前　言

常微分方程是数学学科各专业的一门重要的基础课，是整个数学课程体系中的一个重要的组成部分。同时它也是基础数学、应用数学等专业硕士研究生入学考试的一门考试科目或复试科目。笔者根据多年的教学经验和讲授考研辅导班的教案编写了本书，希望它能对数学专业、理工科等开设常微分方程或高等数学课程的各专业的教师及学生有所帮助。

本书分两部分。

第一部分，按照高等教育出版社出版的《常微分方程》（王高雄等编，第二版）的章节顺序分为七章，每章均设计了三个方面的内容。

一、知识脉络图解

这部分用框图的形式，概括本章的重要内容，反映各知识点之间的内在联系。

二、重点、要点全析

这部分列出了本章的基本概念、基本定理，同时总结本章的基本方法，突出本章的重点、难点和要点。

三、典型例题及习题精选详解

在融会自己多年的知识经验和参阅大量的中外常微分方程教材和辅导书的基础上精心设计的典型例题，从《常微分方程》（王高雄等编，第二版）教材中精选出了具有代表性的习题，对其进行了分析解答，有的还附有多种解题方法，并从解题思路、解题技巧、知识点的联系以及考试、考研需注意的问题等方面对每道题进行了评注。

第二部分为附录，按照 120 min 题量，100 分满分的标准精选出了教学过程中的五套课程考试真题，并附有详细解答；按照 180 min 题量，150 分满分的标准精选出了历年考研中 5 套考研真题，并附有详细解答。每套题有以下特点：题型多样，包括选择题、填空题、运算题、改错题、分析题、应用题等；知识面广，涵盖每章的重要知识点；有难有易，难易适中，有考查基本概念的简单问题，也有反映基本理论和基本方法灵活运用的综合性问题。

本书从指导课程教学、学习和应试的角度，通过对典型例题和精选习题进行详细分析和解答，进一步介绍了常微分方程的解题方法、解题规律和解题技巧，从而有助于广大读者和考生更深刻地理解常微分方程的基本概念和理论、提高分析问题的能力、开拓解题思路、掌握解题技巧、全面增强数学素质。

