动态金融投资

孙万贵 著

陕西人民教育出版社

前　言

本书主要介绍动态均值-方差投资组合选择，以及均值-方差偏好意义下的金融资产定价和保值，而没有涉及诸如一般效用函数下投资决策和金融一般均衡理论等现代金融学内容．其原因主要有以下几点：诺贝尔获得者 Markowitz 和 Tobin 的均值-方差模型及其均衡版本，Sharpe-Lintner-Mossin 的资本资产定价模型，标志着现代金融学的开端，并广泛应用于金融实践；在均值-方差意义下，动态有效策略严格优于静态有效策略，这表明动态策略研究具有现实意义；动态均值-方差投资组合是非负效用函数最优化问题的解，这又从理论上提供了均值-方差模型流行的依据；并且有关内容也得到我们国家的重视，如 2005 国家自然科学基金委员会项目指南中列出的重点项目，金融数学的若干前沿问题［A010204］，其研究内容包括：（1）不依赖计价单位且基于原始概率的数理金融理论研究；（2）不完备市场中的 Markowitz 最优投资组合选择等．

本书内容可分为三部分：(1)第一章至第二章介绍金融市场的基本概念和理论，包括自融资投资策略、无套利机会、完全市场和不完全市场；(2)第三章至第八章介绍一般无摩擦市场和约束市场中的投资组合理论及其在特定金融环境下的应用；(3)第九章和第十章介绍均值-方差保值理论和在均值-方差偏好下无差异定价方法．

本书具有以下特点：(1)详细地介绍了均值-方差保值问题、方差-最优鞅测度和正交投影的关系，三者之间相互唯一确定；(2)在投资组合问题研究中采用具体—抽象—具体的方法，即对具体的投资决策问题抽象到一般金融背景下，应用 Hilbert 空间理论和正交投影给出最优期末收益和有效前沿，然后应用鞅理论决定具体的投资策略．这样也就建立了投资组合与均值-方差保值问题、方差-最优鞅测度之间的联系；(3)利率风险是不完全市场研究中必须考虑的重要因素之一．利率风险被分解为可控风险和不可控风险，而只有后者影响投资收益和资产定价与保值；(4)市场结构和人们认识缺陷，如基础资产相对风险而言不足、交易策略约束和财富限制，以及掌握信息的不完全性，均

会导致市场不完全．针对这些具体情况，清楚地给出了动态均值-方差有效策略，并通过信息的风险-收益系数刻画信息对风险价格等的影响．

本书需要的数学知识主要有概率论、随机分析、Hilbert 空间与正交投影．这些知识在本书的附录中进行了简明讲述．

在此，对阳名珠研究员积极鼓励笔者应用所学知识投身我国经济建设表示衷心感谢；对王春峰教授大力支持并指导笔者从事不完全市场中的金融投资研究表示衷心感谢；对严加安院士指导并鼓励笔者在历史概率下研究不完全市场中的Markowitz 投资组合选择问题表示衷心感谢；同时感谢赵守国教授的指导和支持．有他们的支持和指导才使本书出版成为可能．最后还要感谢陕西人民教育出版社对本书的出版给予的大力支持．

孙万贵
2006 年 2 月于西北大学

图书在版编目（CIP）数据
动态金融投资 / 孙万贵著. —西安：陕西人民教育出版社，2006.3
ISBN 7ー5419ー9537ー1

I. 动… II. 孙… III. 金融投资—动态经济学 IV. F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 016184 号

动态金融投资
孙万贵 著
陕西人民教育出版社出版发行
（西安长安路南段 181 号）
各地新华书店经销 西安白云印务有限公司印刷
880×1230 毫米 32 开本 6.75 印张 200 千字
2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷
印数：1-1000
ISBN 7-5419-9537-1/F・118
定 价：15.00 元

目　　录

第一章　套利和完全市场

在金融工程和数理金融中，无套利假设常常是分析问题的出发点．简单而言，无套利指不存在任何这样的机会，不出资能够获得无风险收益．一旦市场中出现套利机会，投资者就会利用这样的机会实现盈利，套利机会也就迅速消失．因此在一定意义(如不考虑交易费用)下，无套利假设是合理的．无套利分析法经常可以简化分析过程．比较而言，均衡方法更多地应用于经济学和金融学，以简化模型和假设，解释经济和金融现象．但均衡方法不适合于金融工程，因为它不能基于所有市场参与者的偏好和未来收入和消费构造完整的均衡．

