出版说明

CHUBANSHUOMING

吉米多维奇是前苏联有影响的教育家和数学家。他主编的《吉米多维奇数学分析习题集》(含 4462 道习题)和《工科用数学分析中的问题和练习》(含 3193 道习题),内容丰富,覆盖面广泛,针对性强,在我国有较大的影响,书中的许多习题,都广泛地被我国多种高等数学教材所采用,有些题目甚至出现在全国考研等试题中。

但是由于该书题量较大,部分习题难度大,全部用来练习耗时较多,为了让读者在一定的时间内达到较好的学习效果,提高学习效率,我们对原书进行了精选,选出了部分难度适中、有代表性且属于高等数学范畴的习题,做出了科学、规范的解答,有些还做了点评,指出了解决此类题目的思路和方法。有的题目给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维能力。

除此之外,作者还结合自已多年对考研试题的研究和多年辅导考研数学的经验,精心选择了少量近年国内研究生入学考试的典型试题,更好的体现了本书的编写宗旨。

本书共分十二章,每章又分若干节,在章节设置上和同济大学六版高等数学教材基本一致,涉及的内容涵盖了高等数学的全部主题。在本书中每章除最后一节外每节包括两大部分内容:

知识要点:简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统梳理。

基本题型:对每节常见的基本题型进行了归纳总结,便于读者理解和掌握基本知识,有利于提高读者的解题能力和数学思维水平。

每章最后一节是综合提高题型,这一节的题目综合性较强,难度较大,有相当一部分是考研真题,通过本节的学习,可以提高读者的应变能力、思维能力和分析问题、解决问题的能力,把握重点、了解考研动向、开拓视野。

出版说明

CHUBANSHUOMING

本书由山东大学张天德教授、蒋晓芸教授主编。山东大学刘建亚教授、吴臻教授对全书作了仔细的校审，并对部分习题提出了更为精妙的解题思路。该书可以作为在读大学生同步学习的优秀辅导书，也可以作为广大教师的教学参考书，还可以为毕业生考研复习和众多成人学员自学提供富有成效的帮助。读者使用本书时，宜先独立求解，然后再与本书作比较，这样一定会获益匪浅，掌握较多的有用知识。

书中不当之处，恳请指正。

编　者

2007 年 7 月

目录

MULU

目 录
MULU

目 录

MULU

目 录
MULU

第一章　极限与连续

§1. 函　　数

1. 函数的概念　设有两个变量 x 与 y，如果变量 x 在其变化范围 D 内任取一个确定的数值时，变量 y 按照一定的规则 f 总有惟一确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，f 表示由 x 确定 y 的对应规则.

2. 函数的主要性质

(1)有界性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正常数 M，使得对于 x 在 D 上的任意取值，均有 $|f(x)|<M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

(2)单调性　设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义，如果对于 D 上任意两点 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$，均有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加（或单调减少）. 单调增加与单调减少函数统称为单调函数.

(3)奇偶性　设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 上有定义，如果对 D 上任意点 x，均有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），则称函数 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

(4)周期性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在正常数 T，使得对于 D 上任意 x，均有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，使上式成立的最小正数为周期函数的周期.

3. 基本初等函数与初等函数　常数函数　$y=c$（c 为常数），幂函数 $y=x^a$（$a\in R$），指数函数 $y=a^x$（$a\neq 1, a>0$），对数函数 $y=\log_a x$（$a\neq 1, a>0$），三角函数和反三角函数称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合，并由一个式子表示的函数称为初等函数.

基本题型

求一元函数的定义域

【1】　函数 $y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{e-e^{(\frac{3x-1}{2})^2}}$ 的定义域为______.

解　由已知条件知

$$\begin{cases}1-2x\geqslant 0\\ (\frac{3x-1}{2})^2\leqslant 1\end{cases},\quad 即\quad \begin{cases}1-2x\geqslant 0\\ -1\leqslant \frac{3x-1}{2}\leqslant 1\end{cases}.$$

解得 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$，因此定义域为 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$.

故应填 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$.

【2】　函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ 的定义域为______.