本书主要是基于窦霁虹副教授 20 余年的教学教案和考研辅导教案编写而成。齐新社和

李锋等研究生做了大量的整理和录入工作。朱钤教授对本书进行了全面仔细地审阅并提出改进意见。在此对他们表示衷心感谢。

由于编者水平有限，若书中有疏漏之处，恳请广大读者批评指正。若对书中内容的处理有不同看法，欢迎探讨，共同提高。

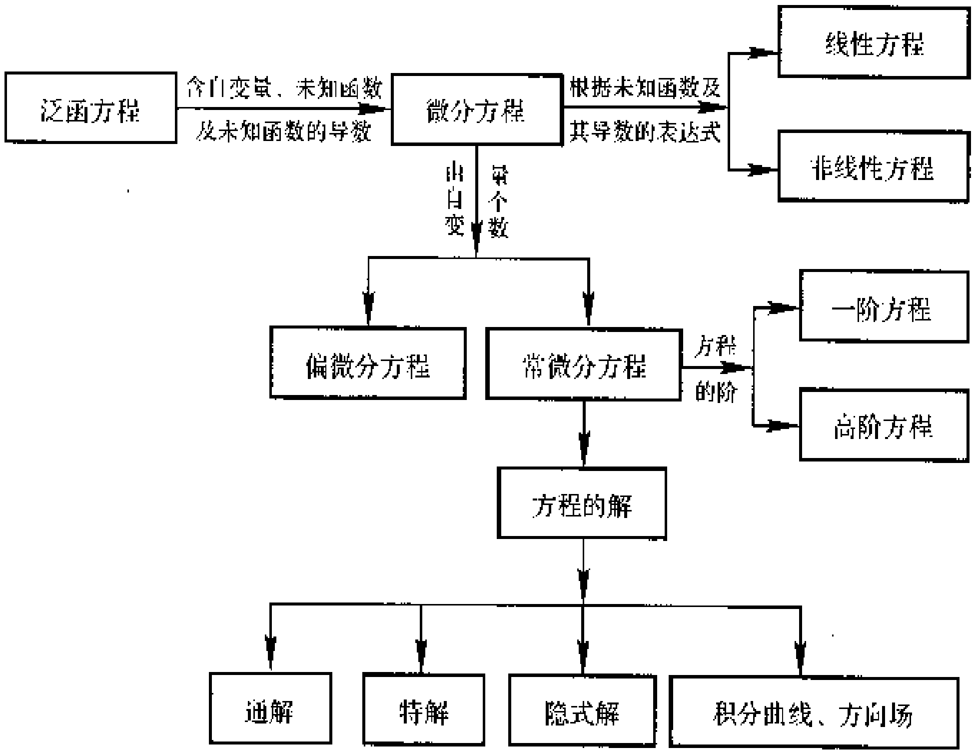
编著者

2007年3月于西北大学

目 录

第一章 绪 论

1.1 知识脉络图解



1.2 重点、要点全析

1. 常微分方程和偏微分方程

在微分方程中,只含有一个自变量的方程称为常微分方程,有两个或两个以上自变量的方程称为偏微分方程.

2. 一阶与高阶微分方程

在一个微分方程中,所出现的未知函数导数的最高阶数 n 称为该方程的阶,当 $n=1$ 时,称为一阶微分方程;当 $n>1$ 时,称为高阶微分方程.

一阶常微分方程的一般显式形式为 $y'=f(x,y)$.

一阶常微分方程的一般隐式形式为 $F(x,y,y')=0$.

n 阶显方程的一般形式为 $y^{(n)} = f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$.

n 阶隐方程的一般形式为 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0$.

其中 F 及 f 分别是它所依赖的变元的已知函数.

3. 线性和非线性微分方程

如果微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0$ 的左端为未知函数及其各阶导数的一次有理整式,则它称为线性微分方程,否则,为非线性微分方程.

n 阶线性微分方程的一般形式为 $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x)$

其中 $a_0(x) \neq 0, a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x), g(x)$ 均为 x 的已知函数.

4. 方程的解

对于微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0$,若将函数 $y = \varphi(x)$ 代入方程后使其有意义且两端相等,即 $F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$,则称函数 $y = \varphi(x)$ 为该方程的一个显式解.若方程的解是某关系式的隐函数,称这个关系式为该方程的隐式解.

方程显式解和隐式解统称为微分方程的解.

5. 通解和特解

常微分方程的解的表达式中,可能包含一个或者几个任意常数,若其所包含的独立的任意常数的个数恰好与该方程的阶数相同,称这样的解为该微分方程的通解.

满足某些条件的解称为微分方程的特解.

6. 初始条件的表示

对于 n 阶方程 $y^{(n)} = f(x,y,y,\cdots,y^{(n-1)})$ 初始条件可表示为

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0'',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

n 阶方程初值问题(Cauchy Problem)的表示:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x,y,y,\cdots,y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0'',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

7. 积分曲线和积分曲线族

一阶微分方程
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1.1}$$
的解 $y = \varphi(x)$ 表示 xOy 平面上的一条曲线,称此曲线为微分方程的积分曲线,而微分方程的通解 $y = \varphi(x,C)$,表示 xOy 平面的一族曲线,称它们为微分方程的积分曲线族.

8. 微分方程的几何解释——方向场

对于一阶微分方程(1.1),其右端函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D,在 D 内的每一点 (x,y) 处,画一个小线段,其斜率等于 $f(x,y)$,此时,点集 D 就成为带有方向的点集.称此规定了方向的区域为由方程 $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ 所确定的方向场.

常微分方程求解的几何意义:

在方向场中寻求一条曲线,使这条曲线上每一点切线的方向等于方向场中该点的方向.

1.3　典型例题及习题精选详解

一、典型例题

例 1－1　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2$ 的通解，并分别求满足下列条件的特解．

(1) 通过点 $(2,1)$；

(2) 与直线 $y=x$ 相切；

(3) 与直线 $y=-3x+1$ 正交．

解　直接积分得方程的通解为 $y=x^3+C$.

