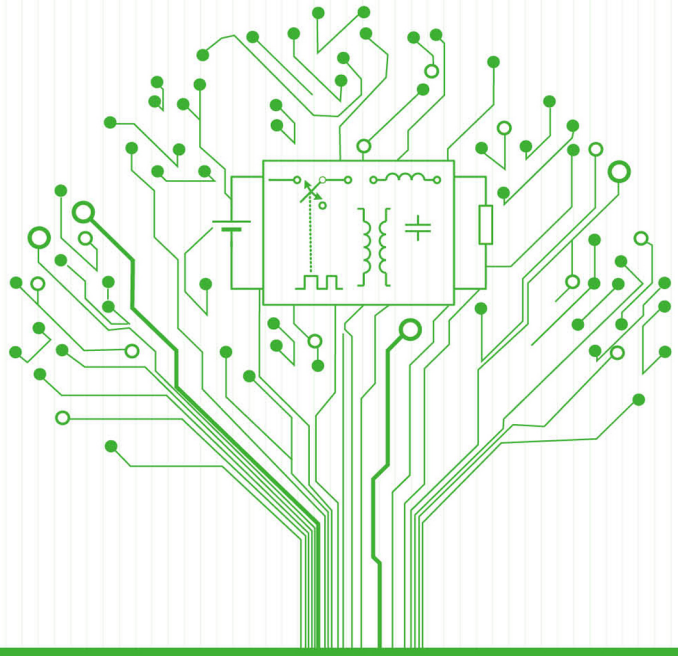
电子信息与电气工程技术丛书 E&E

MODELING、CONTROL AND DIGITAL CONTROLLER IMPLEMENTATION OF SWITCHING POWER CONVERTERS

开关变换器建模、控制及其控制器的数字实现

程红 王聪 王俊 编著
Cheng Hong Wang Cong Wang Jun



清華大學出版社

电子信息与电气工程技术丛书

开关变换器建模、控制及其控制器的数字实现

程 红 王 聪 王 俊 编著

清华大学出版社
北京

前言

电力电子技术是应用以开关方式工作的电力半导体器件对电能进行变换和控制的技术，电力电子技术经过半个世纪的发展，已经形成完整的理论和学科体系，并在工业中得到了广泛的应用。在21世纪，电力电子技术将会对人类社会的可持续发展、节能环保，以及工业的现代化进步发挥更大的推动作用。电力电子技术的进步与发展被各国专家学者视为人类社会的第二次电子革命。本领域的知名专家B. K. Bose教授认为："电力电子技术在当今时代具有与计算机技术、通信技术和信息技术同等重要的作用，如果不是更重要的话。"DC-DC开关变换器是电力电子技术应用的一个重要分支。采用高频开关DC-DC变换器技术构成的高频开关电源从20世纪70年代开始，已经广泛地取代了线性调节式电源，得到了越来越多的应用，在电力电子应用领域，高频开关电源，无论是应用范围，还是应用数量都是任何其他电力电子电源无法比拟的。在20世纪末，在IT和通信产业需求的推动下，DC-DC开关变换器技术和产业得到了迅猛的发展。在21世纪，受节能环保大趋势的推动，在新能源发电、大规模储能装置，以及电动汽车等领域，DC-DC开关变换器技术更是发现了其新的应用领域。

DC-DC开关变换器在应用过程中，通常希望其被控量即输出量（例如输出电流或输出电压）能够保持为恒定值或按照某种要求的规律运行，这就需要对被控量进行检测，然后反馈后与给定量进行比较，根据比较得到的差值按一定的控制策略施加相应的控制作用。因此，DC-DC开关变换器在应用中构成了一个典型的闭环反馈自动控制系统。与所有的闭环反馈自动控制系统一样，DC-DC开关变换器系统能够得到很好应用的前提是具有良好的稳定性、快速性和准确性，即系统首先需要是稳定的，同时还需要具有良好的动态特性和稳态精度。

为了达到上述目标，首先需要对DC-DC开关变换器自身的动态特性有充分的了解。每一个开关变换器都有其独特的动态特性，这些独特的动态特性决定了开关变换器的动态响应，稳定性以及对输入电压和输出负载变化的敏感性。DC-DC开关变换器是非线性变结构系统，在自动控制理论领域中是一类被称为本质非线性的对象，为了能够对此类控制对象进行有效的建模与分析，20世纪70年代陆续提出了一类基于变量开关周期平均的建模方法，经过此类平均化处理后的DC-DC开关变换器对象虽然仍然是非线性的，但不再是本质非线性的，对于处理后的非线性对象再经过自动控制理论中常用到的线性化处理方法，就可以得到近似线性对象。有了DC-DC开关变换器对象数学模型，就可以很方便地应用经典自动控制理论完成系统控制器的设计，从而完成整个闭环控制系统的设计。

在实际工程应用中，DC-DC开关变换器的控制器通常都是用模拟电路实现的。近年

来，随着数字控制芯片价格的不断下降。数字控制技术在中小功率 DC-DC 开关变换器中的应用引起人们越来越多的兴趣。与传统的模拟控制技术相比，数字控制技术具有许多独特的优越性，如：抗噪声能力强，对器件老化和环境因素变化不敏感，具有可编程性，这使其可以很容易通过数字芯片的相互通信对于多电源供电的数字系统实现系统级的协调，可以实时、在线地对控制器参数进行调节，可以方便地实现各种复杂的非线性控制算法等。

