前　　言

大学数学是高等院校理工、经管等各类学生必修的基础课，又是“考研”的统考科目，所以一直深受学生们的重视。作为多年工作在大学数学教学第一线的教师，我们深知学生们对数学课的重视程度，以及对一本好的数学辅导书的渴求。对于刚刚走入大学校门的新生来说，一是对大学自主学习的学习方式不太适应，二是大学数学概念的抽象和运算的繁杂，往往使他们感到力不从心。正是出于这些考虑，我们以东北大学出版社出版的“21世纪高等学校本科数学规划教材”为蓝本，编写出与其配套的学习辅导书。但同时这套数学辅导书又是从各自体系、内容出发，相对独立，因此也可以供使用其他教材的学生使用。编写这套数学辅导书的目的是让学生熟悉自主学习思路，尽快完成学习方法和思维方式的转变，对所学课程的学习进行全面指导，力求取得“用时少，成绩好”之效果。

本书为“21世纪高等学校本科数学规划教材”中《线性代数》的辅导书，全书共6章，每章均有内容精要、归类解析、习题详解、同步测试4部分，具体是：

1．**内容精要**　包括主要定义、主要结论和结论补充三项，结论补充给出了作者由多年教学经验总结出的行之有效的计算公式。

2．**归类解析**　是将所涉及的内容，尤其是重点内容进行系统归类，然后，通过相当数量的例题演示向学生介绍解题方法和运算技巧。

3．**习题详解**　对教材中出现的所有习题均给出详细解答，有些题还给出多种解法，意在学生遇有疑难之时助一臂之力，起到课下辅导的作用。

4．**同步测试**　每章都安排同步测试题一套，用时2小时。同步测试的目的在于巩固所学知识，并找出差距。

由于作者水平有限，书中可能存在疏漏与不足，还望同仁及读者不吝赐教。如果本书能在节省学生们的宝贵时间、提高学习效率等方面有一定作用的话，我们将深感欣慰。

作　者

2007年2月

《线性代数学习辅导》编写人员

主　　　编：孔庆海　周其华　黄　坚

副　主　编：牛玉玲　李友国　邵新慧

其他编写人员：(以姓氏笔画为序)

王学理　何　云　刘胜兰

陈凡红　杨万必

目　　录

第一章　行列式

一、内容精要

(一) 主要定义

1. 全排列，全排列的逆序数，奇偶排列

(1) 把 n 个不同的元素排成一列，称之为这 n 个不同元素的全排列(简称排列)；n 个不同元素的全排列通常记为P_n，显然，$P_n=n!$.

(2) 对于 n 个不同元素，先规定各元素间有一个标准次序(对于 n 个不同自然数，通常规定以小到大的排列为标准次序，例如 $1234\cdots n$ 是前 n 个自然数的标准排列)，于是在这 n 个元素的任何一个排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序，一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数.

(3) 逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列.

2. 对换及其性质

(1) 在排列中将任意两个元素对调位置(保持其他元素位置不动)，这种变换称为对换.

(2) 对换将改变排列的奇偶性；而且奇排列调换成标准排列的对换次数是奇数，偶排列调换成标准排列的对换次数是偶数.

3. 行列式的定义

把 n^2 个数排列成 n 行 n 列的形式，记为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称其为 n 阶行列式，它表示一个数值，其值为

$$D_n=\sum(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中$\sum$表示对所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的形式求和，τ 为相应排列$j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，n 为行列式的阶数，$\sum$ 中共有 $n!$项.

特别地，当 $n=1, 2, 3$ 时，有

$$D_1=|a_{11}|=a_{11},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}.$$

注 行列式 D_n 有时记为 $\det(a_{ij})_{n\times n}$.

4. 余子式及代数余子式

在 n 阶行列式 D_n 中，划掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列后余下的 $n-1$ 行，$n-1$ 列元素(保持原来的位置关系)正好组成一个 $n-1$ 阶行列式，记为 M_{ij}，称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式；称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

5. 转置行列式

把行列式 D_n 的第 i 行换成第 i 列(把行与列依次交换)得到的行列式称为 D_n 的转置行列式，记为 D_n^{T}，显然 D_n 也是 D_n^{T} 的转置行列式，即 $(D_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D_n$.

(二) 主要结论

1. 三角形行列式的值

三角形行列式的值等于主对角线元素的乘积，即

$$\underset{(\text{上三角})}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}} = \underset{(\text{下三角})}{\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \underset{(\text{对角形})}{\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 行列式的展开定理

设
$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} D_n &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (\text{行展开}) \\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (\text{列展开}) \quad (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n). \end{aligned}$$

行列式的值等于其任一行(或列)的元素与该元素的代数余子式的乘积的和.

注 行列式的某行(或列)的元素与其他的行(或列)的元素的代数余子式乘积的和为零.

