

国家“十五”重点图书

# 从量子力学到量子光学

## ——数理进展

范洪义 著

上海交通大学出版社

## 内 容 提 要

本书独辟蹊径地发展了量子力学创始人之一狄拉克的符号法,并结合建立量子力学的连续纠缠态表象,向读者提供了从量子力学向量子光学理论延伸的自然途径,使量子光学的数理基础理论得到别开生面的发展。书中对相干态、压缩态、Wigner 函数、热场动力学、相位算符与量子主方程的理论都有崭新的阐述,成为目前量子光学数理理论最前沿的专著。

本书还介绍了作者新提出的若干纠缠态表象及量子么正变换理论、Fresnel 变换,深化了量子纠缠的思想。在发展量子光学数理基础的同时,又促进和深化了傅里叶光学的理论研究。

本书适合理工科大学物理专业和通信工程专业的师生及各部门理论物理领域的研究人员阅读。

# **From Quantum Mechanics to Quantum Optics**

## **——Development of the Mathematical Physics**

Fan Hongyi

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

此为试读, 需要完整PDF请访问: [www.ertongbo.com](http://www.ertongbo.com)

**谨以此书献给慈爱的  
母亲  
毛婉珍**

# 目 录

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| 引言                                     | 1  |
| 第一章 狄拉克坐标表象与有序算符内积分技术、<br>单模压缩算符       | 10 |
| 1.1 从狄拉克的坐标表象看符号法的进展方向                 | 10 |
| 1.2 坐标表象完备性的纯高斯积分形式                    | 12 |
| 1.3 真空投影算子的正规乘积形式                      | 13 |
| 1.4 玻色算符在正规乘积内的性质                      | 15 |
| 1.5 有序算符内的积分技术与单模压缩算符<br>的自然导出         | 17 |
| 1.6 量子光学压缩态(单模情形)                      | 20 |
| 1.7 量子力学态矢的小波变换                        | 22 |
| 习题                                     | 24 |
| 第二章 两体纠缠态表象及若干应用                       | 26 |
| 2.1 “剪不断,理还乱”的量子纠缠                     | 26 |
| 2.2 双粒子纠缠态表象的基本性质                      | 29 |
| 2.3 双模纠缠算符                             | 31 |
| 2.4 光分束器作为生成双模纠缠态的基本器件                 | 32 |
| 2.5 不对称的光分束器产生的纠缠态                     | 34 |
| 2.6 双模压缩算符与 EPR 纠缠态 $ \eta\rangle$ 的关系 | 36 |
| 2.7 单边双模压缩算符与纠缠态变换                     | 40 |

|      |                                                          |    |
|------|----------------------------------------------------------|----|
| 2.8  | 产生单边双模压缩态的哈密顿算符                                          | 43 |
| 2.9  | 相干-纠缠态                                                   | 44 |
| 2.10 | 作为 $X_1^2 + X_2^2$ 与 $X_1 P_2 - X_2 P_1$ 共同本征态<br>的两体纠缠态 | 46 |
| 2.11 | 带参量的两体纠缠态表象                                              | 49 |
| 2.12 | 用 $ \eta\rangle$ 表象寻求广义压缩算符                              | 55 |
|      | 习题                                                       | 58 |
| 第三章  | 相干态和 IWOP 技术、相干态和菲涅耳变换                                   | 59 |
| 3.1  | 相干态完备性的正规乘积形式与应用                                         | 59 |
| 3.2  | 用正规乘积内积分技术导出若干算符恒等式                                      | 62 |
| 3.3  | 用 IWOP 技术求热库中一个中心振子的时间<br>演化                             | 63 |
| 3.4  | 三参数单模压缩算符的相干态表象——辛群<br>表示                                | 67 |
| 3.5  | 三参数双模压缩算符——相干态投影算符作<br>为辛群表示                             | 72 |
| 3.6  | 广义菲涅耳变换与广义菲涅耳算符——单模<br>情形                                | 74 |
| 3.7  | 广义菲涅耳算符的坐标-动量算符表示                                        | 76 |
| 3.8  | 用广义菲涅耳变换讨论标度定律                                           | 78 |
| 3.9  | 广义菲涅耳变换与广义菲涅耳算符——纠缠<br>形式                                | 81 |
| 3.10 | 压缩参数空间中压缩态完备性的讨论                                         | 84 |
| 3.11 | 相干态与 Bargmann 空间                                         | 85 |
| 3.12 | 广义 Bargmann 空间                                           | 87 |
| 3.13 | 二维复小波变换与纠缠态表象                                            | 92 |
| 3.14 | 纠缠态表象的微分型完备关系及应用                                         | 94 |
| 3.15 | 玻色产生算符本征态                                                | 96 |