本书讨论了各类连续导电型和不连续导电型的 DC-DC PWM 开关变换器的基本原理、基本的基于变量开关周期平均的建模方法、基于频域分析的系统控制器设计方法、基于数字控制理论的 DC-DC PWM 开关变换器的数字控制器设计方法，以及相应的 DSP 实现。本书的目的是使读者能够将电力电子技术知识、自动控制理论知识，以及计算机控制理论知识结合起来，学会对由 DC-DC PWM 开关变换器为对象构成的自动控制系统进行分析与设计的方法。

本书是作者在给本校电力电子与电力传动专业研究生授课讲义基础上编写的。第 1 章讨论了基本的 PWM DC-DC 开关变换器在连续导电模式(CCM)与不连续导电模式(DCM)下的稳态工作原理，分析了电感、电容，以及开关元件的非理想特性对开关变换器稳态性能的影响以及开关变换器的效率问题。第 2 章主要介绍了对 CCM 模式下运行的开关变换器，如何利用开关周期平均以及低频小信号扰动法，建立开关变换器在某一稳态工作点附近的交流小信号线性模型的思路；重点分析了两种常用的基本建模方法，即状态空间平均法和平均值等效电路法，在此基础上进一步讨论了 DC-DC 开关变换器的统一电路模型。第 3 章讨论了线性系统闭环反馈控制系统的基本理论，包括开环系统以及闭环系统的频域分析方法，介绍了如何运用线性系统闭环反馈控制理论，设计出满意的闭环系统补偿网络，使得在 CCM 模式下运行的开关变换器满足要求的稳态和动态性能指标。第 4 章介绍了在不连续导电模式(DCM)下运行的 DC-DC 变换器的建模与控制方法，讨论了 DCM 模式下 DC-DC 变换器的平均开关模型，包括大信号稳态模型和交流小信号模型，并以 DCM 模式下工作的反激变换器为例，讨论了 DCM 模式开关变换器闭环控制器的设计方法。第 5 章讨论了电流控制型开关变换器的建模与控制方法，分析了采用电流控制时开关变换器在建模和控制器设计时所面对的一些特殊性问题。第 6 章介绍了计算机控制系统、数字控制系统、离散控制系统的基本概念和相关基础知识，包括：信号的采样与重构、脉冲传递函数、离散系统的频域描述、离散系统的稳定性、稳态误差及动态特性分析方法。第 7 章讨论了 DC-DC 开关变换器的数字补偿器或数字控制器的实用设计方法，包括基于连续系统设计方法的“间接设计法”，以及直接在离散域进行控制器设计的“直接设计法”。对于在实际中最常用的数字 PID 控制器也给予了充分的描述。第 8 章讨论了 DC-DC 开关变换器的数字补偿器基于数字信号处理器 DSP 的具体实现。本书在对上述内容进行讲解的同时，给出了很多实用的 MATLAB 分析程序，这可以使得那些对自动控制原理、计算机控制理论不是很熟悉的读者，也能够轻松地应用这些本书提供的程序完成对开关变换器的系统分析和控制器设计。

本书第 2 章到第 7 章内容由程红博士编写，第 8 章内容由博士研究生王俊编写。王

聪教授编写了第1章内容，并对全书内容进行了规划与审核。在本书的编写过程中，学习并引用了国内外相关教材和重要文献，使作者受益匪浅，在此对文献作者表示衷心的感谢。研究生朱锦标、吴迪、高巧梅、冯强、张颖参与了本书大量插图绘制工作，在此一并表示感谢。本书可作为高等院校电气工程专业或自动化专业高年级本科生以及研究生的教学参考书，也可供从事电力电子技术研究的广大科技人员阅读。