(1) 将 $x=2,y=1$ 代入通解中得 $C=-7$，则通过点 $(2,1)$ 的解为 $y=x^3-7$.

(2) 与直线 $y=x$ 相切的解满足在切点处斜率相同，有 $3x^2=1$，即得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，切点坐标为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 同(1) 的解法，与直线 $y=x$ 相切的解为 $y=x^3+\frac{2}{3\sqrt{3}}$ 和 $y=x^3-\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

(3) 与直线 $y=-3x+1$ 正交的解在正交点处斜率满足 $3x^2=\frac{1}{3}$，即得 $x=\pm\frac{1}{3}$，正交点坐标为 $\left(\frac{1}{3},0\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{3},2\right)$. 同(1) 的解法所求方程的解为 $y=x^3+\frac{55}{27}$ 和 $y=x^3-\frac{1}{27}$.

评注　求方程满足某条件的特解，关键要找到所求积分曲线经过的某一特定点的坐标，代入通解中确定出任意常数即可得特解．

例 1－2　求与曲线族 $y=Ce^x$ 正交的曲线族．

解　因为曲线族 $y=Ce^x$ 满足的微分方程为 $y'=y$，所以与曲线族 $y=Ce^x$ 正交的曲线族满足的微分方程为 $y'=-\frac{1}{y}$，解之得 $y^2=-2x+C$，这就是所求曲线族方程．

评注　首先对已给定的曲线族求得其满足的微分方程，其次借助于正交性得到所求曲线族满足的微分方程，再求解此微分方程．有时直接给出一个微分方程，要求求得与此微分方程的积分曲线族正交(或夹角为某一固定值)的曲线族．

例 1－3　求一曲线方程，使曲线上任一点平分过该点的法线在两坐标轴之间的线段．

解　设所求的曲线为 $y=y(x)$，过曲线上任一点 (x,y) 的法线方程为

$$Y=-\frac{1}{y'}(X-x)+y$$

它与 x,y 轴的交点分别为 $(yy'+x,0)$，$\left(0,\frac{x}{y'}+y\right)$，由题可得

$$\begin{cases}2x=yy'+x\\2y=\frac{x}{y'}+y\end{cases}$$

故这条曲线满足方程

$$\begin{cases} x = yy' \\ y = \dfrac{x}{y'} \end{cases}, \quad \text{即} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

解之得 $y^2 - x^2 = C$，这就是所求曲线方程．

评注 根据题目的具体已知条件和基本的数学公式及定理建立等式关系，注意切线与法线的特点及其关系，从而列出微分方程，经常会用到曲线 $y = f(x)$ 在一点 (x,y) 的斜率表达式 $\frac{dy}{dx}$，过该点的切线的横截距 $x - \frac{y}{y'}$ 和纵截距 $y - xy'$ 及过该点的法线的横截距 $yy' + x$ 和纵截距 $\frac{x}{y'} + y$ 等表达式．

例 1-4 质量为 m 的物体在重力的作用下，沿铅直线下落，物体下落距离 s（向下为正）随时间而改变．在不考虑空气阻力的情况下，试求出距离 s 应满足的微分方程．

解 设在时刻 t 物体下落的距离为 $s(t)$，则按牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = mg \ (g \text{ 为重力加速度})$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g$$

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

评注 这是根据实际意义建立相应的微分方程模型来解决问题的，关键要掌握方程中各个变量的具体物理意义，例如，$\frac{ds}{dt} = v$，$\frac{dv}{dt} = a$，$\frac{d^2 s}{dt^2} = a$ 等等，再结合物理学中的基本定律和定理来建立方程．

二、习题精选详解

1-1 求下列两个微分方程的公共解．

(1) $y' = y^2 + 2x - x^4$；　　(2) $y' = 2x + x^2 + x^4 - y - y^2$.

解 两方程的公共解满足条件

$$2x + x^2 + x^4 - y - y^2 = y^2 + 2x - x^4$$

即

$$2x^4 - 2y^2 + x^2 - y = 0$$

$$(2x^2 + 2y + 1)(x^2 - y) = 0$$

所以 $y = x^2$ 或 $y = -\frac{1 + 2x^2}{2}$.