|      |                                                  |     |
|------|--------------------------------------------------|-----|
| 3.16 | 产生算符的本征态作为一个不可归一化的超奇异的压缩相干态 .....                | 98  |
|      | 习题 .....                                         | 100 |
| 第四章  | Weyl 编序、Wigner 算符与纠缠态 .....                      | 103 |
| 4.1  | Weyl 量子化方案和 Weyl 编序内的积分技术 .....                  | 103 |
| 4.2  | 由量子统计的含义导出 Wigner 算符 .....                       | 105 |
| 4.3  | 相干态投影算符和密度矩阵的 Weyl 编序形式 ..                       | 109 |
| 4.4  | 密度矩阵的反正规乘积展开与反正规乘积内的积分技术 .....                   | 110 |
| 4.5  | 纠缠态与 Wigner 函数 .....                             | 114 |
| 4.6  | 纠缠态表象中的层析摄影术(Tomography)理论 ..                    | 119 |
| 4.7  | 两体关联系统态矢的 Wigner 函数的时间演化 ..                      | 122 |
|      | 习题 .....                                         | 126 |
| 第五章  | 自旋相干态与纠缠态 .....                                  | 127 |
| 5.1  | 自旋相干态的 Schwinger 玻色子表示 .....                     | 127 |
| 5.2  | 自旋相干态与纠缠态的内积 .....                               | 129 |
| 5.3  | 自旋相干态的 Wigner 函数 .....                           | 131 |
| 5.4  | 自旋相干态的 Wigner 函数的边缘分布 .....                      | 133 |
| 5.5  | 原子相干态作为耦合振子的本征态 .....                            | 135 |
| 5.6  | Pauli 自旋算符的粒子数态投影算符实现 .....                      | 139 |
|      | 习题 .....                                         | 143 |
| 第六章  | 诱导纠缠态及其在汉克尔变换中的应用 .....                          | 144 |
| 6.1  | 两类诱导纠缠态 .....                                    | 144 |
| 6.2  | $\langle s, r'   q, r \rangle$ 作为汉克尔变换的积分核 ..... | 146 |
| 6.3  | 诱导纠缠态的上升、下降性质及汉克尔变换的若干性质 .....                   | 148 |

|     |                                             |     |
|-----|---------------------------------------------|-----|
| 6.4 | 贝塞尔方程作为量子力学中确定算符的恒等式<br>在纠缠态表象中的矩阵元 .....   | 151 |
| 6.5 | 诱导纠缠态表象应用于光线在(ABCD)介质<br>中传播 .....          | 154 |
|     | 习题 .....                                    | 157 |
| 第七章 | 纠缠态与分数傅里叶变换 .....                           | 158 |
| 7.1 | 用 IWOP 技术研究分数傅里叶变换 .....                    | 158 |
| 7.2 | 用 Wigner 算符研究分数傅里叶变换 .....                  | 162 |
| 7.3 | 用纠缠态之间的变换研究复的分数傅里叶变换 ..                     | 163 |
| 7.4 | 复的分数傅里叶变换的本征模 .....                         | 166 |
| 7.5 | 光在二次渐变折射率介质中传播的本征模( I ) ..                  | 168 |
| 7.6 | 光在二次渐变折射率介质中传播的本征模( II ) ..                 | 170 |
| 7.7 | 从 Wigner 算符的 Weyl 编序形式导出复的<br>分数傅里叶变换 ..... | 172 |
| 7.8 | 角动量算符的新玻色算符实现和纠缠态之间<br>的分数傅里叶变换 .....       | 174 |
|     | 习题 .....                                    | 176 |
| 第八章 | 分数汉克尔变换与纠缠态 .....                           | 177 |
| 8.1 | 分数汉克尔变换的本征模 .....                           | 177 |
| 8.2 | 分数汉克尔变换作为诱导纠缠态之间的变换 .....                   | 181 |
| 8.3 | 用角动量算符的新玻色算符实现求分数汉克尔<br>变换 .....            | 183 |
| 第九章 | 热场动力学中的纠缠态表象 .....                          | 185 |
| 9.1 | 引言 .....                                    | 185 |
| 9.2 | 相干热态(热纠缠态) $ \tau\rangle$ .....             | 187 |
| 9.3 | 密度矩阵 $\rho$ 在相干热态表象中的表示 .....               | 188 |