本书涉及的内容繁多，而作者的学识有限，因此对各个章节的论述不够深入全面，书中一定有值得讨论之处，敬请广大读者予以批评指正。

编　著

2013年3月于北京

目录

第 1 章　基本的 PWM DC-DC 开关变换器 …… 1

1.1　概述 …… 1

1.2　Buck 变换器 …… 2

1.2.1　连续导电模式 …… 4

1.2.2　不连续导电模式 …… 6

1.3　Boost 变换器 …… 9

1.3.1　连续导电模式 …… 9

1.3.2　不连续导电模式 …… 11

1.4　Buck-Boost 变换器 …… 14

1.5　Cúk 变换器 …… 17

1.6　变换器的损耗和效率 …… 20

第 2 章　DC-DC 开关变换器的动态建模 …… 25

2.1　概述 …… 25

2.2　Buck 变换器的交流模型 …… 27

2.2.1　非线性模型 …… 28

2.2.2　小信号线性模型 …… 30

2.2.3　小信号等效电路 …… 34

2.3　状态空间平均法 …… 35

2.3.1　非线性模型 …… 36

2.3.2　小信号线性模型 …… 38

2.3.3　非理想 Buck 变换器举例 …… 43

2.4　平均开关模型 …… 47

2.4.1　开关网络大信号平均模型 …… 48

2.4.2　平均开关模型的线性化 …… 49

2.4.3　基于平均开关模型的变换器建模 …… 50

2.5　DC-DC 开关变换器的统一电路模型 …… 57

2.6　反激变换器的建模 …… 62

2.6.1　非线性模型 …… 62

2.6.2　非线性模型的线性化 …… 65

2.6.3　等效线性电路 …… 66

2.6.4　统一电路模型 …… 67

目录

第 3 章　DC-DC 变换器闭环控制设计 …… 70
3.1　概述 …… 70
3.2　开关变换器开环系统的频域分析 …… 73
3.2.1　频率特性的基本概念 …… 73
3.2.2　开关变换器开环系统的典型环节 …… 73
3.2.3　基本变换器的频域分析 …… 80
3.3　开关变换器闭环系统的频域分析 …… 88
3.3.1　稳定裕度 …… 88
3.3.2　开关变换器系统的稳定性分析 …… 90
3.3.3　闭环频域性能指标 …… 94
3.4　补偿网络设计 …… 97
3.4.1　超前补偿 …… 98
3.4.2　滞后补偿 …… 100
3.4.3　滞后-超前补偿 …… 103
3.5　电压型 Buck 变换器补偿网络的设计 …… 104
3.6　双极点-双零点补偿网络 …… 110

第 4 章　DCM 模式开关变换器的建模与控制 …… 112
4.1　DCM 模式平均开关模型 …… 112
4.1.1　开关网络输入端口等效电路模型 …… 113
4.1.2　开关网络输出端口等效电路模型 …… 115
4.1.3　DCM 模式平均开关模型 …… 116
4.2　DCM 模式开关变换器的直流模型 …… 117
4.3　DCM 模式平均开关模型的线性化 …… 119
4.3.1　DCM 模式平均开关模型线性化的基本思路 …… 119
4.3.2　一阶泰勒级数近似法 …… 121
4.4　DCM 模式 DC-DC 变换器统一结构交流小信号模型 …… 126
4.5　理想反激变换器的等效 Buck-Boost 模型 …… 130
4.6　DCM 模式下反激变换器电压控制器设计实例 …… 132
4.6.1　反激变换器的控制-输出传递函数 G_{vd} …… 133
4.6.2　单极点型控制对象的电压控制器设计 …… 134

第 5 章　电流控制型开关变换器的建模与控制 …… 137
5.1　峰值电流控制的基本原理 …… 137

目录

5.2 峰值电流控制的稳定性分析与斜坡补偿 …… 138
5.2.1 次谐波振荡 …… 138
5.2.2 次谐波振荡的消除——斜坡补偿 …… 141
5.3 电流峰值控制小信号一阶模型 …… 144
5.3.1 一阶模型建模 …… 144
5.3.2 平均开关模型法 …… 148
5.4 基于一阶模型的补偿网络设计 …… 150
5.5 电流控制环的修正模型 …… 154
5.5.1 电流控制环一阶模型的修正 …… 154
5.5.2 电流控制环修正模型的应用 …… 157

第 6 章 计算机控制系统基础 …… 161
6.1 概述 …… 161
6.2 信号采样与重构 …… 165
6.2.1 信号采样与采样定理 …… 165
6.2.2 信号的恢复与重构 …… 169
6.3 计算机控制系统的数学描述 …… 173
6.3.1 脉冲传递函数 …… 173
6.3.2 采样系统环节连接的等效变换 …… 174
6.3.3 闭环系统脉冲传递函数 …… 177
6.3.4 离散系统的频域描述 …… 177
6.4 计算机控制系统分析 …… 179
6.4.1 离散系统的稳定性分析 …… 179
6.4.2 离散系统的稳态误差分析 …… 180
6.4.3 离散系统的动态特性分析 …… 182

第 7 章 数字电源离散控制器设计 …… 184
7.1 概述 …… 184
7.2 连续系统设计的离散等效 …… 185
7.2.1 近似 z 型代换离散法 …… 185
7.2.2 零极点匹配法 …… 191
7.3 基于连续系统的设计方法举例 …… 195
7.4 w 变换设计法 …… 198
7.5 离散域直接设计法 …… 202

目录

7.6 离散 PID 控制器设计 …… 209
7.6.1 基本 PID 控制及数字化 …… 210
7.6.2 数字 PID 控制算法的改进 …… 212

第 8 章 开关变换器数字控制器的 DSP 实现 …… 215
8.1 数字信号处理器 …… 215
8.2 基于 DSP 的控制器设计 …… 218
8.2.1 系统开发环境 …… 218
8.2.2 开关变换器数字控制器主体程序框架 …… 225
8.2.3 输入和输出,AD 和 PWM …… 228
8.2.4 数字 PID 控制器的 C 语言编程实现 …… 232
8.2.5 数据的表示方式 …… 237
8.3 Buck 变换器的数字控制系统的硬件实现 …… 242
8.3.1 性能参数 …… 242
8.3.2 数字控制器设计 …… 242
8.3.3 软件实现 …… 244
8.3.4 实验结果 …… 252