代入检验可知 $y = -\frac{1 + 2x^2}{2}$ 不符合，所以两方程的公共解为 $y = x^2$.

评注 此题是求解方程满足一定条件的解，即求两个微分方程的公共解．在求解时由于令其导数相等，很容易产生增解，因而要对所求结果回代原方程进行检验，舍去增解．

1-2 求微分方程 $y' + xy'^2 - y = 0$ 的直线积分曲线．

解 设直线积分曲线为 $y = ax + b$，则 $y' = a$，代入原方程得

$$a + xa^2 - ax - b = 0$$

即 $x(a^2 - a) + (a - b) \equiv 0$，所以

$$\begin{cases} a^2 - a = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

可得 $a=b=0$ 或 $a=b=1$.

因而所求直线积分曲线为 $y=0$ 或 $y=x+1$.

评注 此题是求解方程的部分解，采用的是待定系数法．待定系数法是求解常微分方程常用的方法之一，有待定常数法和待定函数法．本题首先设出满足题设条件的含有待定常数的解，然后代入原方程来确定待定常数，解决此类问题的关键在于正确地设出解的形式．

1-3 微分方程 $4x^2y'^2-y^2=xy^3$，证明其积分曲线是关于坐标原点成中心对称的曲线．

证 设 $y=\varphi(x)$ 满足微分方程，只须证明 $y=-\varphi(-x)$ 也满足方程即可．

作变换 $t=-x$，则证明 $y=-\varphi(t)$ 满足方程即可，代入方程两端，并利用 $y=\varphi(x)$ 满足此方程，得

$$左=4t^2\varphi'^2(t)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2-\varphi^2(t)=4t^2\varphi'^2(t)(-1)^2-\varphi^2(t)=$$

$$4t^2\varphi'^2(t)-\varphi^2(t)=t\varphi^3(t)=(-t)\cdot(-\varphi(t))^3=右$$

故 $y=-\varphi(t)$ 也满足方程 $4x^2y'^2-y^2=xy^3$.

评注 为了验证 $y=-\varphi(-x)$ 也满足方程，利用积分曲线的性质，进行变量代换 $t=-x$，将 $y=-\varphi(-x)$ 变换成 $y=-\varphi(t)$ 后，问题就很容易解决了．

1-4 物体在空气中的冷却速度与物体和空气的温差成正比，如果物体在 20 min 内由 100℃ 冷却至 60℃，那么，在多长时间内，这个物体由 100℃ 冷却至 30℃？假设空气的温度为 20℃.

解 设物体在空气中时刻 t 的温度为 $T=T(t)$，则依牛顿冷却定理得

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-20)$$

其中 k 是比例常数．

两边积分，得通解为 $T=20+Ce^{-kt}$.

由于初始条件 $T(0)=100$，得 $C=80$，所以 $T=20+80e^{-kt}$.

将 $t=20$、$T=60$ 代入上式后即得 $k=\dfrac{\ln 2}{20}$，即 $T=20+80e^{-\frac{\ln 2}{20}t}=20+80\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$.

故当 $T=30$ 时，有 $30=20+80\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$，从中解出 $t=60$ min，因此，在一小时内，可使物体由 100℃ 冷却至 30℃.

评注 这是来自于物理学领域的问题，注意运用基本定律和定理来建立微分方程模型．

1-5 求一曲线族，使它的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的两部分．

解 **解法1** 设所求曲线方程为 $y=y(x)$，过曲线上任一点 $P(x,y)$ 的切线交 Ox 轴于点 A，交 Oy 轴于点 B，由题意，P 为 AB 的中点，不妨设 $A(2x,0)$，$B(0,2y)$，则切线斜率为

$$K=\frac{2y-0}{0-2x}=-\frac{y}{x}$$

另一方面，曲线在 P 点的切线的斜率为 $\dfrac{dy}{dx}$，得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

将变量分离，得到 $$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

两边积分得

$$\ln|y|=-\ln|x|+C$$

因此，方程的通解为 $xy=C$，即所求的曲线族为 $xy=C(C\neq 0)$.