3. 行列式的性质

(1) D_n^{T} 是 D_n 的转置行列式，$D_n^{\mathrm{T}}=D_n$.

(2) 交换行列式的两行(或两列)，则行列式的值变号.

(3) 行列式的某行(或列)有公因子 k，可将 k 提取到行列式外面相乘，即

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(4) 把行列式某行(或列)元素的 k 倍加到其他的对应行(或列)的元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+kc_1} \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11}+a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & ka_{21}+a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ka_{n1}+a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式的三种行变换记为 $r_i \leftrightarrow r_j$，表示第 i 行与第 j 行互换；kr_i，表示以 k 乘第 i 行；r_i+kr_j，表示第 j 行乘以 k 后加到第 i 行上去.

关于列变换相应的也有三种：$c_i \leftrightarrow c_j$，kc_i，c_i+kc_j，也作相应理解.

(5) 行列式的某行(或列)的元素是两项之和，则行列式等于两个行列式之和．如

$$D_3=\begin{vmatrix} a_1+p_1 & x & m \\ b_1+q_1 & y & n \\ c_1+r_1 & z & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x & m \\ b_1 & y & n \\ c_1 & z & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & x & m \\ q_1 & y & n \\ r_1 & z & w \end{vmatrix}.$$

对于其他阶数行列式也可以类似地写出.

(6) 当行列式具有下列条件之一时，值为零.

ⅰ. 行列式的某行(或列)元素都为零；

ⅱ. 行列式有两行(或列)元素都相同；

ⅲ. 行列式有两行(或列)对应元素成比例；

ⅳ. 行列式中零元素个数多于 $\frac{n^2}{2}$ 个.

4. Cramer 法则

(1) 非齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

其中 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 中至少有一个非零.

其系数行列式为 D_n，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

当 $D_n \neq 0$ 时，有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D_n} \quad (j=1,2,\cdots,n);$$

当 $D_n=0$ 时，方程组无解．这里

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) 对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0. \end{cases}$$

当 $D_n\neq 0$ 时，方程组有唯一零解；

当 $D_n=0$ 时，方程组除有零解外，还有非零解；反之，方程组若有非零解，则 $D_n=0$.

二、归类解析

(一) 行列式的计算

例 1-1 计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 10 \end{vmatrix}.$$

解 对 D_4 的第一列进行消零处理后再展开，有

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{=\!=}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按第 1 列展开}}{=\!=\!=\!=}-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-3.$$

例 1-2 计算行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -a \end{vmatrix}.$$

解 $c_1+c_i(i=2,3,4,5)$，再按第 1 列展开，有

$$D_5=\begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -a \end{vmatrix}=15\cdot(-a)^4=15a^4.$$

类似地，由本题不难得知

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\a&-a&0&\cdots&0&0\\0&a&-a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&-a\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}(-a)^{n-1}.$$

例 1-3　计算三阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1\\1&1+a_2&1\\1&1&1+a_3\end{vmatrix}\quad(a_1a_2a_3\neq0).$$

解　用拆项法，将 D_3 中每个元素写成两数之和，如 $1=1+0$，共拆成 2^3 个行列式，其中有 4 个行列式显然为零，于是

$$\begin{aligned}D_3&=\begin{vmatrix}1+a_1&1+0&1+0\\1+0&1+a_2&1+0\\1+0&1+0&1+a_3\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&a_2&0\\1&0&a_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&1&0\\0&1&0\\0&1&a_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&0&1\\0&a_2&1\\0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{vmatrix}\\&=a_2a_3+a_1a_3+a_1a_2+a_1a_2a_3\\&=a_1a_2a_3\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right).\end{aligned}$$

同理，对于 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}\quad(a_1a_2\cdots a_n\neq0),$$

则

$$D_n=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

例 1-4　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&b\\b&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}.$$

解　按第 1 列展开，有

$$\begin{aligned}D_n&=a\begin{vmatrix}a&b&\cdots&0&0\\0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}b&0&\cdots&0&0\\a&b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a&b\end{vmatrix}\\&=a\cdot a^{n-1}+(-1)^{n+1}b\cdot b^{n-1}=a^n-(-1)^nb^n.\end{aligned}$$

例 1-5　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}.$$

解　自第2行起，将各行都加到第1行上，并提取公因式$(n-1)$，得

$$D_n=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{r_i+(-r_1)}(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1).$$

例1-6　已知$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=m\neq0$，则$\begin{vmatrix}2a_1&b_1-c_1&3c_1\\2a_2&b_2-c_2&3c_2\\2a_3&b_3-c_3&3c_3\end{vmatrix}=[\quad]$.

(A) $2m$;　(B) $3m$;　(C) $6m$;　(D) $12m$.