参考文献 …… 254

第1章 基本的PWM DC-DC开关变换器

1.1 概述

开关变换器是一种通过电子开关周期性分合的调节方式控制电能流动的功率变换电路，图 1.1(a)所示为一个简单的 DC-DC 开关变换器。定义开关周期为 T_s，开关频率为 f_s。开关分别在 T_{on}时间内导通，在 T_{off} 时间内关断，开关的导通占空比 D 为开通时间 T_{on}和开关周期 T_s 的比值。

$$D = \frac{T_{on}}{T_s} = T_{on} f_s, \quad 1 - D = \frac{T_{off}}{T_s} = T_{off} f_s \tag{1.1}$$

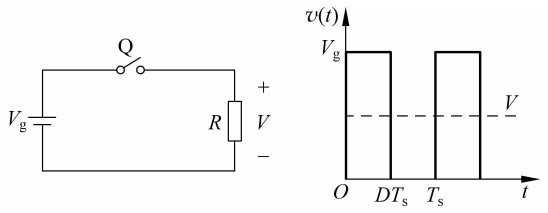
在这种 DC-DC 变换器中，电子开关的开关周期 T_s 或开关频率 f_s 通常是固定的。这种保持电子开关的开关频率恒定，通过改变导通时间长短从而达到调节输出电压目的的控制方式，称为脉宽调制(pulse width modulation，PWM)方式。在开关导通阶段，负载电阻 R 与输入电源 V_g 相连，而在开关断开阶段，负载 R 与输入电源断开。因此，加在负载电阻 R 上的电压 $v(t)$是一个脉动的直流电压，如图 1.1(b)所示，电路的平均输出电压 V 为

$$V = \frac{1}{T_s} \int_0^{DT_s} V_g \mathrm{d}t = DV_g \tag{1.2}$$

图 1.1 所示的简单的开关变换器由于输出电压的脉动，在很多实际应用场合是不可接受的。为了使负载能得到接近稳定的直流电压，电路的输出端需增加一个由电感和电容构成的低通滤波器，用来滤除由于电路开关作用造成的脉动，使能量能够平滑地从输入传向负载。

因此，基本的 DC-DC 开关变换器结构如图 1.2 所示，由若干按照特定拓扑连接的电子开关、能量存储元件电感和电容组成。这里，电感和电容一方面连接成低通滤波器，有效地滤除输出电压中的开关频率分量，另一方面它们又是能量存储与传递的元件，目的是平滑能量的传递过程。

图 1.2 中增加的变压器表示 DC-DC 开关变换器也可以一种隔离的方式完成能量从输入到输出的传递。因而根据变换器电路中是否有变压器，DC-DC 开关变换器分成隔离型和不隔离型两种类型。本章



(a) 开关变换器电路　　(b) 脉动输出电压波形

图 1.1　开关调节方式的 DC-DC 变换器

主要对不隔离的基本 DC-DC 开关变换器的拓扑结构和稳态特性进行分析。稳态是指开关变换器工作占空比 D 在固定开关频率下保持为常值。这就意味着变换器电路中的电流波形和电压波形在每个开关周期是重复的，波形为周期性的波形。

在不隔离 DC-DC 开关变换器中，Buck 变换器和 Boost 变换器是两种最基本的拓扑，电路为单开关拓扑，除了一个电子开关外，还有一个二极管、一个电感以及一个电容。其中电容跨接在电路的输出端。其他变换器拓扑大多数都是由这两种电路导出。下面将分别介绍其中几种典型的拓扑结构，即 Buck、Boost、Buck-Boost 和 Cúk 变换电路。在以下分析过程中，若不加特殊说明，将总是基于如下三条假设：

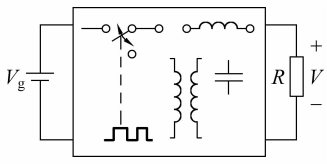


图 1.2　基本的 DC-DC 开关变换器结构

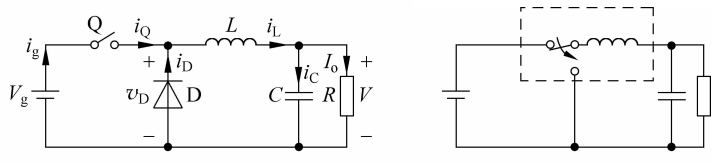
(1) 电路中的开关管、二极管均是理想器件，即导通时压降为零，截止时电流为零，状态转换瞬间完成；

(2) 电路中的电感、电容是理想元件，即不考虑它们的任何寄生参数；

(3) 输出电压的纹波远小于输出电压，故可以忽略。

1.2　Buck 变换器

Buck 变换器的基本电路拓扑如图 1.3(a)所示，电路由开关管 Q、续流二极管 D、滤波电感 L、滤波电容 C、输入电压 V_g 及输出负载 R 构成。如果将开关 Q、二极管 D、电感 L 抽象成一个三端开关网络，则 Buck 变换器可用图 1.3(b)所示电路表示。Buck 变换器为降压型变换器，输出电压 V 比输入电压 V_g 低。根据输出电感 L 中的电流是否连续，Buck 变换器可以工作在连续导电模式(continuous conduction mode，CCM)和不连续导电模式(discontinuous conduction mode，DCM)。下面将针对这两种工作模式，对 Buck 变换器的稳态特性进行分别讨论。



