

自然科学专题选讲

北京大学教务处 编



北京大学出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

自然科学专题选讲/北京大学教务处编.-北京:北京大学出版社,1997.10

ISBN 7-301-03453-9

I. 自… II. 北… III. 自然科学-概况 IV N1

书 名 自然科学专题选讲

著作责任者 北大教务处编

责任编辑 郑昌德

标准书号 ISBN 7-301-03453-9/N·29

出版者 北京大学出版社

地 址 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

电 话 出版部 62752015 发行部 62559712 编辑部 62752032

排印者 北京大学印刷厂

发 行 者 北京大学出版社

经 销 者 新华书店

787×1092 毫米 32 开本 9 印张 200 千字

1997 年 10 月第一版 1997 年 10 月第一次印刷

定 价 12.00 元

《自然科学专题选讲》编委会

主 编 北京大学教务处
编 委 (按姓氏笔划为序)

王正行	王祖铨	刘 雨	刘志雄
卢晓东	李承治	朱 滢	许卓群
杨承运	周一星	周赛花	张庭芳
唐世敏	常文保	葛道凯	潘 懋
臧绍先			

执行主编 杨承运

执行副主编 刘 雨 葛道凯

前 言

由北京大学教务处举办的《自然科学专题选讲》，从 1993 年开始，已办了三期，共 30 余讲，听众累计近三万人次。北京大学的课外讲座多得不可胜数，但由教务处来组织，多年来还是第一遭。其目的是为了拓宽学生在专业以外的知识面，使文科学生了解一些自然科学和当代技术，使理科学生更多的了解一些人文社会科学，以适应未来社会的需要。所以，从去年起还举办了《人文社会科学专题选讲》。

讲座的听众踊跃，远超过了原先的预期。听自然科学讲座的，不仅有文科本科学生，研究生，进修教师，还有理科的学生和教师，技术人员，校外人士，甚至还有科学院院士。可见，这类深入浅出的拓宽知识面的讲座是深受人们欢迎的，是符合需要的。另外，讲授者大多是本学科造诣高深，德高望重的教师，而所讲又多是学科前沿的知识，自然会引起广泛的兴趣。

许多听过课的人很想保存讲义以便温故知新，很多无缘听课者也很想得到一份讲稿以补缺憾。为此，我们整理了部分讲稿或记录，汇集成册，以飨读者。

编 者

1997.3

目 录

绳圈的数学·····	姜伯驹(1)
《保险精算学》	
——数学应用的新领域·····	吴 岚 杨静平(26)
编钟、龙洗、“透光”镜	
——中国古代文物中的科学与艺术 ·····	王大钧(38)
漫话周期运动	
——天体的运行和乐器的发声 ·····	武际可(51)
大爆炸宇宙学 ·····	俞允强(64)
奇妙的介观物理世界 ·····	阎守胜(82)
光信息技术 ·····	刘弘度(94)
从牛顿到曼德布罗特	
——谈谈确定论和随机论·····	刘式达(104)
宇宙分子和天体演化	
——分子天体物理学进展介绍·····	李守中(113)
没有规矩,不能成方圆	
——当代计量学介绍·····	王义道(126)
有机化学和诺贝尔奖·····	张 滂(137)
生命起源中的一个未解开的难题	
——生物分子手性的起源 ·····	王文清 张永波(158)
分子生物学研究进展·····	朱玉贤(173)
关于生物体内的化学元素图谱·····	唐任寰(185)

地球生物圈的形成与演化·····	张 昀(209)
脑科学与创造性思维·····	傅世侠(224)
矿产与人类社会·····	冯钟燕(244)
从北京城的规划建设看传统文化的 继承与发展·····	侯仁之(253)
从古岩溶地貌看青藏高原的形成与 环境演化 ·····	崔之久 高全洲(261)
南极的冰川和环境·····	刘耕年(269)

绳圈的数学

姜伯驹

所谓绳圈,首先要讲绳子。绳子是有头有尾的,头尾接起来就形成了一个圈。为什么要讲绳圈而不讲绳子呢?

