可拼成（无缝隙且无重叠）一个正方形？

问题解答者众多，但完全（或严格）正确者很少。稍后，杜登尼给出了如图 5 的拼凑方法。这个方法是经过严格作图的。

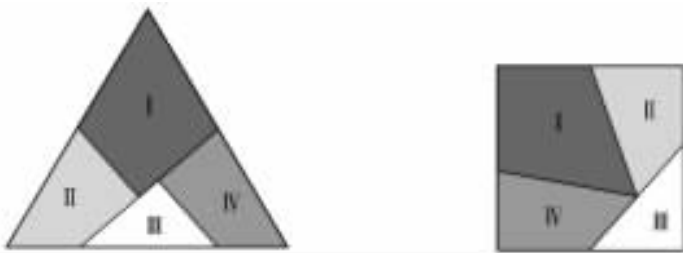


图 5

一个正三角形还可以剖分成 5 块后拼成一个正方形。请同学们自己动手剪一剪、拼一拼、试一试。

我们还知道,在尺规作图的研究中,数学界有三大不可能问题,其中之一就是:不可能作一个正方形,使之与某定圆面积相等。

这不是挺好玩的吗!2002 年获得国际数学菲尔兹奖的俄罗斯籍数学家符拉基米尔·弗沃特斯基说:数学是聪明人玩的游戏。

## 数学是有趣的

你听说过阿凡提分马的故事吗?

一位老人有 19 匹马,要分给他的三个儿子。他对儿子们说:“我死后,这 19 匹马就是你们的财产了,你们要爱护,真主保佑你们!这些马,老大得  $\frac{1}{2}$ ,老二得  $\frac{1}{4}$ ,老三得  $\frac{1}{5}$ ,……”话还没说完老人就咽气了。

三个儿子为分马而犯难了,19 匹马怎样才能按  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$  来分呢?父亲的遗嘱要遵守,而马又不能杀死。正在这时,阿凡提骑着毛驴过来了,他们赶紧请阿凡提给出个主意。阿凡提问明情况后笑着说:“我的毛驴也很壮实,与你们的马差不多,借给你们吧!”

这样,马匹与毛驴共有 20 匹,老大得一半,分到 10 匹;老二得  $\frac{1}{4}$ ,分到 5 匹;老三得  $\frac{1}{5}$ ,分到 4 匹。一共分了 19 匹,剩下 1 匹毛驴还给阿凡提。阿凡提跨上毛驴,乐呵呵地与三个年轻人道别,唱着歌儿走了。

但仔细想一想,不对啊,老大分 19 匹马中的  $\frac{1}{2}$ ,应该是  $\frac{19}{2}$  匹,怎么能分到 10 匹呢?同样,老二应该是  $\frac{19}{4}$  匹,老三应该是  $\frac{19}{5}$  匹,怎么能分到 5 匹和 4 匹呢?

原来他们的父亲话还没有说完。事实上,

$$\frac{19}{2} + \frac{19}{4} + \frac{19}{5} = 19 \times \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = 19 \times \frac{19}{20} < 19,$$

可见 19 匹马还没有分完, 还剩下  $19 - 19 \times \frac{19}{20} = \frac{19}{20}$  匹马没分, 差不多就是阿凡提的一匹毛驴了。

如果将剩下的  $\frac{19}{20}$  匹马按同样的规则再分, 又剩下  $\frac{19}{20} \times \left( 1 - \frac{19}{20} \right) = \frac{19}{20^2}$  匹马; 再继续分, 还剩下  $\frac{19}{20^2} \times \left( 1 - \frac{19}{20} \right) = \frac{19}{20^3}$  匹马, ……依次分下去, 永远也分不完。剩下的马的数量, 从第一次开始, 依次可写成下面一列数:  $\frac{19}{20}, \frac{19}{20^2}, \frac{19}{20^3}, \dots, \frac{19}{20^n}, \dots$  随着自然数  $n$  的增大, 这列数越来越接近于 0, 但永远不等于 0。高中的同学已经知道这列数叫做“无穷等比数列”, 当  $n$  无限增大时, 这列数中的通项  $\frac{19}{20^n}$  趋向于 0。在我们的问题中, 这 19 匹马几乎被“分完”。

下面我们再来算一算, 三兄弟到底各应分到多少匹马。以老大为例, 老大应分到的马匹是这样一个“和”:

$$\begin{aligned} & 19 \times \frac{1}{2} + \frac{19}{20} \times \frac{1}{2} + \frac{19}{20^2} \times \frac{1}{2} + \dots + \frac{19}{20^n} \times \frac{1}{2} + \dots \\ & = \frac{19}{2} \times \left( 1 + \frac{1}{20} + \frac{1}{20^2} + \dots + \frac{1}{20^n} + \dots \right). \end{aligned}$$

括号内的“和”不是通常所理解的有限个数之和, 而是“极限”意义上的“和”。学习了数列的知识后, 我们便能求出这个“和”等于  $\frac{20}{19}$ , 因此老大得到  $\frac{19}{2} \times \frac{20}{19} = 10$  匹马。用同样的方法, 可算出老二得到 5 匹马, 老三得到 4 匹马。

阿凡提的借驴分马的方法, 无疑是天底下最合理的分法啦!