(a) 基本电路　　(b) 等效电路

图 1.3　Buck 变换器的基本电路拓扑

在对开关变换器进行稳态分析之前，先介绍两个非常重要的稳态原理，即电感伏秒平衡原理和电容安秒平衡原理。这两个特性适用于各种开关变换器的稳态特性分析。

1. 电感伏秒平衡原理

描述电感元件的特性方程为

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \quad 或 \quad \mathrm{d}i_L(t) = \frac{1}{L}v_L(t)\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

将上式在一个开关周期内进行积分，取 $t=0$ 到 T_s，有

$$i_L(T_s) - i_L(0) = \frac{1}{L}\int_0^{T_s} v_L(t)\mathrm{d}t \tag{1.4}$$

由于开关变换器在稳态时占空比 D 在固定开关频率下保持为常值，变换器电路中的电流波形和电压波形在每个开关周期是重复的，即有 $i_L(T_s)=i_L(0)$，代入式(1.4)得

$$0 = \int_0^{T_s} v_L(t)\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

若将式(1.5)等式两边除以开关周期 T_s，得电感电压的开关周期平均值或电感电压 $v_L(t)$ 的直流分量，用〈v_L〉表示，有

$$\langle v_L\rangle = \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} v_L(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{1.6}$$

由于电感电压积分的单位为(伏秒)，因而该特性被称为电感伏秒平衡原理。

2. 电容安秒平衡原理

描述电容元件的特性方程为

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad 或 \quad \mathrm{d}v_C(t) = \frac{1}{C}i_C(t)\mathrm{d}t \tag{1.7}$$

将上式在一个开关周期内进行积分，取 $t=0$ 到 T_s，有

$$v_C(T_s) - v_C(0) = \frac{1}{C}\int_0^{T_s} i_C(t)\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

由于开关变换器在稳态时有 $v_C(T_s)=v_C(0)$，代入式(1.8)得

$$0 = \int_0^{T_s} i_C(t)\mathrm{d}t \tag{1.9}$$

若将式(1.9)等式两边除以开关周期 T_s，可得电容电流的开关周期平均值或电容电流 $i_C(t)$ 的直流分量。用〈i_C〉表示，有

$$\langle i_C\rangle = \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} i_C(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{1.10}$$

式(1.10)表示了电容安秒平衡或电容电荷平衡原理。

式(1.6)和式(1.10)可以直观地分析为：如果电感两端电压的直流分量或电容电流的直流分量不为零，电感电流或电容电压的平均值将会不断增大或减小，因而变换器电路并未达到稳定状态。

下面将针对 CCM 和 DCM 两种工作模式，对 Buck 变换器的稳态特性分别进行讨论。

1.2.1 连续导电模式

连续导电模式下的 Buck 变换器电路工作过程根据开关管的状态分为 T_{on} 和 T_{off} 两个阶段。

T_{on} 阶段($0\sim DT_s$)：在这个阶段，开关管 Q 导通。电感上的电压决定了电流的上升率。由于输入电压 V_g 大于输出电压 V，这个阶段电感 L 中的电流线性上升，电感处于储能阶段。在开关 Q 导通期间，电路中的电感电压、电感电流和电容电流为

$$\begin{cases} v_L(t) = V_g - v(t) \approx V_g - V \\ i_L(t) = i_L(0) + \dfrac{V_g - V}{L}t \\ i_C(t) = i_L(t) - \dfrac{v(t)}{R} \approx i_L(t) - I_o \end{cases} \tag{1.11}$$

当 $t=DT_s=t_{on}$ 时，稳态电感电流增量 $\Delta I_{L1}=i_L(t_{on})-i_L(0)$ 可表示为

$$\Delta I_{L1} = \int_0^{DT_s} \frac{V_g - V}{L}\mathrm{d}t = \frac{V_g - V}{L}DT_s \tag{1.12}$$

当给定电感电流波动范围时，采用式(1.12)可计算电感 L 所需的参数值。

T_{off} 阶段($DT_s\sim T_s$)：在这个阶段，开关管 Q 断开，电路进入 T_{off} 时间段。由于电感电流不能突变，电感上的电压极性反向，电感电流 i_L 通过续流二极管 D 续流，向电容和负载释放能量。电感电流 i_L 在输出电压 V 的作用下线性衰减。在 $T_{off}=[(1-D)T_s]$ 间隔内，电路中的电感电压、电感电流和电容电流为

$$\begin{cases} v_L(t) = -v(t) \approx -V \\ i_L(t) = i_L(DT_s) - \dfrac{V}{L}(t - DT_s) \\ i_C(t) = i_L(t) - \dfrac{v(t)}{R} \approx i_L(t) - I_o \end{cases} \tag{1.13}$$

在 T_{off} 阶段内，电感电流增量 $\Delta I_{L2}=i_L(T_s)-i_L(t_{on})$ 可表示为

$$\Delta I_{L2} = \int_{DT_s}^{T_s} \left(-\frac{V}{L}\right)\mathrm{d}t = -\frac{V}{L}(1-D)T_s \tag{1.14}$$