完全市场指任何或有权益由基础资产可以复制，或者说未来任意现金流量（可能是随机的）都可由已有资产的动态组合获得．完全市场中的投资组合选择，或有权益的定价和保值从理论上看已相当完善．正是因为完全市场中任何或有权益均由已有的资产可以复制，或有权益的价格可以由基础资产的价格确定，保值策略也相对容易确定，投资者无须面对利率风险．同时，还有深层次的原因，即完全市场中鞅测度的存在唯一性．同样，应用鞅方法，可以容易地解决动态投资组合问题．

当股票价格的折现值在某一测度下为鞅时，该测度称为等价鞅测度．　等价鞅测度的存在性蕴含无套利机会．这一表述源于经典的鞅论：在鞅上赌博肯定不能盈利(见 Doob(1953))．该命题的逆命题是否成立？即某一过程不可能产生套利机会时，等价鞅测度是否存在？对有限概率空间的离散参数过程，Harrison / Kreps (1979), Harrison / Pliska (1981) , Taqqu / Willinger (1987) 证明了答案是肯定的．Dalang / Morton / Willinger（1990）将该结论推广到一般概率空间和多维过程．

对一般连续参数过程，上述问题则变得更为复杂和困难．一般

来说，无套利不能保证等价鞅测度的存在性，需要更强的条件（Kreps (1981), Schachermayer (1993, 1994)）．应用泛函分析，Stricker (1990), Delbean (1992), Lakner (1993), Delbean / Schachermayer (1996, 1997), Fritelli / Lakner (1995) 研究了这一问题.

Stricker (1990) 引入了比无套利机会更强的条件，即无渐近套利，并证明了等价鞅测度存在性等价于市场无渐近套利. 最新的文献是 Delbean / Schachermayer (1997) 对一般半鞅价格过程的工作和 Schweizer (2001) 在 L^2 框架上的工作.

这一章的主要目的是在连续时间模型的数学框架下，介绍自融资投资策略，套利与等价鞅测度，并给出完全市场的特征.

§1　无风险资产与股票

考虑固定投资期限 $T>0$．设 $W=\left(W^1,\Lambda,W^D\right)'$ 是标准的布朗运动，具有维数 D，定义在完备空间 (Ω,F,P) 上，其中' ' '表示向量或矩阵的转置. 假设 $W(0)=0$ 几乎处处成立. 由 W 产生的信息流 $(F_t;0\le t\le T)$ 满足通常条件（完备性和右连续性）. F_t 表示投资者在时刻 t 可获得的信息. 为了简单，认为 $F_T=F$.

金融市场中 $N+1$ 种资产在区间 $[0,T]$ 可以连续交易. 资产 0 是无风险资产，在 t 时具有价格 B_t，并且 $B_0=1$. N 只股票在 t 时每股价格分别为 $S_1(t),\Lambda,S_N(t)$. 它们连续而且严格正. 这儿连续意味着市场信息是渐进的，不会出现令投资者吃惊的消息. 而且投资者可以根据 t 时刻前的股票价格信息完全预测 t 时刻的股票价格. 初

始价格 $S_1(0),\Lambda\ ,S_N(0)$ 均为正常数. 这些价格满足下列方程:

$$\mathrm{d}S_0(t)=S_0(t)r(t)\mathrm{d}t,\qquad \forall t\in[0,T], \tag{1}$$

$$\mathrm{d}S_n(t)=S_n(t)\left[\mu_n(t)\mathrm{d}t+\sum_{d=1}^{D}\sigma_{nd}(t)\mathrm{d}W^{(d)}(t)\right],$$

$$\forall t\in[0,T],\ n=1,\Lambda\ ,N, \tag{2}$$

无风险利率 $r(t)$ 是随机的, 依赖于时间 t. 但 $r(t)$ 是 F_t-可测的, 因此当前无风险利率对于所有的投资者是已知的. $\mu(t)=(\mu_1(t),\Lambda\ ,\mu_N(t))'$ 是 N-维漂移向量. $\sigma(t)=(\sigma_{nd}(t))_{N\times D}$ 是 $N\times D$ 阶波动矩阵. 过程 μ 和 σ 是 F_t-可测的. 并且一般假设

$$\int_0^T|r(t)|\mathrm{d}t<\infty\ a.s., \tag{3}$$

$$\int_0^T\|\mu(t)\|\mathrm{d}t<\infty\ a.s., \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{d=1}^{D}\int_0^T\sigma_{nd}^2(t)\mathrm{d}t<\infty\ a.s., \tag{5}$$