类似这样的数学趣题还很多, 若我们能寻根问底, 就会领会其中的奥妙。这不是挺有趣的吗!

## 数学是美丽的

杭州学军中学的闻杰老师曾经上过一节研究性学习的公开课。

为迎接西博会的到来,杭州市政府提出了“全面整治环境,创建绿色城市”的口号.为建造一流的生态公园,有关部门决定向开发公司实行公开招标.现有各种形状的公园若干个(如图6),正多边形公园的各个顶点处均设置有各具特色的亭子.现要在公园内设计道路,使从每个亭子出发,可以走到任意另一个亭子(不经过其他亭子),并且道路尽可能短.设计方案满足要求,并且道路最短的公司就中标.

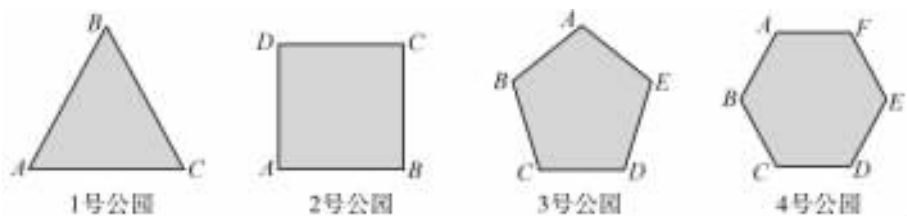
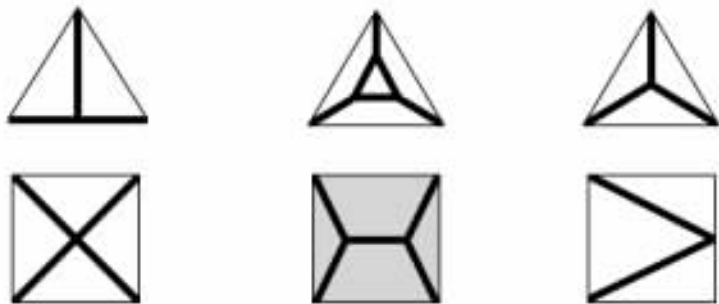


图 6

请同学们自己试一试,你能设计出哪些方案?

在这节课上,同学们的创造力发挥得淋漓尽致.请看下面各种不同的设计方案(如图7):