绳子是用来打结和捆东西的,譬如我们系鞋带,是不是打的结都一样呢?使惯左手的人打的结与使惯右手的人打的结可能就不一样。那么怎样研究两个结是不是一样?打结的过程中绳子是挪动的。如果允许绳子自由地挪动,我们总是可以把打好结的绳子按打结的方向抽回来,再拉直,然后重新打成另一个结,这样前后两个结不就一样了吗?所以我们不能允许把绳子抽回来。而“抽回来”这件事是很难说清楚的。

数学家们想了一个办法来表示不允许抽回来。这个办法就是把绳子的两端在远处连起来,变成一个圈。问两个结是不是一样就变成问两个绳圈是不是一样。我们允许绳圈在空间挪来挪去,唯一的条件是不许把绳子割开挪动后再粘上。我们就是在这样的定义下研究两个绳圈是一样还是不一样。

现在我们看两对绳圈。如图1(a,b):第一对,看起来像是不一样的,但实际上是一样的。第二对,确实是不一样的。

在日常生活中,还可能要同时考虑几个圈。如图2:把两个分开的圈变成套在一起的圈。注意这个中间过程:断开再粘上,这是“违法”的。能否“合法地”从一个变成另一个?日常生

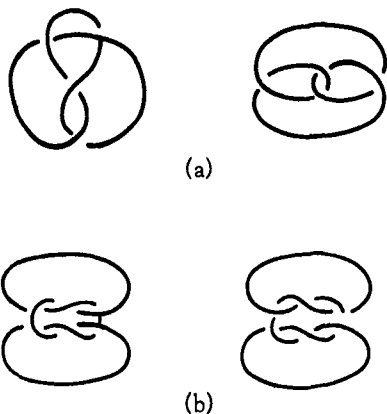


图 1

活经验告诉我们,这是不可能的,否则所有的挂锁都没用了。

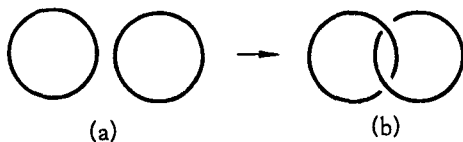


图 2

就是这些生活经验,很长时间没有人真正地做数学研究。上个世纪外国出现了《绳结大全》之类的书,主要是总结海员们的经验,在航海中,什么场合下用什么结。我国农村的马车把式对捆货物的结也是很有讲究的,结用错了,捆的东西很容易散。

数学上对绳圈的研究始于上个世纪后半期,起因是英国理论物理学家开尔文勋爵(Lord Kelvin)想要解释为什么有

这么多化学元素。当时有一种假说，认为宇宙中充斥着一种物质叫“以太”。不同的化学元素是以太的不同表现形式。他就有了这样一个奇特的想法：会不会每种化学元素就是以太的一种涡圈？像人吐出的烟圈一样，空气在周围转动是个涡流，它能保持烟圈的稳定。他想涡圈的轴心线是一个圈，可能会打结，简单的结就是简单的元素，复杂的结就是复杂的元素。

由于开尔文勋爵很有名气，经他一鼓吹，有好几个物理学家顺着他的思路去研究。首先要考虑的问题是到底有多少种结，他们通过大量的试验，经过 20 多年，到 1899 年，编了一个表，列出了画在平面上交叉点不超过 9 的结有多少。这些都是经验数据的积累，并没有证明表中每两个结都是不一样的。

这个世纪拓扑学发展起来了。拓扑学是研究几何形体连续变化的学科。绳圈可以挪动、不许断开、不许粘起来，正是连续变化的意思，研究方式符合拓扑学的思路。拓扑学的发展使对绳圈打结的研究变成数学的研究。