(A)$x\in\mathbf{R}$,但 $x\neq 0$ (B)$x\in\mathbf{R}$,但 $1+\frac{1}{x}\neq 0$

(C)$x\in\mathbf{R}$,但 $x\neq 0,-1,-\frac{1}{2}$ (D)$x\in\mathbf{R}$,但 $x\neq 0,-1$

解 由 $x\neq 0, 1+\frac{1}{x}\neq 0, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\neq 0$,得 $x\neq 0,-1,-\frac{1}{2}$.

故应选(C).

【3】 已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)$的定义域为________.

解 由 $\sin\varphi(x)=1-x^2$,所以 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$

从而 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$,所以 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

故应填$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

【4】 已知 $f(x)=e^{x^2}, f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,则 $\varphi(x)=$________,定义域为________.

解 因为 $f(x)=e^{x^2}$,所以 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$,而 $f[\varphi(x)]=1-x$,因此 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$.

对上式两端取对数,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

由 $\ln(1-x)\geqslant 0$,有 $1-x\geqslant 1$,即 $x\leqslant 0$.

故应填 $\sqrt{\ln(1-x)}$,$(-\infty,0]$.

【5】 已知函数 $f(\log_a x)=\sqrt{x}$,则 $f(x)=$ ________,其定义域为________,其中 $a\neq 1$,且 $a>0$.

解 令 $\log_a x=t$,则 $x=a^t$.函数 $f(\log_a x)=\sqrt{x}$可化为$f(t)=a^{\frac{t}{2}}$,从而 $f(x)=a^{\frac{x}{2}}$.

定义域为$(-\infty,+\infty)$.

故应填 $a^{\frac{x}{2}}$,$(-\infty,+\infty)$.

【6】 设 $f(x)=\tan x, f[g(x)]=x^2-2$,且$|g(x)|\leqslant\frac{\pi}{4}$,则 $g(x)$的定义域为________.

解 $f[g(x)]=\tan g(x)=x^2-2$,所以 $g(x)=\arctan(x^2-2)$.

因为$|g(x)|\leqslant\frac{\pi}{4}$,所以 $-1\leqslant x^2-2\leqslant 1$,因此 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$.

故应填$[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]$.

求初等函数的表达式

【7】 已知$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{x^4+1}$,求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$.

所以 $f(x)=\frac{1}{x^2-2}$.

【8】 设 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=3f(x)-2x$,求 $f(x)$.

解 令$\frac{x+1}{x-1}=t$,则 $x=\frac{t+1}{t-1}$,

于是 $f(t)=3f\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)-\dfrac{2t+2}{t-1}=3[3f(t)-2t]-\dfrac{2t+2}{t-1}$,

整理得 $8f(t)=6t+2\dfrac{t+1}{t-1}$,

所以 $f(x)=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}\dfrac{x+1}{x-1}$.

【9】 设$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_1(x)=f[f(x)]$, $f_2(x)=f[f_1(x)]$, ⋯, $f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$ $(n=1,2,\cdots)$. 则 $f_n(x)=$ ________.

解 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$f_1(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_2(x)=f[f_1(x)]=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

一般地,可用数学归纳法证明

$$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}\quad(n=2,3,4,\cdots).$$

故应填$\dfrac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$.

【10】 设 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$, 求 $a_1+a_2+\cdots+a_7$.

解 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$, 则

$f(0)=a_0=1$, $f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_8=1$.

比较两边 x^8 的系数 $a_8=2^8$.

故 $a_1+a_2+\cdots+a_7=1-a_0-a_8=-256$.

【11】 设 $f(x)$满足 $f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0$, 且 $f(0)=0$, 求 $f(x)$.

解 令 $t=\ln x$, 即 $x=e^t$, 则有 $f^2(t)-2e^tf(t)+te^{2t}=0$.

由此可解得 $f(t)=e^t\pm\sqrt{e^{2t}-te^{2t}}=e^t(1\pm\sqrt{1-t})$.

因为 $f(0)=0$, 由上式可得 $f(t)=e^t(1-\sqrt{1-t})$, $t\leqslant 1$.

即所求的函数为 $f(x)=e^x(1-\sqrt{1-x})$, $0<x\leqslant 1$.

求分段函数的表达式

【12】 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$, 则 $f(-x)=$ ________.