无风险资产价格和股票价格可以等价地表示为

$$S_0(t)=\exp\left(\int_0^t r(u)\mathrm{d}u\right),\qquad \forall t\in[0,T],$$

$$S_n(t)=S_n(0)\exp\left\{\int_0^t\sum_{d=1}^{D}\sigma_{nd}(s)\mathrm{d}W^{(d)}(s)+\int_0^t\left[\mu_n(s)-\frac{1}{2}\sum_{d=1}^{D}\sigma_{nd}^2(s)\right]\mathrm{d}s\right\},$$

$$\forall t \in [0,T],\ n = 1,\Lambda\ ,N\ .$$

折现股票价格为

$$\frac{S_n(t)}{S_0(t)} = S_n(0)\exp\left\{\int_0^t \sum_{d=1}^{D} \sigma_{nd}(s)\mathrm{d}W^{(d)}(s) + \int_0^t \left[\mu_n(s) - r(s) - \frac{1}{2}\sum_{d=1}^{D}\sigma_{nd}^2(s)\right]\mathrm{d}s\right\},$$

$$\forall t \in [0,T],\ n = 1,\Lambda\ ,N\ . \tag{6}$$

§2　自融资投资策略与盈利过程

类似离散时间模型，定义盈利过程（gains process）为

$$G_n(0) = 0,$$

$$\mathrm{d}G(t) = \sum_{n=0}^{N} \eta_n(t)\mathrm{d}S_n(t),$$

其中$\eta_0(t)$表示投资者持有的无风险资产数量，$\eta_n(t)$表示持有的第n只股票的股数．盈利过程可解释为，由于投资者持有的股票价格的变化给投资者所带来的全部收益．记

$$\eta(\cdot) = (\eta_0(\cdot),\Lambda\ ,\eta_N(\cdot))',$$

$$\pi_n(t) = \eta_n(t)S_n(t),$$

$$\pi(\cdot) = (\pi_1(\cdot),\Lambda\ ,\pi_N(\cdot))',$$

其中$\pi_n(t)$表示投资于第n只股票的资金数．假设$\eta(\cdot)$是定义在$[0,T]$上的$\{F_t\}$-适应过程．盈利过程可以改写为

$$\mathrm{d}G(t) = [\pi_0(t) + \pi'(t)\mathbf{1}]r(t)\mathrm{d}t + \pi'(t)[\mu(t) - r(t)\mathbf{1}]\mathrm{d}t + \pi'(t)\sigma(t)\mathrm{d}W(t),$$

其中$\mathbf{1}$表示每一分量为1的N维向量.

投资组合过程$(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$定义为$\{F_t\}$-循序可测的，$\mathbf{R}^N$-值过程$\pi(\cdot)$几乎处处满足:

$$\int_0^T \left|[\pi_0(t)+\pi'(t)\mathbf{1}]r(t)\right|\mathrm{d}t < \infty, \tag{7}$$

$$\int_0^T \left|\pi'(t)[\mu(t)-r(t)\mathbf{1}]\right|\mathrm{d}t < \infty, \tag{8}$$

$$\int_0^T \left\|\pi'(t)\sigma(t)\right\|\mathrm{d}t < \infty. \tag{9}$$

投资组合$(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$对应的盈利过程是

$$G(t) = \int_0^t [\pi_0(t)+\pi'(t)\mathbf{1}]r(t)\mathrm{d}t + \int_0^t \pi'(t)[\mu(t)-r(t)\mathbf{1}]\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^t \pi'(t)\sigma(t)\mathrm{d}W(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{10}$$

投资组合过程$(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$称为自融资的，如果

$$G(t) = \pi_0(t) + \pi'(t)\mathbf{1}, \quad 0 \le t \le T.$$

自融资投资组合过程的值等于当时投资获得的收益. 自融资投资组合意味着投资者在投资过程中，并没有增加额外资金，也没有提款用于消费. 定义超额收益率过程

$$R(t) = \int_0^t [\mu(t)-r(t)\mathbf{1}]\mathrm{d}t + \int_0^t \sigma(t)\mathrm{d}W(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{11}$$