现在谈一下研究的基本想法。研究空间的东西多少有些不可捉摸，通常的办法是画平面投影图。它是来告诉你绳圈在空中的基本形态，在交叉点处一根线在上，一根线在下，前后相差有多远是没有关系的。对投影图还是有些基本要求的，首先的一个要求是三根线不能重在一起，如果三根重在一点上，我们就不知道后边两根哪一个在中间，哪一个在最后。我们要避免这个现象，其实只要把其中一根从交叉点处挪开一点就可以。另一个要求是在交叉的地方都是两根线互相穿越，不是一根碰到另一根又折回来。就是说，我们不要那种“病态”的投影图。

对绳圈，不管是一个圈还是几个圈，都用投影图表示。在数学上通常的术语中，一个圈的叫纽结，几个圈的叫链环。圈

的个数叫做分支数。纽结可以看成是只有一个分支的链环。

下面一个难办的问题是怎样把“绳圈可以在空间中连续变形”这句话用投影图表示出来。

在 20 年代，德国数学家瑞德迈斯特 (Reidemeister) 提出了一个观念，他说在投影图上允许三种基本的变换。如图 3：第一种 (R_1) 是把一个卷打开或加一个卷，第二种 (R_2)

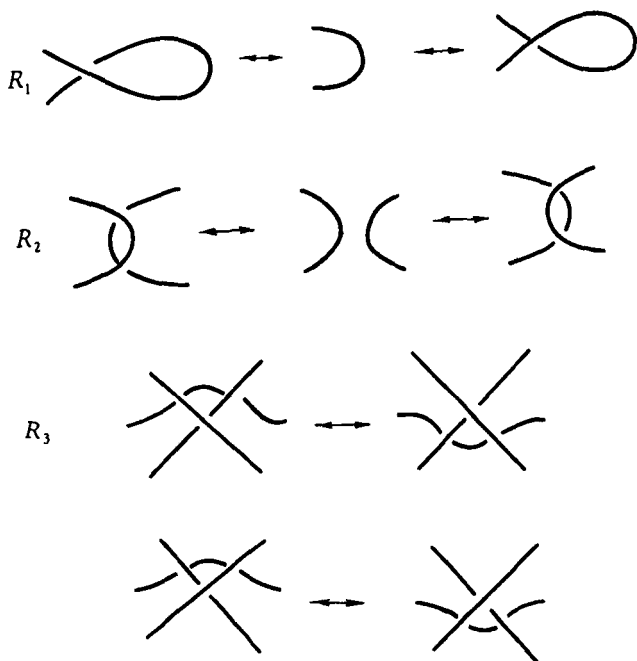


图 3

是把搭在一起的两根线拉开或把两根线搭上，第三种 (R_3) 是在三根线互相交叉的地方，前面的两根不动，把最后的一根

向上或向下挪一下。三种变换都在投影图的局部进行，明显的一点是它们都可以用绳子在空间的移动来实现。瑞德迈斯特证明了很重要的另一面：如果有两个图形可以用连续变形从一个变到另一个，那么一定可以把这个变形过程分解成一串小步骤，每个小步骤都是上述三种变换之一，这三种变换称为初等变换。

现在我们完全从投影图上来讨论绳圈是否一样，就是要讨论，给了两个投影图，能不能通过一串初等变换从一个变到另一个。如果可以，我们就说它们等价；如果不可以，就说不等价。

说两个投影图等价，最好的办法就像前面那样给出一个挪动的方法。可要说两个投影图不等价就不那么好办了。1899年物理学家们编出的有一百多个纽结的表中，其中有一对在75年后有人发现它们实际上是一样的，是可以从一个变到另一个。所以区别不同的结不是一件简单的事情，靠经验是不行的，要用逻辑推理来说明它们的不一样。

最简单的一个问题：系鞋带第一下打的是不是真的一个结。也就是说，它和标准的圆圈（我们称之为平凡结）是不是一样的。现在一样不一样的意思已经换成了能否用三种初等变换从一个变到另一个。