解法 2 设所求的曲线为 $y=y(x)$，过曲线上任一点 (x,y) 的切线方程为

$$Y=y'(X-x)+y$$

它与 x，y 轴的交点分别为 $\left(\frac{-y}{y'}+x,0\right)$，$(0,-xy'+y)$，由题意可得

$$\begin{cases}2x=\frac{-y}{y'}+x\\2y=-xy'+y\end{cases}$$

故这条曲线满足方程为

$$\begin{cases}x=\frac{-y}{y'},\\y=-xy'\end{cases}\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-y}{x}$$

解之可得方程的解为 $xy=C(C\neq 0)$.

1-6 求一曲线所满足的微分方程，过该曲线上任何一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积等于常数 a^2.

解 设所求曲线为 $y=y(x)$，过曲线上任一点 $P(x,y)$ 的切线方程为

$$Y-y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(X-x)$$

与两坐标轴的截距分别为

$$a_1=x-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\quad a_2=y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

由三角形的面积公式可得

$$\left|\frac{1}{2}\left(x-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)\left(y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right|=a^2$$

整理可得

$$\left|(y-xy')\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=2a^2$$

这就是所求曲线满足的微分方程.

1-7 求一曲线所满足的微分方程，使该曲线上任一点的切线与该点的向径夹角为零.

解 设曲线为 $y=f(x)$，过其上点 (x,y) 切线斜率为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，向径的斜率为 $\frac{y}{x}$，由于二者的夹角为零，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}$，即所求曲线满足的微分方程为 $xy'-y=0$.

评注 以上三题的求解方法类似于例 1-3，这是考研中常见的题型.

第二章　一阶微分方程的初等解法

2.1　知识脉络图解

- 常见几类一阶微分方程的初等解法
  - 变量分离法，方程特征 $\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$
    - 变量变换法，齐次方程 $\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})$ 令 $u=\frac{y}{x}$ → 变量分离法
  - 线性方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$（常数变易法或公式法）
    - 线性齐次方程（$Q(x)\equiv0$）（分离变量法）
    - 伯努利方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n(n\neq0,1)$ 令 $z=y^{1-n}$ → 线性方程
    - 黎卡提方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$ 知其一特解 → 伯努利方程
  - 恰当方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$
    - 凑微分法或公式法
    - 利用积分因子将非恰当方程化为恰当方程
  - 一阶隐方程与参数表示
    - 可以解出 y（或 x）的方程 $y=f(x,y')$；$x=f(y,y')$
    - 不显含 y（或 x）的方程 $F(x,y')=0$；$F=(y,y')=0$

2.2 重点、要点全析

研究对象：一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \quad 与 \quad F(x,y,y')=0$$

的求解问题．

1．变量可分离方程

形如$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$的方程，称为变量可分离方程，其中$f(x)$和$\varphi(y)$分别是$x,y$的连续函数．

(1) 变量可分离方程的解法：

对于变量分离方程 $$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$$

分离变量得 $$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx$$

再积分，得 $$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx$$

这就是方程的通解．

注意：在变量分离的过程中，必须保证$\varphi(y)\neq 0$．但如果$\varphi(y)=0$有根为$y=y_0$，则不难验证$y=y_0$也是微分方程的解，有时无论怎样扩充通解的表达式中的任意常数，此解不包含在其中，解题时要另外补充上，不能遗漏．

(2) 可化为可分离变量的方程：

1) 齐次方程$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$，令$u=\frac{y}{x}$，方程可化为分离变量的方程，$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$．

2) 分式线性方程$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$．

下面分三种情形来讨论：

① $c_1=c_2=0$，这时$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}$为齐次方程．

② $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$及$c_1^2+c_2^2\neq 0$，这时可作变换$x=\xi+h,y=\eta+k$，其中$h,k$是线性代数方程$\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0\\ a_2h+b_2k+c_2=0\end{cases}$的唯一解，可将方程化为齐次方程$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}$．