它表示收益率高于无风险收益率的部分. 盈利过程（10）由其可表示为

$$G(t)=\int_0^t[\pi_0(t)+\pi'(t)\mathbf{1}]r(t)\mathrm{d}t+\int_0^t\pi'(t)\mathrm{d}R(t),\quad 0\le t\le T\,,$$

当 $(\pi_0(\cdot),\pi(\cdot))$ 是自融资时, 盈利过程为

$$\mathrm{d}G(t)=\frac{G(t)}{S_0(t)}\mathrm{d}S_0(t)+\pi'(t)\mathrm{d}R(t).$$

它有解

$$G(t)=S_0(t)\int_0^t\frac{1}{S_0(u)}\pi'(u)\mathrm{d}R(u),\quad 0\le t\le T\,.$$

在投资组合过程 $(\pi_0(\cdot),\pi(\cdot))$ 定义中, 没有对各分量的符号进行限制. 当 $\pi_0(\cdot)$ 取负值时, 对应从货币市场借入资金. 投资者在货币市场借贷款利率相同, 均为 $r(\cdot)$. 对 $n=1,\Lambda\,,N$, 第 n 只股票的头寸 $\pi_n(\cdot)$ 可以是负的, 表示市场中允许股票卖空, 而且所获资金可用以购买股票.

在上面的模型中没有考虑股票的红利及股票的交易成本. 同时假设货币市场借贷款利率相同. 股票具有红利的情况比较简单, 本质上没有难度. 股票不能卖空或不允许无风险借贷, 涉及到市场限制, 研究方法大多采用对偶理论. 对存在交易费用或货币市场借贷款利率不相同的情况, 近年研究工作较多.

投资组合定义中, 条件（7）~（8）是为了保证积分（10）的存在性. 然而, 这些条件并不能排除" 粗鲁 "的行为. 加倍策略（doubling strategy）便是一例 (Harrison and Kreps (1979)). 在离散时间情况下, 投资者以一定量的资金作为赌注, 然后每次赌注加倍,

直至获胜. 当连续赌博的收益是独立同分布时, 最终获胜的概率是 1. 因此, 加倍策略提供了盈利的方法. 但必须建立在可以无限制地赌下去, 而且准备足够多的可能输掉的资金, 以达到最后获利. 连续时间情况类似. 为了排除这一套利策略, 还需引入新概念.

满足条件（8）~（9）, $\{F_t\}$-适应的 $\mathbf{R}^N$ -值过程 $\pi(\cdot)$ 称为温和的 (有时也称为容许的), 如果折现盈利半鞅

$$\frac{G(t)}{S_0(t)}=\int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi'(u)\mathrm{d}R(u),\quad 0\le t\le T \tag{12}$$

具有不依赖于时间 t 的下界（几乎处处成立）. 投资组合 $(\pi_0(\cdot),\pi(\cdot))$ 称为温和的, 如果 $\pi(\cdot)$ 是温和的.

假设投资者的初始资金为 x , 那末投资者的财富过程（wealth process） $X(t)$ 为

$$\frac{X(t)}{S_0(t)}=x+\int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi'(u)\mathrm{d}R(u),\quad 0\le t\le T\,. \tag{13}$$

它可改写为

$$\frac{X(t)}{S_0(t)}=x+\int_0^t \eta'(u)\mathrm{d}\frac{S(u)}{S_0(u)},\quad 0\le t\le T\,.$$

因此, 初始资金为 x 时的期末财富可表示为

$$X(T)=xS_0(T)+S_0(T)\int_0^T \eta'(u)\mathrm{d}\frac{S(u)}{S_0(u)}\,. \tag{14}$$

设 $\tau(t)=\dfrac{1}{X(t)}\pi(t)$, 即 $\tau(t)$ 表示风险资产的权重, 则当 $(\pi_0(\cdot),\pi(\cdot))$ 是自融资时

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{X(t)}=r(t)\mathrm{d}t+\tau'(t)(\mu(t)-r(t)\mathbf{1})\mathrm{d}t+\tau'(t)\sigma(t)\mathrm{d}W(t).$$

此时，$\tau(t)$称为以风险资产的权重表示的自融资投资组合．又设财富过程的折现值$\Pi(t)=X(t)/S_0(t)$，那么

$$\frac{\mathrm{d}\Pi(t)}{\Pi(t)}=\tau'(t)(\mu(t)-r(t)\mathbf{1})\mathrm{d}t+\tau'(t)\sigma(t)\mathrm{d}W(t). \tag{15}$$

§3　套利与等价鞅测度

给定温和自融资投资组合$\pi(\cdot)$是**套利机会**(arbitrage opportunity)，如果相应的盈利过程满足$G(t)\geq 0\ a.s.$，而且在一正概率上$G(t)>0$．没有任何套利机会的市场称为无套利市场.