为了给出证明，数学家们提出了不变量这个思想。先举一个例子，链环的分支数。分支的个数是一个不变量，它在三种初等变换下是不变的。利用这个不变量，我们说分支数不同的链环必定是不一样的。这不过是常识。

下面再谈谈三色性问题。一个投影图上的交叉点把这个图断成好多条线，现在给定三种颜色，例如红、黄、蓝三色，把投影图上的每条线涂一种颜色。我们规定两条规则，第一条

规则是：在每个交叉点处的三条线(上面的一条和底下断开的两条)要么只用一种颜色，要么三种颜色都用上。第二条规则

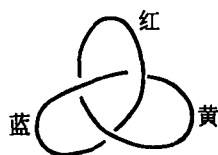


图 4

是：不许所有的线都涂成同一种颜色。在这样的规则下，有些结是可以这样上色的，有些却不可以。系鞋带形成的三叶结是可以上色，如图 4：只需把投影图上的三条线分别涂上三种不同的颜色，可是平凡结是不能按规则上色的，因为只有一根线，涂一种色总是要违反第二条规则。

现在看一下三种初等变换对上色的影响。对于第一种初等变换，打卷处实际上是两条线，根据规则一，只能上成同一种颜色，打开后也是一种颜色，也就是说，能不能上色在第一种初等变换前后是不变的。对于第二种初等变换照样可以分

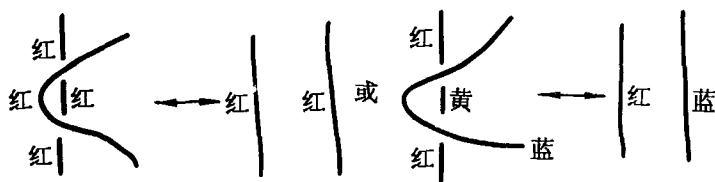


图 5

析，如图 5：如果重叠的时候可以上色，拉开后也可以上色，反过来同样。第三种初等变换的情况也类似。经过上述分析可以发现，能不能用三种颜色上色是在初等变换下不变的性质。所以，如果一个图形是可以三种颜色上色，那么经一串初等变换得到的另一个图形也是可以上色的。能不能用三种颜色，按上述两条规则上色，我们称为三色性。它是在初等变换下不

变的性质,是一个不变量。前面说三叶结有三色性,平凡结没有,所以三叶结和平凡结不一样,是真正的结。大家想一下,这是不是一个证明?

同样地,扣在一起的两个圈是否能变形成两个分开的圈也可以通过三色性来鉴别(见前图 2)。两个分开的圈是可以上色,只要两个圈分别涂上不同的颜色就可以了。而扣在一起的两个圈却不行,因为图上有两条线,要么涂一种颜色,要么分别涂上两种不同的颜色,可是用一种颜色违反规则二。用两种颜色违反规则一。这样我们就说明了这两个链环的确是不一样。从这里也看到了日常生活的常识,用数学来证明是怎样做的。

下面再介绍几个数学概念。在此之前考虑的绳圈都是没有方向的,如果我们给每个绳圈指定了方向,在投影图上用箭

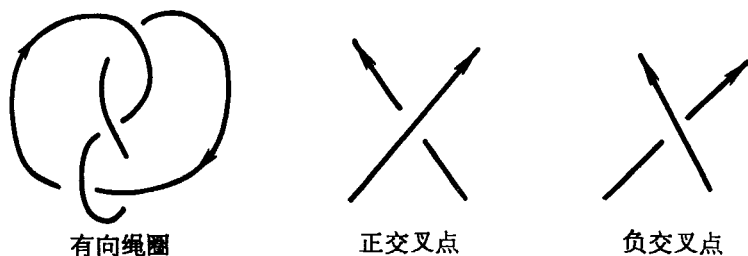


图 6

头标出,如图 6:这样的绳圈叫有向绳圈。对于有向绳圈的投影图,每个交叉点我们可以给出正负号。前面一个箭头以最小角度转成后面的箭头,如果是反时针方向转的,我们就称这个交叉点为正交叉点;如果是顺时针方向转的,我们称为负交叉点。