③ $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$及$c_1^2+c_2^2\neq 0$，这时可设$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda$，方程可化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}$$

再令$a_2x+b_2y=u$，则方程可进一步化为$\frac{du}{dx}=a_2+b_2\frac{\lambda u+c_1}{u+c_2}$，这是一个变量可分离方程．

3) 其他类型的方程．利用整体代换的思想，可将其他类型的方程化为变量可分离方程．

例如：$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$，令$u=ax+by+c$；

$yf(xy)\mathrm{d}x + xg(xy)\mathrm{d}y = 0$，令 $u = xy$；

$x^2 \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(xy)$，令 $u = xy$；

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xf\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$，令 $u = \dfrac{y}{x^2}$.

2. 一阶线性微分方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)$ 的方程称为一阶线性方程，当 $Q(x) \equiv 0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y$ 称为一阶线性齐次方程，当 $Q(x) \not\equiv 0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)$ 称为一阶线性非齐次方程．

(1) 一阶线性方程的解法及其性质：

1) 一阶线性方程的解法．首先求其对应的线性齐次方程 $y' = P(x)y$ 的通解：利用分离变量法可得其通解为

$$y = Ce^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

其中 C 为任意常数，满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解是

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t}$$

其次利用常数变易法求线性非齐次方程的通解：将线性齐次方程通解中的任意常数变易为待定函数来求线性非齐次方程的通解，此方法称为常数变易法．

可得通解为
$$y = e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]$$

满足初始条件 $\varphi(x_0) = y_0$ 的特解为

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} P(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\right]$$

线性非齐次方程通解的结构为：线性非齐次方程的通解等于其对应线性齐次方程的通解与线性非齐次方程的一个特解之和．

2) 线性齐次方程解的性质：

性质 1　必有零解 $y = 0$.

性质 2　通解等于任意常数 C 与一个非零特解的乘积．

性质 3　若 y_1, y_2 均为齐次方程的解，则 $\alpha y_1 + \beta y_2$ 也是该方程的解，其中 α, β 为任意常数．

3) 线性非齐次方程解的性质：

性质 1　无零解，所有的解不能构成线性空间．

性质 2　若 y_1 是齐次方程的解，y_2 是非齐次方程的解，则 $y = Cy_1 + y_2$ 也是非齐次方程的解，其中 C 为任意常数．

性质 3　若 y_1, y_2 均为非齐次方程的解，则 $y_1 - y_2$ 为相应的齐次方程的解．

性质 4　(叠加原理) 若 y_1 是 $y' = P(x)y + Q_1(x)$ 的解，y_2 是 $y' = P(x)y + Q_2(x)$ 的解，则 $y_1 + y_2$ 是 $y' = P(x)y + Q_1(x) + Q_2(x)$ 的解．

(2) 可化为一阶线性方程的方程：

① 伯努利(Bernoulli)方程．形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)y^n$ 的方程(n 是常数，且 $n \neq 0, 1$)，称为伯努利方程，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的连续函数．

伯努利方程的解法

作变换 $z=y^{1-n}$ 可将原方程变为

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$$

这是关于未知函数 z 的线性方程,即可得到它的通解.

② 黎卡提(Riccati)方程.形如 $\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$ 的方程,称为黎卡提方程,其中 $P(x)$,$Q(x)$ 和 $R(x)$ 为 x 的连续函数.

黎卡提方程的解法

显然当 $f(x)\equiv 0$,这就是伯努利方程.

当 $f(x)$ 不恒为零时,一般无法对它精确求解,但如果已知它的一个特解 $y=\varphi(x)$,则可通过变换 $y=u+\varphi(x)$,而得到一个关于 u 的伯努利方程,从而可求出它的通解,因此,求解黎卡提方程的关键是寻求它的一个特解.

③ 雅克比(Jacobi)方程.形如 $(a_1+b_1x+c_1y)(xdy-ydx)-(a_2+b_2x+c_2y)dy+(a_3+b_3x+c_3y)dx=0$ 的方程称为雅克比方程,其中 $(a_i,b_i,c_i)(i=1,2,3)$ 是常数.