|             |                                                      |            |
|-------------|------------------------------------------------------|------------|
| 9.4         | $\langle \tau   \rho \rangle$ 的各种应用: 计算系综平均 .....    | 192        |
| 9.5         | 用 $\langle \tau   \rho \rangle$ 研究量子光学的相空间分布理论 ..... | 193        |
| 9.6         | 密度算符在 $\langle \tau  $ 表象中的时间演化 .....                | 196        |
| 9.7         | 化解密度矩阵主方程为 $c$ 数方程的纠缠态表象<br>方法 .....                 | 199        |
| 9.8         | 几个物理例子 .....                                         | 202        |
| 9.9         | 热激发态表象 .....                                         | 205        |
| 9.10        | 热 Wigner 算符及应用 .....                                 | 206        |
| <b>第十章</b>  | <b>广义相位-振幅量子纠缠 .....</b>                             | <b>209</b> |
| 10.1        | 纠缠态 $ \eta\rangle$ 所体现的关联振幅-操作相纠缠 .....              | 209        |
| 10.2        | 数差-关联振幅纠缠 .....                                      | 212        |
| 10.3        | 基于双模数差和操作相的广义 Jaynes-Cummings<br>模型 .....            | 214        |
| 10.4        | 数差-操作相意义下的 Wigner 函数及其边缘<br>分布 .....                 | 218        |
|             | 习题 .....                                             | 222        |
| <b>第十一章</b> | <b>多模连续纠缠态表象 .....</b>                               | <b>223</b> |
| 11.1        | 由起偏器和光分束器产生的三模连续纠缠态<br>及其性质 .....                    | 223        |
| 11.2        | 由光分束器和参量下转换过程产生的三模连<br>续纠缠态 .....                    | 227        |
| 11.3        | 四模纠缠态表象 .....                                        | 228        |
| 11.4        | 三模诱导纠缠态 .....                                        | 230        |
| 11.5        | 用 IWOP 技术求描写 $N$ 端口线性光学网络<br>的哈密顿量 .....             | 233        |
| 11.6        | 多模连续纠缠态表象 .....                                      | 237        |
| 11.7        | 三模压缩态作为一个纠缠态 .....                                   | 242        |

|             |                                           |            |
|-------------|-------------------------------------------|------------|
| 11.8        | 三模纠缠态表象下 Wigner 函数的边缘分布 .....             | 247        |
| <b>第十二章</b> | <b>用纠缠态表象讨论量子隐态传输 .....</b>               | <b>251</b> |
| 12.1        | 分离态的隐态传输简介 .....                          | 251        |
| 12.2        | 用纠缠态表象讨论量子隐态传输 .....                      | 253        |
| 12.3        | 用双模压缩态做量子通道的隐态传输方案 .....                  | 259        |
| 12.4        | 纠缠态在量子密集编码中的应用 .....                      | 263        |
| 12.5        | 利用纠缠态表象实现纠缠交换 .....                       | 266        |
| 12.6        | 纠缠变换算符 .....                              | 270        |
| <b>第十三章</b> | <b>作为量子计算器元件的超导约瑟夫森结与<br/>纠缠态表象 .....</b> | <b>273</b> |
| 13.1        | 约瑟夫森结等效电路的量子化理论与纠缠<br>态表象 .....           | 273        |
| 13.2        | 由约瑟夫森结的哈密顿算符导出约瑟夫森<br>方程 .....            | 277        |
| 13.3        | 有外偏压与外偏流时约瑟夫森结的哈密顿算<br>符及方程 .....         | 277        |
| 13.4        | 电荷态与相态表示 .....                            | 279        |
| 13.5        | 超导量子干涉仪的流算符方程 .....                       | 280        |
| 13.6        | 关于约瑟夫森结的路径积分理论 .....                      | 282        |
| <b>第十四章</b> | <b>有序算符内积分技术的若干应用 .....</b>               | <b>289</b> |
| 14.1        | 径向坐标算符幂次的正规乘积展开 .....                     | 289        |
| 14.2        | 径向动量算符的正规乘积展开 .....                       | 295        |
| 14.3        | 坐标算符的逆算符的正规乘积展开 .....                     | 298        |
| 14.4        | 用 IWOP 技术实现量子力学意义下的 Hilbert<br>变换 .....   | 305        |
| 14.5        | 两体一维库仑势的正规乘积展开 .....                      | 306        |