给了一个有向链环的投影图,我们可以定义投影图的拧数,它是把所有交叉点的正负号(正代表+1,负代表-1)加起来得到的一个数。可以证明拧数在第二、三种初等变换下是不变的,但是拧数在第一种初等变换下是变的。如图 7 中左端的有向纽结的拧数是+3,做一次第一种初等变换,加了一个卷,拧数就变成了+4。所以,很遗憾拧数不是不变量,我们不能根据两个绳圈的拧数不同来说它们不同。

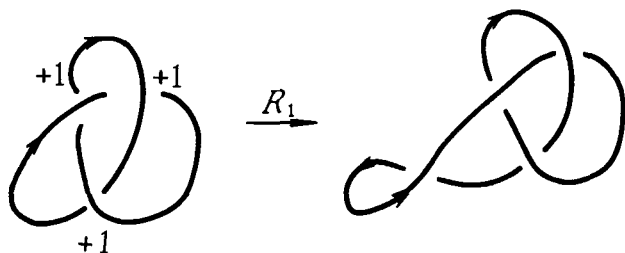


图 7

现在我们考虑两个分支的链环。如图 8 有两个圈 K_1 和 K_2 ,把 K_1 和 K_2 两个圈之间的交叉点的正负号加起来得到的数除以 2,最后得到的数叫做环绕数。因为 K_1 和 K_2 的交叉点一定有偶数个,正负号加起来一定是个偶数,所以环绕数一定

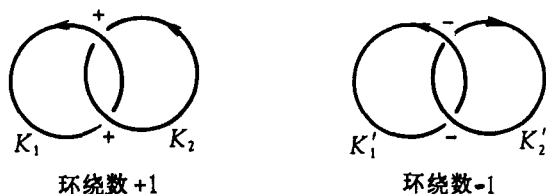


图 8

是个整数。我们现在统计的是不同分支的交叉点，第一种初等变换出现的交叉点是不会被数进去的。因此，对于两个分支的链环，环绕数是一个不变量。

数学家们区别不同的纽结或链环的办法是不变量。一个不变量好不好，主要看它的鉴别力有多大，就是说能鉴别多少种不同的纽结或链环。三色性的鉴别力就很弱，所有的投影图只分成行与不行两类，“行”与“不行”的绳圈一定是不一样的，可是“行”与“行”的绳圈也可能不一样，三色性是无法鉴别的。环绕数可以考虑两个分支的有向链环，它的取值范围多些，鉴别力也就强了一些。那么有没有一个不变量能把所有的纽结和链环，首先至少把 1899 年的纽结表中的纽结区分开来？所以，数学家们要找威力强大的不变量。当然它还要容易计算。

在 1928 年，美国数学家阿历山大(Alexander)提出了一种不变量，后人称之为阿历山大多项式，这是纽结和链环理论的一个很大的进步。这种多项式可以把 1899 年纽结表中的大部分纽结区别开来。

一件很有戏剧性的事情发生在 1984 年，新西兰数学家琼斯(Jones)是研究泛函分析的，一次做学术报告讲解他研究的东西，在黑板上写了一些式子。听众中有位拓扑学家，她看到黑板上的式子同阿历山大多项式的公式非常相似，仅有一点点差别，于是就问两者是不是有点关系。琼斯听后与那位拓扑学家长谈很久，自己想了两周终于找出了两者的关系，提出了新的纽结不变量。这是一个很强的不变量，后来被称为“琼斯多项式”。