解　答案为C. 因为

$$\begin{vmatrix}2a_1&b_1-c_1&3c_1\\2a_2&b_2-c_2&3c_2\\2a_3&b_3-c_3&3c_3\end{vmatrix}=2\times3\begin{vmatrix}a_1&b_1-c_1&c_1\\a_2&b_2-c_2&c_2\\a_3&b_3-c_3&c_3\end{vmatrix}\xrightarrow{c_3+c_2}6\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=6m.$$

例1-7　已知某四阶行列式D的第3列元素依次为1，3，-2，2，其对应的余子式是3，-2，1，1，则行列式$D=[\quad]$.

(A) -5;　(B) 5;　(C) -3;　(D) 3.

解　答案为B. 因为

$$\begin{aligned}D&=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}+a_{43}A_{43}\\&=a_{13}M_{13}-a_{23}M_{23}+a_{33}M_{33}-a_{43}M_{43}\\&=1\times3-3\times(-2)+(-2)\times1-2\times1\\&=5.\end{aligned}$$

例1-8　行列式$D_4=\begin{vmatrix}-2&-x&2x&-3x\\1&0&x&0\\x&2x&0&2\\-x&0&-1&x\end{vmatrix}$中$x^4$的系数是[　　].

(A) -5;　(B) 5;　(C) -6;　(D) 6.

解　答案为B. 因本题只求x^4项的系数，故不必计算出D_4，按第2行展开，有

$$D_4=1\cdot A_{21}+x\cdot A_{23},$$

显然A_{21}中不可能有x^4项，只要找A_{23}中的x^3项系数即可，而

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}-2&-x&-3x\\x&2x&2\\-x&0&x\end{vmatrix}\xrightarrow{c_1+c_3}-\begin{vmatrix}-2-3x&-x&-3x\\x+2&2x&2\\0&0&x\end{vmatrix}$$

$$= -x\begin{vmatrix} -2-3x & -x \\ x+2 & 2x \end{vmatrix} = 5x^3+\cdots.$$

例 1-9　n 阶行列式 D_n 中，满足[　　]条件时，$D_n=0$，则[　　].

(A) D_n 中零元素个数多于 n 个；

(B) D_n 中主对角元素全为零；

(C) D_n 中有一列是另外两列的差；

(D) D_n 中每个元素均为两数之和.

解　答案为 C. 因为 D_n 中有一列是另外两列之差，则 D_n 可分解成两个 n 阶行列式之和，这两个行列式均有两列元素对应成比例，值为零，即 $D_n=0+0=0$.

A 项不对，如 $D_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$，零元素个数大于 3；

B 项不对，如 $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$(主对角元素都为零)；

D 项不对，如 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\neq 0$，但 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+2 & 1+1 \\ 1+0 & 2+2 \end{vmatrix}$.

例 1-10　若 $D_5=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$，求

(1) $A_{41}+A_{42}+A_{43}$；

(2) $A_{44}+A_{55}$.

解　如果计算出每个 A_{ij}，将非常麻烦. 把 D_5 按第 4 行展开，有

$$1\cdot(A_{41}+A_{42}+A_{43})+2\cdot(A_{44}+A_{45})=27, \qquad ①$$

再根据展开性质：第 2 行元素与第 4 行对应元素的代数余子式乘积的和为零，则

$$2\cdot(A_{41}+A_{42}+A_{43})+1\cdot(A_{44}+A_{45})=0, \qquad ②$$

解由①，②组成的方程组，不难得

(1) $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9$；

(2) $A_{44}+A_{45}=18$.

(二) Cramer 法则

例 1-11　问 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x+2y+2z=0, \\ 2x+(6-\lambda)y=0, \\ 2x+(4-\lambda)z=0 \end{cases}$$

有非零解？

解　上述方程组有非零解，则系数行列式 $D=0$，即

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

计算出 $D=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)$，则 $\lambda=2$ 或 $\lambda=5$ 或 $\lambda=8$.

例 1-12 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8,\\ x_1-3x_2-6x_4=9,\\ 2x_2-x_3+2x_4=-5,\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0.\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_2]{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0&7&-5&13\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\0&7&-7&12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&5&13\\2&1&2\\7&7&12\end{vmatrix}=27,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81,\qquad D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27,\qquad D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27,$$

于是得 $x_1=3$，$x_2=-4$，$x_3=-1$，$x_4=1$.

三、习题详解

习 题 一

1．利用对角线法则计算三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix}6&42&27\\8&-28&36\\20&35&135\end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix}10&8&2\\15&12&3\\20&32&12\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$.