|             |                                     |            |
|-------------|-------------------------------------|------------|
| 14.6        | 三维库仑势及其他三维位势的正规乘积展开·····            | 308        |
| 14.7        | 用 IWOP 技术导出与组合学有关的若干算符恒等式·····      | 313        |
| 14.8        | 用 IWOP 技术导出有关厄米特多项式的算符公式·····       | 318        |
| <b>第十五章</b> | <b>非线性相干态·····</b>                  | <b>321</b> |
| 15.1        | 引言·····                             | 321        |
| 15.2        | 非线性相干态的 IWOP 技术 ·····               | 323        |
| 15.3        | 非线性相干态的完备性关系与广义压缩算符·····            | 324        |
| 15.4        | 非线性 $SU(3)$ 电荷、超荷相干态 ·····          | 326        |
| 15.5        | 密度矩阵在非线性相干态表象中的展开·····              | 329        |
| 15.6        | 非线性相干态的正 $P$ 表示 ·····               | 332        |
| 15.7        | 广义特征函数与正 $P$ 表示的关系 ·····            | 334        |
| 15.8        | 非线性“荷”守恒相干态与非线性纠缠态·····             | 336        |
| 15.9        | 非线性纠缠态的完备性关系与双模广义压缩算符·····          | 338        |
|             | 习题·····                             | 341        |
| <b>第十六章</b> | <b>用纠缠态表象求解的若干量子力学问题·····</b>       | <b>342</b> |
| 16.1        | 转动电偶极子和广义爱仑费斯特定理·····               | 342        |
| 16.2        | 从非简并参量放大器与纠缠态分析“不变本征算符法”求能级间隔 ····· | 344        |
| 16.3        | 几个上述方法的例子·····                      | 346        |
| 16.4        | 在相互作用图像中分析“不变本征算符法”·····            | 350        |
| 16.5        | 用“不变本征算符法”求若干耦合振子的振动模式·····         | 354        |
| 16.6        | 用“不变本征算符法”求双原子线性链的声学支和光学支·····      | 356        |

---

|      |                                             |     |
|------|---------------------------------------------|-----|
| 16.7 | 关于自旋系统的“不变本征算符”.....                        | 359 |
| 16.8 | 用“膺不变本征算符法”求 Jaynes-Cummings<br>模型的能级差..... | 360 |
| 16.9 | 不同耦合强度的双原子线性链的新声学支<br>和光学支.....             | 365 |
|      | 习题.....                                     | 368 |
| 第十七章 | 费米压缩算符的乘法规则.....                            | 370 |
| 17.1 | 费米压缩算符的相干态表象.....                           | 370 |
| 17.2 | 费米压缩算符的成群性质.....                            | 373 |
|      | 结语.....                                     | 378 |
|      | 参考文献.....                                   | 380 |

# 引 言

---

本书旨在介绍量子力学和量子光学的数理基础理论的新进展。这些进展起源于笔者 20 多年来对量子力学中狄拉克(Dirac)符号法(Symbolic method)的学用心得以及另辟蹊径的研究,由此才水到渠成地使得量子力学的数理基础理论更臻完美。这些进展也体现了符号法的强大生命力,并显示了一种好的物理理论的包容性及其基本要点的简洁性。对于理论物理学家而言,要建立一个理论体系,就应该把理论所能触及的多个物理问题的共同性找出来,从一种原始的方法出发统一地加以描述,并尽可能使这类描述具有简单性。所谓简单性,是指该理论体系所包含的彼此独立的假设或公理数量最少。诚如爱因斯坦指出的那样:“相信世界在本质上是有秩序的和可认识的这一信念,是一切科学工作的基础。”本书的内容都可以归结为是对狄拉克符号法的研究取得的突破成果,这也已经成了符号法的有机组成部分。

狄拉克的符号法是使量子物理学家理性思维形式化的一种很简明的理论,但它具有超乎理性的有效性;它既是简洁的,又是浩瀚的;它把人类心灵深处最美的东西变成外部自然界中的现实,对现实物理是一种共鸣,一种映照,一种天人合一的杰作,因此具有极高的美学价值。奥地利物理学家马赫认为:“可以把科学看成一个最小值问题,这就是花费尽可能最少的思维,对事实作出尽可能最完善的陈述。”符号法,这个由天才狄拉克创造的深刻反映量子规律、有严密逻辑的特殊学问,已经成为量子力学的专门语言。