在无套利市场，不失一般性，人们可以假设股票的数目N不超过 Brownian 运动的数目D．直观地，如果股票的数目超过D，那末其中一些股票可以由其它股票组成的互助基金复制，因此股票的数目可以减少.

定理 1　如果金融市场无套利，则存在$\mathbf{R}^N$-值的循序可测过程$\theta(\cdot)$（称为风险的市场价格, the market price of risk）满足

$$\mu(t)-r(t)\mathbf{1}=\sigma(t)\theta(t)\quad a.s. \tag{16}$$

相反地，假设存在过程$\theta(\cdot)$满足上式，而且

$$\int_0^T \|\theta(t)\|^2 \mathrm{d}t < \infty \quad a.\ s., \tag{17}$$

$$E[Z_0(T)] = 1, \tag{18}$$

其中

$$Z_0(t) \equiv \exp\left\{-\int_0^t \theta'(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(s)\|^2 \mathrm{d}s\right\}, \tag{19}$$

则市场是无套利的.

当股票的数目 N 等于 Brownian 运动的数目 D 而且 $\sigma(t)$ 可逆时, 风险的市场价格可表示为

$$\theta(t) = \sigma^{-1}(t)[\mu(t) - r(t)\mathbf{1}] \quad a.s.,$$

其金融含义近似可以解释为承担单位风险所获得的瞬时超额收益率. 如果进一步假设 $\sigma(t)$ 为对角阵, 如 $\sigma(t) = \mathrm{diag}(\sigma_1, \Lambda, \sigma_n)$, 即每一股票只受一个 Brown 运动驱驶, 那么风险的市场价格可以更清楚的表示为

$$\theta(t) = \left(\frac{\mu_1(t) - r(t)}{\sigma_1(t)}, \Lambda, \frac{\mu_n(t) - r(t)}{\sigma_n(t)}\right) \quad a.s.$$

如果 $Rank(\sigma(t)) = N$, 则风险的市场价格由下式给出:

$$\theta(t) = \sigma'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}[\mu(t) - r(t)\mathbf{1}], \quad 0 \le t \le T$$

定理 1 表明（17）和（18）式在保证市场无套利机会有重要作用. 因此引入如下定义:

金融市场是标准的(standard), 如果下列条件成立

（i）市场是无套利的；

（ii）股票的数目 N 不超过 Brownian 运动的数目 D ；

（iii）风险的市场价格过程 $\theta(\cdot)$ 满足（17）；

（iv） $Z_0(t)$ 是鞅.

在标准金融市场中，在 $F(T)$ 上定义测度 P_0：

$$P_0 \equiv E\left[Z_0(T)1_A\right], \quad \forall A \in F(T), \tag{20}$$

则在 $F(T)$ 上测度 P_0 等价于历史测度 P.

由（19）式给出的 $Z_0(t)$ 是局部鞅，而且为上鞅. 当且仅当对任意 $t \in [0,T]$，$E\left[Z_0(t)\right]=1$ 时，$Z_0(t)$ 是鞅. 又依据 Novikov 定理，$Z_0(t)$ 是鞅的充分条件为

$$E\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \|\theta(t)\|^2 \mathrm{d}t\right\}\right] < \infty . \tag{21}$$

特别地，如果 $\theta(\cdot)$ 有界，$Z_0(t)$ 是鞅. 又由 Girsanov 定理，$W_0(t) \equiv W(t) + \int_0^t \theta(u)\mathrm{d}u$ 关于 $\{F(t)\}$ 是测度 P_0 下的 D 维 Brown 运动. （11）式表示的超额收益率过程可改写为 $R(t) = \int_0^t \sigma(u)\mathrm{d}W_0(u)$，它是 P_0 -局部鞅. （13）式表示的折现财富过程可改写为

$$\frac{X(t)}{S_0(t)} = x + \int_0^t \frac{1}{S_0(u)} \pi'(u)\sigma(u)\mathrm{d}W_0(u), \quad 0 \le t \le T ,$$