解　(1) 原式$=7\times 9\begin{vmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 8 & -4 & 4 \\ 20 & 5 & 15 \end{vmatrix}=7\times 9\times 3\times 4\times 5\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$=3780[2\times(-1)\times 3+2\times 1\times 1+4\times 2\times 1-1\times(-1)\times 4-1\times 1\times 2-3\times 2\times 2]$

$=-28680$;

(2) 原式$=10\times 12\times 12+15\times 32\times 2+20\times 8\times 3-2\times 12\times 20-3\times 32\times 10-12\times 8\times 15=0$;

(3) 原式$=acb+bac+cab-c^3-a^3-b^3=3abc-a^3-b^3-c^3$;

(4) 原式$=bc^2+ab^2+a^2c-ba^2-cb^2-c^2a=(a-b)(b-c)(c-a)$.

2. 证明.

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$;

(2) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}=0$;

(3) $\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

证

(1) 原式$\xlongequal[i=2,\ 3]{c_i+(-c_1)}\begin{vmatrix} a^2 & a(b-a) & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2(b-a) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a(b-a) & b^2-a^2 \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix}=2a(b-a)^2-(b-a)^2(b+a)$

$=(b-a)^2(2a-b-a)=(a-b)^3$;

(2) 原式$\xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2}\begin{vmatrix} c-a & a-c & 0 & 0 \\ a & c & d & b \\ a-c & c-a & 0 & 0 \\ c & a & b & d \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_1+r_3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & d & b \\ a-c & c-a & 0 & 0 \\ c & a & b & d \end{vmatrix}=0$;

(3) 原式$\xlongequal[c_1+(-lc_3)]{c_2+(-mc_3)}\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & a_2 & a_3 \\ b_1+kb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1+kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1+(-kc_2)}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

3. 用行列式的定义或性质计算.

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}.$$

解 按第 n 行展开有

$$D_n=(-1)^{n+1}n\begin{vmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n-1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}n!.$$

4. 计算行列式.

(1) $\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$.

解 (1) 原式$\xlongequal[r_3-10r_2]{r_1-4r_2}\begin{vmatrix}0&-7&2&-4\\1&2&0&2\\0&-15&2&-20\\0&1&1&7\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}-\begin{vmatrix}-7&2&-4\\-15&2&-20\\1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_2-2r_3]{r_1-2r_3}-\begin{vmatrix}-9&0&-18\\-17&0&-34\\1&1&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 2 列展开}}-\begin{vmatrix}-9&-18\\-17&-34\end{vmatrix}=0;$$

(2) 原式$\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}2&1&4&1\\5&0&6&2\\-3&0&-5&0\\5&0&6&2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2, 4 行相同}}0$;

(3) 原式$\xlongequal{r_1+ar_2}\begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}\begin{vmatrix} ab+1 & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$=(ab+1)cd+ab+1+ad=abcd+1+ab+ad+cd.$

5. 计算 n 阶行列式.

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，未写出元素全为零；

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

(3) $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$；

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$，未写出元素均为零；

(5) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}\quad (a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$；

(6) $D_n=\begin{vmatrix} x & y & & 0 & \\ 0 & x & y & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & x & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$；

(7) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解 (1) $D_n \xlongequal{\text{按第1行展开}} a^n+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第1列展开}} a^n+(-1)^{n+1}\cdot(-1)^n\begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix}=a^n-a^{n-2};$$

(2) $D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1+c_i,\text{ 并提取公因式}} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$;

(3) 按第1列展开，有 $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$ （递推关系式）. 又 $D_1=2$，$D_2=3$，则 $D_3=2D_2-D_1=4$，$D_4=2D_3-D_2=5$，…，$D_n=n+1$；

(4) 按第1行展开，有

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (a_nd_n-b_nc_n)D_{2n-2}=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})D_{2(n-2)} \\ &= \cdots\cdots \\ &= \prod_{i=1}^{n}(a_nd_n-b_nc_n) \quad (D_2=a_1d_1-b_1c_1); \end{aligned}$$

(5) 利用行列式拆项，有 2^n 个行列式，其中有 2^{n-1}个行列式值为零. 于是原式可写成

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_1 & & \cdots & 1 \\ & a_2 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}$$

$=a_1a_2\cdots a_n+a_1a_3a_4\cdots a_n+a_2a_3\cdots a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1}$

$=(a_1a_2\cdots a_n)\left(1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)$；

(6) 按第1列展开，$D_n=(-1)^{n+1}y+x^n$；

(7) 将第2行的(-1)倍加到各行上，则

$$D_n=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第1行展开}}-2(n-2)!.$$

6. 用 Cramer 法则解线性方程组.

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+\ x_3=0,\\ 2x_1-\ x_2+\ x_3=1,\\ x_1-\ x_2+2x_3=3;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ 2x_1-x_2-x_3=1,\\ x_1-x_2+x_3=2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+\ y+\ z=1,\\ ax+\ by+\ cz=d,\\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2\end{cases}$ (a, b, c 为互不相同的实数).

解　(1) $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-8,$

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=4,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=-12.$$

因此

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=-\dfrac{1}{2},\\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=-\dfrac{1}{2},\\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

(2) $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-6,$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-4,$$