理论物理大师理查德·费恩曼(R Feynman)在把量子物理与

牛顿经典力学对比后指出,量子现象“是不可能、也绝对不可能用任何经典方法来解释的。”它“是量子力学的核心所在。实际上,它包含的正是量子理论的神秘。”正因为如此,量子力学才有它自身的语言——符号法。人们在学习量子力学这门特殊的学问时,不仅需要深入透彻地去研究它,也需要逐步地去“习惯”它。

第二次世界大战以后,冯·诺依曼在美国洛萨拉莫斯工作时,有一个人向他请教问题,冯说:“很简单,这可以用特征标方法解决。”来人说:“我恐怕还不能理解。”冯说:“年轻人,在数学里不要去理解事情,而应该去习惯事情。”这正如一个初生婴儿虽有眼睛,对于入射于眼睛上的光能在视网膜上成倒立的实像,但他的大脑还没有发展到能将倒立的像矫正为正立的像的能力。在经典力学时代,人们耳闻目见、手足感触的仅局限于宏观物体,因此牛顿力学才应运而生。当时人们的大脑思维还较为简单,不能悟知和找到量子力学与经典力学的结合点。只有当普朗克从分析黑体辐射的光谱中悟出了普朗克常数的存在后,科学家们做了大量、细致的微观框架中的实验,对微观世界做了信息探测,才有可能感知到支配微观世界的规律。这当然需要悟性很高的人做先驱的工作。狄拉克就是这样的先驱之一,他发明了描述量子力学最有效、最方便、最精炼的“文字”,并附之以“语法结构”,于是人们就可以开始进行“语言”的交流,并在使用中丰富与发展了这种“语言”,使之更深刻、更全面地反映自然规律。

对于量子力学的初学者来说,狄拉克符号法是“神秘”的,他们很难理解这种抽象的理论是如何想出来的。这样,他们就不得不在逐渐“习惯”它的过程中去理解、掌握它。本书作者就是在“习惯”这种特殊的语言中逐步发现了狄拉克符号法的魅力,发现它具有逐步展开的能力,有一些预想不到、出乎意外的新用途。这正好应了狄拉克生前的预言:“……在将来,当它(符号法)变得更为人们所了解,而且它本身的数学得到发展之时,它将更多地被人们所采用。”<sup>[1]</sup>

笔者在“习惯”符号法的过程中创造了有序算符内的积分理论,进一步体会到狄拉克关于量子力学的基本符号不但十分可靠、准确地表达了物理内涵,而且简化了人们的思维过程,增强了思维能力。符号法有相对的独立性,“它比使用它的人聪明。”就笔者本人而言,从中看到了蕴藏在符号法内部的深层次的美,找到了符号法的很多新应用(尤其是在建立了连续纠缠态表象后),认识到狄拉克创造的符号法确实是描述量子宇宙的语言,是演奏“量子乐曲”的音乐乐谱的“音符”。符号法的优美与简洁、实用与准确,通过有序算符内的积分理论表现得淋漓尽致,它是表述量子论的永恒的载体。英国文学家莎士比亚曾说:“简洁是智慧的灵魂……所以我力求精炼。”笔者通过 20 多年的研究,提高了对科学中蕴含艺术美的鉴赏力。记得狄拉克曾说过:“在我遇到的所有物理学家中,薛定谔是跟我自己最相似的一个。……我相信薛定谔和我都对数学的美有一种深刻的鉴赏力,这主宰了我们的工作。在我们心里有一种信念,任何描述自然界基本规律的等式都必须存在伟大的数学美。这是一种有益的信仰,也是我们成功的基础。”同样,追求表现狄拉克符号法内在的美,也主宰了笔者 20 多年来的研究历程,这也正是撰写本书的指导思想,并充分反映出笔者对理论物理的“艺术”感受。

本书首先介绍有序算符内的积分法,这可以说是符号法中的算符积分规则,它可以使存在于经典力学中的可对易数( $c$  数)运算与量子力学中的不可对易算符( $q$  数)运算间的“鸿沟”深度有某种程度的“变浅”。具体而言,可以把算符在某些排序明确的情况下看作是可以对易的  $c$  数,但算符的本性不变。在这样认定以后,人们就可以把那些在对  $c$  数积分中出现的 ket-bra 型算符看作是积分参数,而使积分能按通常方式进行。这样一来,就可以极大地发展量子力学的表象理论,找到许多新的物理上有用的完备的表象和大量有用的量子么正变换算符,由此推陈出新,使量子力学的表象与变换论得到别开生面的发展。