(A) $f(-x)=\begin{cases}-e^{-x}, & x\leqslant 0\\ -\cos x, & x>0\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}-\cos x, & x<0\\ e^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ e^{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$

解 当 $-x\leqslant 0$ 时, $f(-x)=e^{-(-x)}=e^x$; 当 $-x>0$ 时, $f(-x)=\cos(-x)=\cos x$.

所以 $f(-x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ e^{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$

故应选(D)

【13】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0　(B) 1　(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

解 由 $f[f(x)]=1$ 得 $f\{f[f(x)]\}=1$.

故应选(B).

【14】 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$________

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

解 $g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0\\ x^2+2, & x<0\end{cases}=\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

故应选(D).

判断函数的奇偶性

【15】 下列函数中非奇非偶的函数是________.

(A)$f(x)=3^x-3^{-x}$　(B)$f(x)=x(1-x)$

(C)$f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$　(D)$f(x)=x^2\cos x$

解 易验证(A)为奇函数,(B)为非奇非偶函数,(C)为奇函数,(D)为偶函数.

故应选(B).

【16】 设 $f(x)$ 为奇函数,判断下列函数的奇偶性:

(1)$xf(x)$　(2)$(x^2+1)f(x)$　(3)$|f(x)|$

(4)$-f(-x)$　(5)$f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$

解 (1)设 $F(x)=xf(x)$，则 $F(-x)=(-x)f(-x)=xf(x)=F(x)$,故 $xf(x)$ 为偶函数.

同理可得:(2)$(x^2+1)f(x)$为奇函数;　(3)$|f(x)|$为偶函数;

(4)$-f(-x)$为奇函数;　(5)$f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$为偶函数.

【17】 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则 $f(x)$ 是________.

(A)奇函数　(B)偶函数　(C)非奇非偶函数　(D)不能确定

解 因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，所以 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$，从而 $f(0)=0$.因为 $0=f(0)=f(x-x)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)$，所以 $f(-x)=-f(x)$，因此,$f(x)$是奇函数.

故应选(A).

【18】 设 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,且它们可以构成复合函数

$$f[f(x)],g[f(x)],f[g(x)],g[g(x)],$$

则其中为奇函数的是________.

(A)$f[f(x)]$　(B)$g[f(x)]$　(C)$f[g(x)]$　(D)$g[g(x)]$

解　由已知条件知 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$. 设 $F(x)=f[f(x)]$, 则

$$F(-x)=f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)].$$

所以 $f[f(x)]$ 为奇函数.

故应选(A).

讨论函数的单调性

【19】　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 且对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$, 证明 $F(x)=f(x)+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

证　任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$, $x_2>x_1$,

有　$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|=x_2-x_1$,

而　$f(x_1)-f(x_2)\leqslant|f(x_2)-f(x_1)|<x_2-x_1$,

因而　$f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2$,

所以　$F(x_1)<F(x_2)$,

即 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

【20】　设 $f(x),g(x),h(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增加函数, 且 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$, 证明 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$.

证　因为 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单增, 所以对任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$, $x_2>x_1$, 有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, $g(x_1)\leqslant g(x_2)$, $h(x_1)\leqslant h(x_2)$.

又对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$, 所以

$$f[f(x)]\leqslant f[g(x)]\leqslant g[g(x)],$$
$$g[g(x)]\leqslant g[h(x)]\leqslant h[h(x)],$$

即 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$.

一元函数周期性的讨论

【21】　设 $[x]$ 是表示不超过 x 的最大整数, 则 $y=x-[x]$ 是________.

(A)无界函数　(B)周期为 1 的周期函数　(C)单调函数　(D)偶函数

解　$y=x-[x]$ 的图象如图 21 所示.

故应选(B).

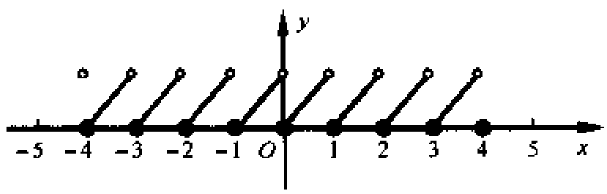

图 21

【22】　设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$, 存在常数 $c\neq0$, 使 $f(x+c)=-f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

证 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+c)=-f(x)$，所以

$$f(x+2c)=f[(x+c)+c]=-f(x+c)=f(x),$$

故 $f(x)$ 为周期函数.