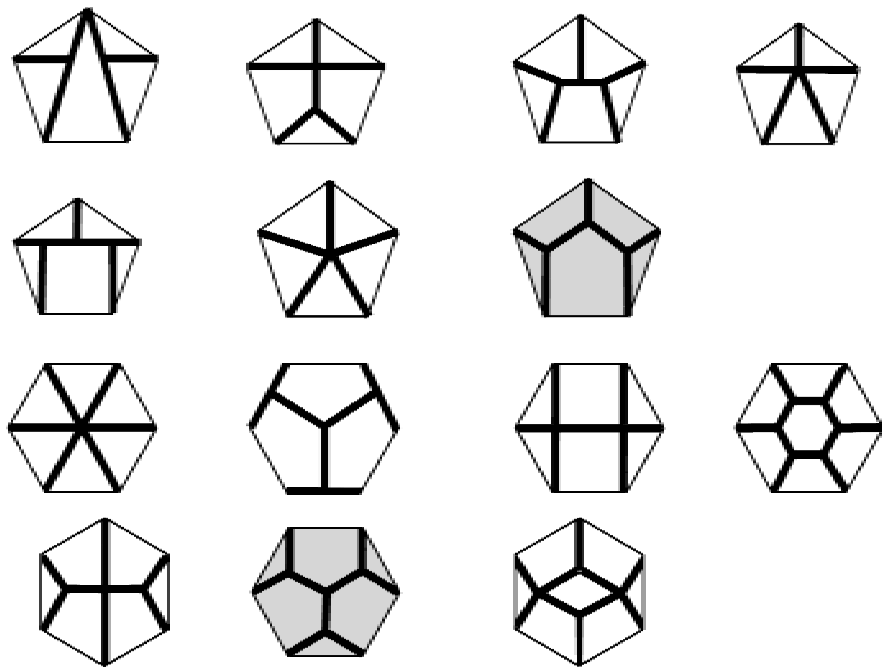


图 7

通过度量、计算、比较、筛选,图 7 中灰色图案的方案为进入首轮中标者。

然后同学们进行逻辑论证,研究中标者的设计图案有无共同特点,为什么这样的路径会最短。最后大家发现:这几个图形各连结点处的夹角均为  $120^\circ$ 。这是必然的结果还是偶然的巧合?让我们先从基本图形——三角形开始进行探讨。如果利用“几何画板”软件的动画功能,对正三角形、锐角三角形、钝角三角形逐一进行探索、验证,可以发现,在各连结点处的夹角均为  $120^\circ$  时(这个连结点称为费马点),连结各顶点的线路总长最短。类似地,可以进一步探究,对于任意四边形、任意五边形、任意六边形,应该怎么找最短路径。

质点间的最短路径与物理中的分子间力、化学中的原子结构关系有天然的吻合,体现了数学对于各学科的综合渗透,如图 8。

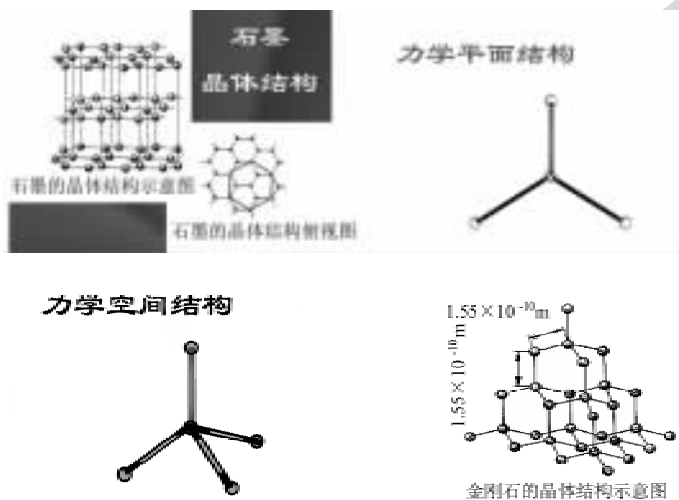


图 8

数学就在我们的身边,这样的例子随处可见.如雪花与分形密切相关,广泛应用于各个领域的黄金分割(图 9),通过几何图形中的相似、全等和对称、旋转,通过计算机把简单的图形设计成美丽的图案等,都展示了数学与艺术的美妙结合.有位哲学家说:“数学就是在看似简单的事物背后探寻美丽的规律.”数学大师丘成桐先生在浙江大学演讲时也提到:数学是讲逻辑的科学,美得很有文采,也很真实;数学的美是永恒的,在任何情况下都成立.

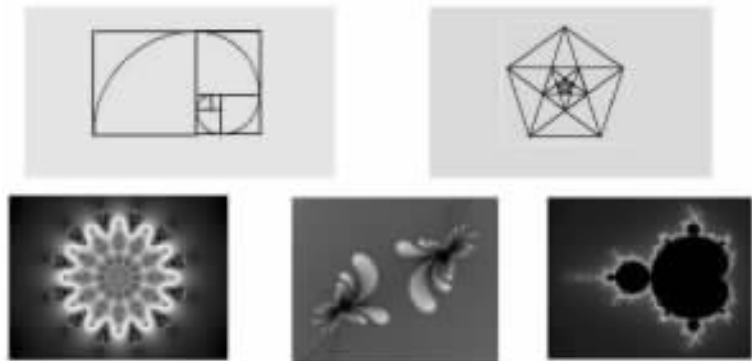


图 9

## 数学是有用的

我们从两千多年前的中国战国时期说起,曾经有一个流芳百世的“赛马”故事.在军事家孙臆的帮助下,齐国大将田忌以“下驷对上驷,上驷对中驷,中驷对下驷”的策略,在平均劣势下赢得了赛马胜利.

“田忌赛马”的策略是一个典型的博弈问题.博弈的数学种子出自中国,然后在西方开花结果,并成为当代最广泛应用的数学分支之一.

现代的博弈论,主要研究决策主体的行为在直接相互作用时,人们如何进行决策,以及这种决策如何达到均衡的问题.在博弈论分析中,一定场合下的每个对弈者在决定采取何种行为时,都会策略地、有目的地行事,会考虑到他的决策行为对其他人的可能影响,以及其他人的行为对他的可能影响,通过选择最佳行动计划,来寻求收益或效用的最大化.

英文博弈论也可以翻译成“游戏理论”,而在实际生活中,确实有许多游戏都反映了博弈论的思想.扑克、棋、赛马甚至赌博,都有博弈的影子.