琼斯多项式的发现在数学界引起了一个轰动，这是因为泛函分析与拓扑学被认为是风马牛不相及的，居然在这个地方发生了联系。于是有很多的泛函分析学家和拓扑学家都来

研究纽结,特别是理论物理学家也参加进来研究这个问题。从1984年到1990年这6年间发现了很多新的纽结不变量,而理论物理学的方法同代数又连上了。纽结理论一下子变成了热门话题。在1990年的数学家大会上,4位数学家获得了菲尔兹奖,其中之一就是琼斯,因为他的发现引来了许许多多的数学工作。

在琼斯多项式发现后不久,人们想出了一个办法,不用高深的数学知识,完全可以用初等的方法建立琼斯多项式。中学生就可以看懂。下面我就用这种方法讲一讲,为什么会有这样一种多项式。

现在我们把投影图上的箭头忘掉,考虑无向投影图。我们知道,投影图的复杂程度的一个表现就是交叉点的个数,交

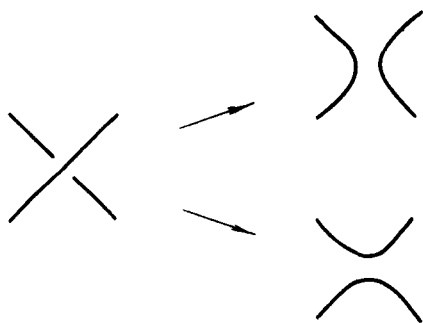


图 9

叉点数越多越复杂。但交叉点个数不是不变量,我们很容易看出第一、二种初等变换都要改变交叉点的个数。我们画投影图总希望交叉点数尽可能少,简化一个投影图就是想办法把交叉点的个数减少。那么,给一个交叉点,怎样把它抹掉呢?

一个办法就是剪断上下两条线,再重新接上如图9,但是要记住这是非法操作。

我们大胆设想对每一个投影图做一个多项式,叫尖括号多项式。其自变量暂时不管,是很自由的设想。我们还想把投

影图的多项式与抹掉交叉点后简单一些的图的多项式联系起来。

一个投影图 L , 它的尖括号多项式记为 $\langle L \rangle$ 。看 L 一个交叉点的局部, 抹掉这个交叉点有两种方式分别得到两个投影

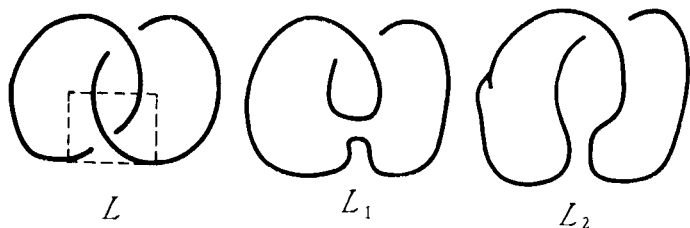


图 10

图, L_1 和 L_2 , 如图 10。我们希望 $\langle L \rangle$ 是两个比较简单的多项式分别乘以 A 和 B 后的和, 即 $\langle L \rangle = A\langle L_1 \rangle + B\langle L_2 \rangle$ 。这是我们的第一条假设。那么究竟哪一个乘 A , 哪一个乘 B 呢? 如

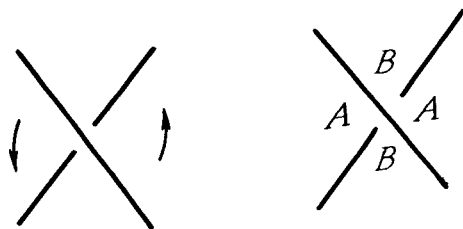


图 11

图 11: 一个交叉点、相交的两条线把附近分成四个部分, 上边的线反时针转动, 转到下边的线, 转动过程中扫过的两部分叫做 A , 另两部分叫做 B 。我们规定: “打通 A 通道”, 即抹掉交叉点后使两块 A 连起来形成的投影图, 它的多项式要乘以