求反函数

【23】 函数 $y=\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$ 的反函数为________.

解 令 $t=\sqrt{1-x}$，则 $y=\dfrac{1+t}{1-t}$，所以 $t=\dfrac{y-1}{y+1}$，即 $\sqrt{1-x}=\dfrac{y-1}{y+1}$，从而

$$x=1-\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2=\frac{4y}{(y+1)^2},$$

因此反函数为 $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

故应填 $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

讨论一元函数的值域

【24】 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 的值域是________.

(A) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$　　(B) $[0,1]$　　(C) $[-1,0]$　　(D) $[-1,1]$

解 因为 $|f(x)|=\left|\dfrac{\sin x}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$，所以 $-\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$.

故应选(A).

【25】 函数 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是________.

(A) $[-1,1]$　　(B) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　(C) $[0,1]$　　(D) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

解 因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$，所以 $-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

因此 $-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，从而 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故应选(B).

【26】 求 $y=f(x)=\begin{cases}3-x^3, & x<-2\\ 5-x, & -2\leqslant x\leqslant 2\\ 1-(x-2)^2, & x>2\end{cases}$ 的值域，并求它的反函数.

解 当 $x<-2$ 时，$y=3-x^3$，$x=\sqrt[3]{3-y}$，且 $y>3+8=11$；

当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=5-x$，$x=5-y$，且 $3\leqslant y\leqslant 7$；

当 $x>2$ 时，$y=1-(x-2)^2$，$x=2+\sqrt{1-y}$，且 $y<1$；

所以 $y=f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1)\cup[3,7]\cup(11,+\infty)$.

$y=f(x)$ 的反函数为 $y=\begin{cases}2+\sqrt{1-x}, & x<1\\ 5-x, & 3\leqslant x\leqslant 7\\ \sqrt[3]{3-x}, & x>11\end{cases}$

§2. 数列的极限

1. 数列 一个定义在正整数集合上的函数 $a_n=f(n)$(称为整标函数),当自变量 n 按正整数 1,2,3,…依次增大的顺序取值时,函数按相应的顺序排成一串数:

$$f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots$$

称为一个无穷数列,简称数列.数列中的每一个数称为数列的项,$f(n)$称为数列的一般项或通项.

2. 数列极限的定义

(1)设$\{a_n\}$是一数列,如果存在常数 a,当 n 无限增大时,a_n 无限接近(或趋近)于 a,则称数列$\{a_n\}$收敛,a 称为数列$\{a_n\}$的极限,或称数列$\{a_n\}$收敛于 a,记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,或 $a_n\to a$.当 $n\to\infty$时,若不存在这样的常数 a,则称数列$\{a_n\}$发散或不收敛,也可以说极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在.

(2)设$\{a_n\}$为一个数列,a 为一个常数.若对任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在一个正整数 N,使得 $n>N$ 的一切 a_n 都满足不等式$|a_n-a|<\varepsilon$,则称 a 为数列$\{a_n\}$当 $n\to\infty$时的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

3. 数列极限的性质

惟一性:收敛数列的极限是惟一的.

即若数列$\{a_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$,则 $a=b$.

有界性:假设数列$\{a_n\}$收敛,则数列$\{a_n\}$必有界,即存在常数 $M>0$,使得$|a_n|<M$(任意 $n\in N$).这个性质中的 M 显然不是惟一的,重要的是它的存在性.

保号性:假设数列$\{a_n\}$收敛,其极限为 a.

(1)若有正整数 N,使得当 $n>N$ 时 $a_n>0$(或<0),则 $a\geqslant0$(或$\leqslant0$).

(2)若 $a>0$(或<0),则有正整数 N,使得当 $n>N$ 时,$a_n>0$(或<0).

基 本 题 型

有关数列极限存在性的判定

【27】 "对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有$|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$"是数列$\{a_n\}$收敛于 a 的________.

(A)充分条件但非必要条件　　(B)必要条件但非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分条件又非必要条件

解 本题应选(C).

【28】 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有________.

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C)极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　(D)极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

解 取 $a_n=\frac{2}{n}$，$b_n=1$，$c_n=\frac{n}{2}$，$(n=1,2,\cdots)$，则选项(A)、(B)、(C)均可排除.