不要把数学看得很神秘,当我们玩“石头、剪子、布”的游戏时,我们的问题是:对方如何行动?而我又将如何应对才是最佳?这实际上就涉及了博弈论的核心问题,即以对方的行为作为自己决策的依据,并寻求最佳结果.

在更大的范围内,国际政治格局中的战略结盟和敌对双方的你争我夺等等,无一不是博弈.可以说,博弈在当代世界中无处不在.2005年的诺贝尔经济学奖获得者,美国人托马斯·谢林和以色列美国双重国籍的罗伯特·奥曼,都是博弈论大师,奥曼从以色列打电话到授奖仪式上说:我确实希望某种博弈论可以加以利用,可以成为这个解决方案(指以巴冲突)的一部分.

赌博还产生了17世纪数学的另一个分支——概率论,这本来是由保险事业的发展而产生的,但是来自于赌博者的请求,却是数学家们思考概率论问题的起点.

早在1654年,法国一个赌徒梅黑,向数学家帕斯卡提出一个使他苦

恼了很久的问题：“两个赌徒相约赌若干局，谁先赢 6 局就算赢，全部赌本就归谁。但是当其中一个人赢了 3 局，另一个人赢了 4 局的时候，因故赌博中止。问此时应该如何分赌注才合理？”

帕斯卡和当时第一流的数学家费马一起，研究了梅黑提出的关于分赌注的问题。于是，一个新的数学分支——概率论登上了数学的历史舞台，这是一种新的数学。3 年后，也就是 1657 年，荷兰著名的天文、物理兼数学家惠更斯企图自己解决这一问题，写成了《论机会游戏的计算》一书，这是最早的概率论著作。

随着高新技术的蓬勃发展、知识密集型产业的异军突起、计算机产业的日新月异，数学更深入地渗透到自然科学、社会科学乃至各行各业和社会生活的各个方面，已经是一个不争的事实。

人们不得不说，数学是多么有用啊！

在未来社会中，无论从事何种工作，无论是工人、农民、工程技术人员，还是各行各业的各级领导成员，都将遇到诸如形势的估计、路径的选择、真伪的辨析、偏见的分析、风险的估测等各种挑战。这些都将迫使你去思考，特别要求你进行数学的思考。正如《人人关心数学教育的未来》一书中所说：“美国人比过去任何时候都需要为生活而思考；他们比过去任何时候都更需要数学地思考。”

一百多年前，恩格斯在他的著作《自然辩证法》中，已根据当时的实际情况形容过数学的作用：“数学的应用在固体力学中是绝对的，在气体力学中是近似的，在液体力学中已经比较困难了，在物理学中多半是尝试的和相对的，在化学中是最简单的一次方程式，在生物学中等于零。”然而，时至今日，数学在生物学中的应用已非常广泛，数学方法几乎已渗透到生物学的每一个角落，其中统计生物学、数学生态学、数学遗传学和数学生物学是四大分支。生物学借助数学模型显示生物现象的本质，使生物学获得了第二次生命。数学方法不仅在自然科学、工程技术领域得到了广泛的应用，而且已向社会科学的各个领域进行了渗透。

总的来说，数学素养是一种基本的文化素养，普通大众在生活、工作中需要数学，社会的进步和科技的发展离不开数学，人的终身教育和发展也和数学密切相关。希望同学们能够了解数学，理解数学，喜欢数学，热爱数学，学好数学，用好数学，并让数学为我们服务，给我们带来快乐！

A magnifying glass is held over a document, focusing on a column of numbers. The numbers are arranged in a pattern that suggests a sequence or a specific mathematical relationship. The background is a blurred document with columns labeled 'Fact.', 'Report', and 'Sales'.

## 关注我们身边的数学

你注意过录像机中计数器数字的跳动吗？这里有什么规律？你如果找到规律，就可以根据计数器的读数算出录像带已经转了多长时间，也就知道未转过的那段带子能否录下一段时间的一个节目；当你的家人准备用个人住房贷款购买一所新居时，面对五花八门的房贷还款方式（期限、利率不同，按月或按年偿还……），哪一种最有利？用一点不太高深的数学知识就能准确地回答你的问题。

数学源于生活，生活中又充满着数学。数学家华罗庚先生说：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，日用之繁，无处不用数学。”这是对数学与生活的关系的精彩描述。现在正在推广使用的《全日制义务教育数学课程标准》（实验稿）也提出实现“人人学有价值的数学；人人都能获得必需的数学；不同的人在教学上得到不同的发展”的目标，其实现的基本途径是从我们熟悉的生活背景中发现数学、掌握数学和运用数学，体验数学与周围世界的联系以及数学在社会生