式(1.11)、式(1.13)给出了 Buck 变换器稳态时在一个开关周期两个阶段的电感电压和电容电流。依据电感伏秒平衡特性，知开关周期电感电压平均值 $\langle v_L\rangle=0$，即

$$\langle v_L\rangle = (V_g - V)\cdot D + (-V)\cdot(1-D) = 0$$

由此式可推出输出电压

$$V = DV_g \tag{1.15}$$

定义输入输出电压传输比 $M=V/V_g$，则 CCM 模式下 Buck 变换电路 $M=D$。

因此，CCM 模式下的 Buck 变换器输出电压 V 为占空比 D 和输入电压 V_g 的乘积。由于 $D\leqslant 1$，故在 Buck 变换电路中，总有 $V\leqslant V_g$。当输入电压或负载发生波动时，可以由 Buck 变换器的电压调节器通过改变占空比调整电路的传输能量，维持输出电压的恒定。占空比 D 的调节采用基于 PWM 的负反馈控制方法实现，这将在第 3 章进行讨论。

依据电容安秒平衡特性，开关周期电容电流平均值 $\langle i_C\rangle=0$，则

$$\langle i_C(t)\rangle = \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} i_C(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T_s}\left[\int_0^{DT_s} i_C(t)\mathrm{d}t + \int_{DT_s}^{T_s} i_C(t)\mathrm{d}t\right] = 0$$

将式(1.11)与式(1.13)中两个阶段的电容电流表达式分别代入上式，可得

$$I_o = \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} i_L(t)\mathrm{d}t = \langle i_L \rangle \tag{1.16}$$

此式表明电感电流的开关周期平均值$\langle i_L \rangle$等于输出电流 I_o。

当电路在稳态工作时，电感电流在一个开关周期的初值 $i_L(0)$等于终值 $i_L(T_s)$，于是有

$$\Delta I_L = \Delta I_{L1} = -\Delta I_{L2} \tag{1.17}$$

参考图 1.3(a)，根据基尔霍夫电流定律，电容电流为

$$i_C = i_L - i_o = i_L - \frac{v}{R} \approx i_L - \frac{V}{R} = i_L - I_o \tag{1.18}$$

二极管电流 i_D 及输入电流 i_g 分别为

$$i_D = x i_L, \quad i_L = (1-x) i_L$$

式中

$$x = \begin{cases} 0 & 0 < t < DT_s \\ 1 & DT_s < t < T_s \end{cases}$$

图 1.4 为 Buck 变换器一个开关周期中的主要电量波形。

在前面的推导中，一直假定输出电压 V 在一个开关周期中是恒定不变的，这实际上是假定电容 C 的电容量无穷大或开关频率 f_s 无限高。在实际应用中并不是这种情况，经过低通滤波之后的输出电压 V 是有波动的。设负载电流恒定为 I_o，由 $i_C = i_L - I_o$，$I_o = I_L$ 及 $I_C = 0$ 可知，$i_C = i_L - I_o = \Delta i_L$。即当电感电流 i_L 大于 I_o时，输出电容充电；当 i_L 小于 I_o时，输出电容放电。电容充电和放电的时间在一个开关周期内相等，均等于半个开关周期。由于输出电容直接与负载并联，因此输出电压 $v(t)$等于电容电压 v_C，即

$$v(t) = V + \frac{1}{C}\int_0^{T_s/2} i_C(t)\mathrm{d}t \tag{1.19}$$

如图 1.5 所示，输出电压纹波的峰-峰值为

$$\Delta V = \frac{1}{C}\int_A^C i_C(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{C} \times \frac{1}{2} \times \frac{\Delta I_{L1}}{2} \times \frac{T_s}{2} \tag{1.20}$$

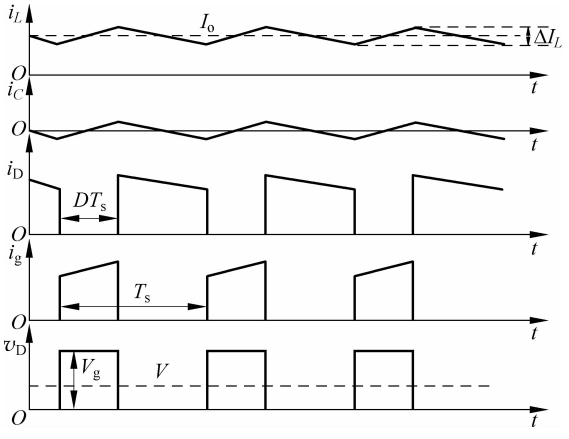


图 1.4 Buck 变换器主要电量波形

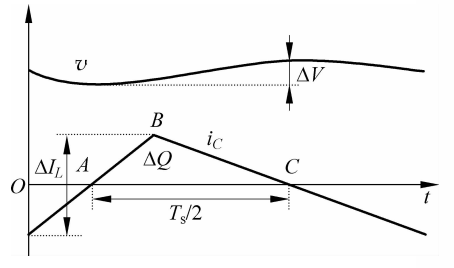


图 1.5 Buck 变换器的输出电压纹波

将式(1.12)和式(1.15)代入式(1.20),得输出电压纹波的峰-峰值为

$$\Delta V = \frac{V(1-D)}{8f_s^2 LC} \tag{1.21}$$

由式(1.21)可以看出,输出的纹波电压与 f_s^2 以及 LC 乘积成反比。因此,提高开关频率 f_s,可有效减小输出电压纹波;若维持纹波不变,提高开关频率 f_s,可以减小滤波电感和滤波电容的数值。当给定开关频率及输出电压纹波要求范围时,结合式(1.12)和式(1.21)可计算满足要求的电容 C 的参数值。