对于选项(D)，由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_nc_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{c_n}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

故应选(D).

点评 为了正确而迅速的解答选择题，首先要对题意和备选项进行整体的对比考查，弄清题目的考察目标，从题干和备选项中获得解决问题的充分信息，其次选择适当的解题方法，下面归纳几种解题方法，供读者参考.

直接法：直接从题目的已知条件出发，经过严密的推导、合理的运算从而得出结果和判断的方法，其选择过程是先计算，然后将计算的结果与备选项对照，找到正确选项，当题目中给出已知条件，备选答案列出所需求的结果时，一般首先考虑直接法.

验证法：把可供选择的各备选项带入题目中已知条件或将题干中的条件带入各选项进行验算，从而得到正确选项的方法.

图象法：通过画出直观的几何图形，帮助分析，便于作出正确选择的方法.

每种方法都不是孤立的，有时同一试题可用多种方法求解，有时需借用几种方法综合求解.

证明数列没有极限

【29】 设 $a_n=(1+\frac{1}{n})\sin\frac{n\pi}{2}$，证明数列 $\{a_n\}$ 没有极限.

分析 若数列 $\{a_n\}$ 有极限，则由极限性质知道极限应是惟一的，要证明 $\{a_n\}$ 没有极限，只要找到两个子列分别收敛到不同的值即可.

证 设 k 为正整数，若 $n=4k$，则

$$a_{4k}=\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin\frac{4k\pi}{2}=\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin 2k\pi=0;$$

若 $n=4k+1$，则

$$a_{4k+1}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\left(\frac{4k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{4k+1}\to 1\quad(k\to+\infty).$$

因此 $\{a_n\}$ 没有极限.

【30】 证明：数列 $x_n=(-1)^n\cdot\frac{n+1}{n}$ 是发散的.

证 考察子序列

$$x_{2n}=\frac{2n+1}{2n}=1+\frac{1}{2n}\to 1\ (n\to+\infty),$$

$$x_{2n+1}=-\frac{2n+2}{2n+1}=-1-\frac{1}{2n+1}\to -1\quad(n\to+\infty).$$

由子序列的收敛性，可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 不存在.

点评 在证明数列发散时，可采用下列两种方法：

①找两个极限不同的子数列. ②找一个发散的子数列.

§3. 函数的极限

1. 函数极限的定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内(点 x_0 可除外)有定义,A 为一个常数.若对任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在一个正数 δ,使得满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

2. 左极限和右极限的定义 若对于满足 $0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 自 x_0 左(右)侧趋于 x_0 时的极限,即左(右)极限,分别记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)=A\quad(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)=A)$$

类似地,可以给出当 $x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 时,$f(x)$ 的极限为 A 的定义.

3. 极限的性质

(1)惟一性 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 A 必惟一.

(2)有界性 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域(x_0 除外)内是有界的.

(3)保号性 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域(x_0 除外)内均有 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$),且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

4. 充要条件 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

基本题型

讨论函数极限的存在性

【31】 设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ________.

(A)存在且等于零　　(B)存在但不一定为零

(C)一定不存在　　(D)不一定存在

解 若取 $\varphi(x)=x$,$f(x)=x+e^{-|x|}$,$g(x)=x+2e^{-|x|}$. 此时 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在;

若取 $\varphi(x)=0$,$f(x)=e^{-|x|}$,$g(x)=2e^{-|x|}$,此时 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 存在.

故应选(D).

【32】 设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant1\\ x-2, & |x|>1\end{cases}$. 试讨论 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$.

分析 本题中函数是分段表达的,因此要讨论 $x\to1$ 时 $f(x)$ 的极限值必须从左、右极限入手.

解 (1)由题目条件知 $f(x)=\begin{cases}x-2, & x<-1\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x-2, & x>1\end{cases}$.

因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-2)=-1$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$,

从而 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$,

所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

(2)因为 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(x-2)=-3$.

从而 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$,

所以 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$不存在.

【33】 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x$ 不存在.

证 设 $f(x)=x\sin x$,取 $x_n=n\pi$ 及 $y_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$,显然 $n\to+\infty$ 时有 $x_n\to+\infty$, $y_n\to+\infty$,

但是 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\pi\cdot\sin n\pi=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})\sin(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})=+\infty$.