雅可比方程的解法

作变换 $x=X+\alpha,y=Y+\beta$,其中 α,β 是使得 $XdY-YdX,dY,dX$ 为关于 X,Y 为齐次的.变换之后,方程变为一阶的,而且 $XdY-YdX$ 的系数是齐次的,因此

$$(b_1X+c_1Y)(XdY-YdX)-\{A_2+b_2X+c_2Y-\alpha(A_1+b_1X+c_1Y)-$$
$$A_1X\}dY+\{A_3+b_3X+c_3Y-\beta(A_1+b_1X+c_1Y)-A_1Y\}dX=0$$

这里 $A_r=a_r+b_r\alpha+c_r\beta(r=1,2,3)$.

如果 α,β 的选择使得 $A_2-\alpha A_1=0,A_3-\beta A_1=0$ 成立,则 dX,dY 的系数也变成了齐次的,或更加对称的,如果 $A_1=\lambda,A_2=\alpha\lambda,A_3=\beta\lambda$,即

$$a_1-\lambda+b_1\alpha+c_1\beta=a_2+(b_2-\lambda)\alpha+c_2\beta=a_3+b_3\alpha+(c_3-\lambda)\beta=0 \tag{A}$$

因此 λ 由下面的三次方程定义

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-\lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

这样定义 λ 之后,α,β 就是式(A)的任意两个相容方程的解.

方程可以被写成以下形式

$$XdY-YdX-\varphi\left(\frac{Y}{X}\right)dY+\psi\left(\frac{Y}{X}\right)dX=0$$

作变换 $Y=Xu$ 可将该方程化为伯努利方程

$$\frac{dX}{du}+U_1X+U_2X^2=0$$

这里 U_1,U_2 只是 u 的函数.另外,如果关于 λ 的方程有三个不等的根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则雅可比方程的通解形式为

$$U^{\lambda_2-\lambda_3}V^{\lambda_3-\lambda_1}W^{\lambda_1-\lambda_2}=C$$

其中 U,V,W 关于 x,y 线性式.

3. 一阶对称形式的微分方程

若将一阶显式微分方程写成微分形式

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{2.1}$$

此形式称为一阶对称形式的微分方程．

(1) 恰当方程：如果对称形式的方程(2.1)的左端恰好是某一个二元函数 $U(x,y)$ 的全微分，则称该方程为恰当方程．

恰当方程的判定

定理 2.1　假设函数 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 在某区域内连续可微，则方程(2.1)是恰当方程的充分必要条件是在此区域内恒有 $\dfrac{\partial M}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial N}{\partial x}$ 成立．

恰当方程的解法

方法 1　凑微分法：利用熟知的二元函数微分公式，重新分组组合，分块凑成全微分式．

方法 2　不定积分法：利用关系式

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}U(x,y)$$

由此，函数 $U(x,y)$ 应适合方程组

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y),\quad \frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y)$$

对 $\dfrac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)$ 关于 x 积分得　$U=\int M(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y)$

两端关于 y 求导数，并利用恰当方程的充分必要条件，得

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\int\frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}x+\varphi'(y)=\int\frac{\partial N}{\partial x}\mathrm{d}x+\varphi'(y)=N(x,y)$$

通过对方程

$$\int\frac{\partial N}{\partial x}\mathrm{d}x+\varphi'(y)=N(x,y)$$

关于 y 积分，解出 $\varphi(y)$，从而可得 $U=\int M(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y)$ 的表达式，令 $U=\int M(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y)=C$，即得方程的通解．