在前面的讨论中,假定电路处于连续导电模式,即总是有电感电流 $i_L \neq 0$,实际中并不总是如此。由式(1.12)可知,稳态时电感电流的增量 ΔI_L 与电感值 L 及开关频率 f_s 成反比。对于确定的负载电阻,随着电感 L 减小或开关频率 f_s 降低,将出现电感电流 i_L 在一个周期结束前就下降到零并一直保持到周期结束的情况。在这种情况下,每个周期的开始,电感电流都是从零开始变化的,这就是所谓不连续导电模式(DCM)。由图 1.4 可看出,当电感电流的峰-峰值的一半 $\left(\frac{1}{2}\Delta I_L\right)$ 大于其平均值 I_L 时,电路就将处于不连续导电模式。由前面讨论已知,$\Delta I_L = \Delta I_{L1} = |\Delta I_{L2}|$,且 $I_L = I_o$,根据式(1.14),可以得出,Buck 变换电路处于连续导电模式应满足的条件为

$$\frac{V}{2L}(1-D)T_s < I_o \tag{1.22}$$

定义无量纲参数 K 为

$$K = \frac{2L}{RT_s} \tag{1.23}$$

将式(1.23)代入式(1.22),整理可得 Buck 变换器工作在连续与断续导电模式时的边界条件为

$$K_{crit} = 1 - D = 1 - M \tag{1.24}$$

式中,K_{crit} 称为临界无量纲参数。显然,$K > K_{crit}$ 为连续导电模式,$K < K_{crit}$ 为不连续导电模式。

1.2.2 不连续导电模式

由上述分析可知,当电感电流的峰-峰值的一半 $\frac{1}{2}\Delta I_L$ 等于其平均值 I_L 时,电路处于临界连续导电模式。此时 $K = K_{crit}$,电感中的储能正好维持到下个开关周期的起始时刻。而当 $K < K_{crit}$ 时,电感电流将出现不连续现象,此时 Buck 变换器工作在不连续导电模式(DCM)。

CCM 模式下的 Buck 变换器在一个开关周期 T_s 中分为两个阶段,即开关管 Q 导通阶段(DT_s 阶段)和二极管 D 续流阶段($(1-D)T_s$ 阶段)。与之不同,当 Buck 变换器处于 DCM 模式时,一个开关周期 T_s 分为三个阶段,如图 1.6 所示。第一阶段($0 < t \leqslant t_1$)为开关管 Q 导通阶段,记为 DT_s 阶段,该阶段电感电流线性上升,电感处于储能状态;第二阶段($t_1 < t \leqslant t_2$)为二极管 D 续流阶段,记为 $D_2 T_s$ 阶段,该阶段电感电流线性下降,电感处于释能状态。当电感电流下降至零时刻开始第三阶段;第三阶段($t_2 < t \leqslant T_s$),记为($D_3 T_s$)阶

段，该阶段开关管 Q 和二极管 D 均处于截止状态，由滤波电容释放能量向负载供电。图 1.7为 DCM 模式下的 Buck 变换器电感电流和二极管电流波形图。

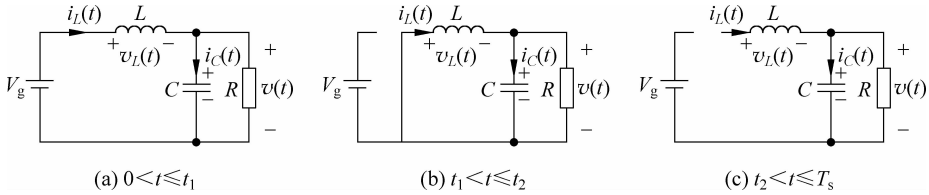


图 1.6　Buck 变换器 DCM 模式下的等效电路

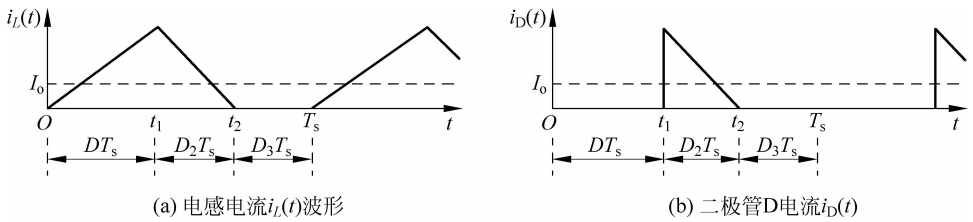


图 1.7　DCM 模式下的 Buck 变换器电流波形

对 DCM 模式 Buck 变换器的稳态特性分析，仍将依据前述的电感伏秒平衡和电容安秒平衡原理，同时假设变换器输出电压纹波的峰-峰值远小于输出电压的直流分量，并近似认为输出电压 $v(t)\approx V$，V 为输出电压的直流分量。