量子力学的表象理论最早是由狄拉克奠定的。对于特定的动力学系统,寻找一个合适的表象,不但具有运动学的意义,而且具有用对角化哈密顿量求得能级与能量本征态的动力学意义。尤其是在本书第二章讨论的连续变量的 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)<sup>[2]</sup>类型的纠缠态表象,更是在量子通信中有重要的应用,因为量子纠缠现象只有在纠缠态表象中叙述才最清楚。基于量子力学纠缠态表象在量子计算与量子通信中的重要性,无疑应成为量子力学的数理基础之一。

读者将会看到,有序算符内的积分理论和量子力学的纠缠态表象相结合,将极大地促进相干态理论、压缩态理论、相位算符理论、量子主方程的经典对应理论等的发展,而这些理论构成了量子光学的主要数理基础。因此,借助于有序算符内的积分理论,就可以直捷地从量子力学的数理基础进入到量子光学的数理理论。

量子光学是在量子力学规律(原理)和爱因斯坦光的辐射理论支配下建立起来的描述光的量子性质、相干性质、各种非经典行为的学科,这些性质或行为体现在光场本身及与原子的相互作用中(例如原子发射和吸收光子的机理、光子与原子相互作用中动量转移造成原子的冷却与俘获、小型腔中的原子辐射等等)。在研究光的量子理论方面,人们还着眼于研究光的量子噪声,因为它不仅提供了最好的范例来说明量子力学的海森堡测不准原理,而且还促使物理学家去制备由光的非线性过程产生的压缩光场,它的一个正交分量具有比相干态更小的量子噪声。从某种意义上来说,量子光学也是量子信息(量子通信、量子密码术与量子计算)的基础,与此相关的各种光场量子态的制备与操纵、量子无损测量等也是量子光学的研究对象,而 20 世纪 60 年代出现的激光器(由相干态描写)则是量子光学的实验支柱。

由于量子光学自身显明的个性,研究它的数学物理方法也与别的物理学分支有所不同。这方面的内容在 W H Louisell 的《辐射的量子统计性质》一书<sup>[3]</sup>中有较详尽的介绍,读者可以从此书中



了解到那个时期关于量子光学的一些主要理论。在 Louisell 的书出版以后,国际上陆续出现了不少介绍量子光学数理基础的优秀书籍,在若干具体问题上也取得一些进展,但基本框架与 Louisell 的书的思路相似。

笔者在 20 世纪 80 年代初就发现进入量子光场研究的捷径是从基本的坐标表象出发,构造 ket 与 bra 不互为共轭虚量的积分型投影算符  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \frac{x}{\mu} \right\rangle \langle x |$ , 然后用有序算符内的积分技术积分之,便立即得到正规乘积形式的单模压缩算符。到了 90 年代,在建立了 EPR 纠缠态以后,笔者又发现用纠缠态  $|\eta\rangle$  构造另一类积分型投影算符  $\int \frac{d^2\eta}{\pi} \left| \frac{\eta}{\mu} \right\rangle \langle \eta |$ , 再用有序算符内积分方法,就得到正规乘积形式的双模压缩算符,这样就自然地把压缩态与纠缠态联系了起来。所以,这可能是从量子力学到量子光学数理阐述的最佳途径。有序算符内的积分理论使得原来只适用于  $c$  数函数积分的牛顿-莱布尼兹规则现在也适用于量子力学中的算符积分,在这个意义上,它是符号法发展进程中的一个里程碑。

有序算符内的积分理论对量子光学特别有效的另一个原因是前者能把经典  $c$  数空间中的正则变换直捷地过渡到量子希尔伯特空间中算符的么正变换,架起了经典力学与量子力学对应变换方面的一座“桥梁”。这是对狄拉克奠定的量子力学中变换理论的一个重要补充。狄拉克本人生前十分珍惜与怀念在哥本哈根时度过的美好时光,在那段岁月中他发展了量子力学的物理解释(变换理论),这给了他很多快乐。他说:“我的许多论文是相当偶然的一种思绪袭来的结果。例如,我早期关于泊松括号的工作以及后续的关于相对论波动方程的工作都是非常确定地属于这种性质。它们是一个思想闪现的结果。我说不好它们是如何出现的,所以我觉得这类工作在相当程度上不应属于我的成功。与此相反,我关于量子力学的物理诠释的研究成功确实是非我莫属。……它奠定