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\sin x$ 不存在.

点评 证明极限不存在常用的办法就是从证明左、右极限入手,或者说明一个极限不存在,或者说明二者存在但不相等.为了简化过程,这时通常取特殊子列进行讨论.

【34】 求函数

$$f(x)=\frac{|x|}{x},g(x)=\frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}\quad(a>1)$$

当 $x\to0$ 时的左、右极限,并说明 $x\to0$ 时极限是否存在.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$.

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{a^{-\frac{1}{x}}-1}{a^{-\frac{1}{x}}+1}=-1,\ \lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}=1.$$

所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0}g(x)$都不存在.

§4. 无穷小与无穷大

1.无穷小与无穷大的定义

(1)无穷小的定义 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,则称 $f(x)$当 $x\to x_0(x\to\infty)$时为无穷小.

(2)无穷大的定义 若对任意给定的 $M>0$,都存在一个正数 $\delta(N)$,使得满足 $0<|x-x_0|<\delta(|x|>N)$的一切 x 所对应的$f(x)$都满足不等式$|f(x)|>M$,则称 $f(x)$当 $x\to x_0(x\to\infty)$时为无穷大,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$$

2. 无穷小与无穷大的关系(以下所讨论的极限，都是在自变量同一变化过程中的极限)

若$\lim f(x)=0 \quad (f(x)\neq 0)$， 则$\lim\frac{1}{f(x)}=\infty$；

若$\lim f(x)=\infty$， 则$\lim\frac{1}{f(x)}=0$.

基本题型

有关无穷小与无穷大的定义

【35】 当 $x\to 0$ 时，变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是________.

(A)无穷小　　(B)无穷大

(C)有界的，但不是无穷小量　　(D)无界的，但不是无穷大

解 取 $x_k=\frac{1}{2k\pi}$，则 $f(x_k)=(2k\pi)^2\sin(2k\pi)=0$. 故 $x\to\infty$时，$f(x)$不是无穷大，排除(B).

显然，$x\to 0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$不是无穷小，排除(A).

取 $x_k=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$，则 $f(x_k)=(2k\pi+\frac{\pi}{2})^2\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})=(2k\pi+\frac{\pi}{2})^2\to\infty$. 故$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$不是有界的，排除(C).

故应选(D).

【36】 函数 $f(x)=x\sin x$ ________.

(A)当 $x\to\infty$时为无穷大　　(B)在$(-\infty,+\infty)$内有界

(C)在$(-\infty,+\infty)$内无界　　(D)当 $x\to\infty$时有有限极限

解 只要正确理解当 $x\to\infty$时，$f(x)$为无穷大与 $f(x)$无界两个概念之间的区别，就容易作出正确选择.

验证法 可直接验算(C)为正确选项，根据 $x\to\infty$时 $f(x)$无界的定义，无论给定 M 多么大，均存在 x_0 使得 $f(x_0)>M$. 现取正整数 k，使$(2k+\frac{1}{2})\pi>M$，并令 $x_0=(2k+\frac{1}{2})\pi$，则

$$f(x_0)=(2k+\frac{1}{2})\pi\sin\left[(2k+\frac{1}{2})\pi\right]=(2k+\frac{1}{2})\pi>M.$$

排除法 若取 $x_k=2k\pi$，则 $f(x_k)=2k\pi\sin 2k\pi=0$，故 $x\to\infty$时，$f(x)$不是无穷大量，从而排除(A).

分别取 $x_k^{(1)}=2k\pi$，$x_k^{(2)}=(2k+\frac{1}{2})\pi$，则当 $k\to\infty$时 $f(x_k^{(1)})=0$，而 $f(x_k^{(2)})\to\infty$，因此，$x\to\infty$时 $f(x)$不存在有限极限，且在$(-\infty,+\infty)$内 $f(x)$也不是有界的，于是(B)、(D)不成立.

故应选(C).

【37】 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是________.

(A)若 x_n 发散，则 y_n 必发散　　(B)若 x_n 无界，则 y_n 必有界

(C)若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小　　(D)若$\frac{1}{x_n}$为无穷小，则 y_n 必为无穷小

解 (A)，(B)显然不对. 若 x_n 有界，且 y_n 为无穷小，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$. 但反之不一定，故(C)也