下面讨论 Buck 变换器 DCM 模式下的输入输出电压传输比 $M=V/V_g$。

(1) 阶段一(DT_s)：如图 1.6(a)所示。在这个阶段，开关管 Q 导通，电感电流线性增长，电感处于储能增加状态。电路中的电感电压、电感电流和电容电流为

$$\begin{cases} v_L(t) = V_g - v(t) \approx V_g - V \\ i_L(t) = \dfrac{V_g - V}{L}t \\ i_C(t) = i_L(t) - \dfrac{v(t)}{R} \approx i_L(t) - I_o \end{cases} \tag{1.25}$$

(2) 阶段二(D_2T_s)：如图 1.6(b)所示。在这个阶段，开关管 Q 断开，二极管 D 续流。电感上的电压极性反向，向电容和负载释放能量。电感电流在输出电压 V 的作用下线性衰减。电路中的电感电压、电感电流和电容电流为

$$\begin{cases} v_L(t) = -v(t) \approx -V \\ i_L(t) = i_L(DT_s) - \dfrac{V}{L}(t - DT_s) \\ i_C(t) = i_L(t) - \dfrac{v(t)}{R} \approx i_L(t) - I_o \end{cases} \tag{1.26}$$

(3) 阶段三(D_3T_s)：如图 1.6(c)所示。当 $t=(D+D_2)T_s$ 时刻，电感电流下降至零，在剩下的 $t_2<t\leqslant T_s$ 阶段，电感电压和电感电流均为零，开关管 Q 和二极管 D 均处于截止状态。描述电路该阶段的方程为

$$\begin{cases} v_L(t) = 0, \quad i_L(t) = 0 \\ i_C(t) = i_L(t) - \dfrac{v(t)}{R} = -\dfrac{V}{R} = -I_o \end{cases} \tag{1.27}$$

式(1.25)、式(1.26)、式(1.27)分别给出了 Buck 变换器稳态时在一个周期三个阶段的电感电压和电容电流。依据电感伏秒平衡特性,有开关周期电感电压平均值$\langle v_L \rangle = 0$,即

$$\langle v_L \rangle = (V_g - V) \cdot D + (-V) \cdot D_2 + 0 \cdot D_3 = 0$$

由此式可推出则输出电压为

$$V = V_g \frac{D}{D + D_2} \tag{1.28}$$

式中,占空比 D 可以看做是已知的控制量,但 D_2 为未知量。为了消除 D_2,得出输入输出电压传输比 M,还需要根据电容安秒平衡列出方程式:

$$\begin{aligned}\langle i_C(t) \rangle &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_C(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T_s}\left(\int_0^{DT_s} i_C(t)\mathrm{d}t + \int_{DT_s}^{(D+D_2)T_s} i_C(t)\mathrm{d}t + \int_{(D+D_2)T_s}^{T_s} i_C(t)\mathrm{d}t \right) = 0\end{aligned} \tag{1.29}$$

将式(1.25)、式(1.26)、式(1.27)中三个阶段的电容电流表达式分别代入式(1.29),并由式(1.28)解得 $D_2 = \dfrac{D(V_g - V)}{V}$ 代入,经过整理可得

$$\frac{2L}{RT_s}\left(\frac{V}{V_g}\right)^2 + D^2 \frac{V}{V_g} - D^2 = 0 \tag{1.30}$$

求解此二阶方程,得 DCM 模式下 Buck 变换器的输入输出电压传输比为

$$M(D) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{8L}{D^2 T_s R}}}, \quad K < K_{\mathrm{crit}} \tag{1.31}$$

将式(1.23)代入式(1.31),可得

$$M(D) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{4K}{D^2}}}, \quad K < K_{\mathrm{crit}} \tag{1.32}$$

式(1.32)表示的是无量纲参数 $K < K_{\mathrm{crit}}$ 时,Buck 变换器的稳态电压传输比。因此,在进一步分析式(1.32)前,需先对式(1.24)做进一步的分析。依据式(1.24)绘制临界无量纲参数 K_{crit} 与导通比 D 的关系,得图 1.8 所示的 Buck 变换器电感电流导电模式分界图。图中阴影线部分表示变换器工作在电感电流不连续导电模式。

由图 1.8 可知,当无量纲参数 $K < 1$ 时,与分界线的交点为

$$D = 1 - K \tag{1.33}$$

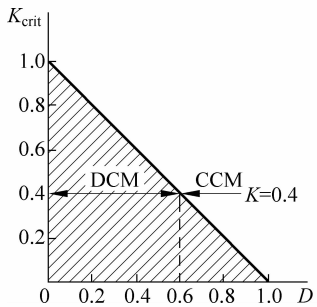


图 1.8 Buck 变换器电感电流导电模式的分界

此式表明,Buck 变换器电路,当负载 R 和输入电压 V_g 变化时,变换器的工作模式可能发生改变。例如,当 $K = 0.4$ 时,与分界线交于 $D = 0.6$ 点,当变换器输入电压变化使 $D < 0.6$ 时,变换器工作在不连续导电模式,而当 $D > 0.6$ 时,变换器工作在连续导电模式。当 $K > 1$ 时,Buck 变换器将永远工作在连续导电模式。

根据式(1.32),K($K < 1$)取不同数值时,可绘制出 Buck 变换器稳态电压传输比 $M(D)$ 与占空比 D 的关系如图 1.9 所示。通过上述分析可知,式(1.32)只适用于 $D < 1 - K$ 范围,当 $D > 1 - K$ 时,变换器进入电感电流连续导