如果对 $\dfrac{\partial U}{\partial y}=N(x,y)$ 关于 y 积分，同理可得方程的通解为

$$U=\int M(x,y)\mathrm{d}x+\psi(x)=C$$

其中 $\psi(x)$ 可类似于求解 $\varphi(y)$ 的方法得到．

方法 3　公式法：方程的通解为

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\mathrm{d}y=C$$

或

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}N(x,y)\mathrm{d}y=C$$

其中 C 是任意常数．

求解时，x_0，y_0 的选择要尽可能简单，且使 $M(x,y)$，$N(x,y)$ 有意义．

注意：求解恰当方程的关键就是求方程左端微分式的原函数问题．

(2) 非恰当方程：

1) 积分因子及其性质．对于方程(2.1)，如果存在某连续可微的函数 $\mu(x,y)\neq0$，使得

$$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

为恰当方程，则称 $\mu(x,y)$ 为方程(2.1)的一个积分因子．

因此求解非恰当方程的关键是寻找合适的积分因子，从而将非恰当方程转化为恰当方程的求解问题．

性质1　只要方程(2.1)有解，则必有积分因子，而且不是唯一的，对于不同的积分因子，通解可能具有不同的形式．

性质2　方程(2.1)的任意两个积分因子 $\mu_1(x,y)$ 和 $\mu_2(x,y)$ 之间必有函数关系．

性质3　若方程(2.1)有两个积分因子 $\mu_1(x,y)$ 和 $\mu_2(x,y)$，且 $\dfrac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}\neq$ 常数，则该方程的通积分为 $\dfrac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}=C$.

注意：方程两端同乘以积分因子 $\mu(x,y)$ 可能出现使此因子为零的多余特解，注意检验．

2）寻求积分因子的方法：

① 观察法．利用已知的或熟悉的微分式的原函数求积分因子．

② 公式法．利用积分因子满足的微分方程来求积分因子．

定理2.2　函数 $\mu(x,y)$ 是方程(2.1)的积分因子的充分必要条件是 $\mu(x,y)$ 满足一阶偏微分方程

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

利用定理2.2，容易得到下列寻求积分因子的简捷方法．

结论1　方程(2.1)有只与 x 有关的积分因子的充分必要条件是

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(x)$$

此时，积分因子为 $\mu(x,y)=\mathrm{e}^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}$.

结论2　方程(2.1)有只与 y 有关的积分因子的充分必要条件是

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\psi(y)$$

此时，积分因子为 $\mu(x,y)=\mathrm{e}^{\int\psi(y)\mathrm{d}y}$.

③ 分组组合法．分组组合方法的原理：若方程(2.1)可进行下列分组组合

$$[M_1(x,y)\mathrm{d}x+N_1(x,y)\mathrm{d}y]+[M_2(x,y)\mathrm{d}x+N_2(x,y)\mathrm{d}y]=0$$

并且

$$\mu_1(x,y)(M_1(x,y)\mathrm{d}x+N_1(x,y)\mathrm{d}y)=\mathrm{d}U_1(x,y)$$

$$\mu_2(x,y)(M_2(x,y)\mathrm{d}x+N_2(x,y)\mathrm{d}y)=\mathrm{d}U_2(x,y)$$

寻找适当的可微函数 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 使得 $\mu_1(x,y)\varphi_1(U)=\mu_2(x,y)\varphi_2(U)$，则原方程的积分因子为 $\mu_1(x,y)\varphi_1(U)=\mu_2(x,y)\varphi_2(U)$.

④ 待定指数法．对于系数为多项式的对称形式的方程，常利用待定指数法求其积分因子．设方程具有积分因子为 $\mu=x^\alpha y^\beta$，其中 α,β 为待定常数，根据积分因子的意义和恰当方程满足的充要条件，通过比较系数求出 α 和 β 即可．

⑤ 换元法．

（ⅰ）若能确定适当的变换 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，使得方程(2.1)变换为易积分的方程 $M_1(u,v)\mathrm{d}u+N_1(u,v)\mathrm{d}v=0$，其中 $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}v=\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$.

（ⅱ）若能确定适当的变换 $x=x(t,s)$，$y=y(t,s)$，使得方程(2.1)变换为易积分的方程 $M_2(t,s)\mathrm{d}t+N_2(t,s)\mathrm{d}s=0$，其中 $\mathrm{d}x=\dfrac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t+\dfrac{\partial x}{\partial s}\mathrm{d}s$，$\mathrm{d}y=\dfrac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t+\dfrac{\partial y}{\partial s}\mathrm{d}s$.