

第一编

科学和科学家

第一章 事实的选择

托尔斯泰 Tolstoi 在某处说明“为科学而科学”在他看来为什么是荒谬绝伦的概念。由于事实的数目实际上是无限的，我们不能了解所有事实。选择是必要的。于是，我们可以让这种选择取决于我们好奇心的纯粹任性；让我们自己受功利的指导，即受我们实际的需要、尤其是道德的需要的指导岂不更好；与数我们行星上的瓢虫数目相比，我们难道没有更好的事去做？

很清楚，对托尔斯泰来说，功利一词并不具有事务人给予它的意义，而我们当代人中的大多数却信奉他们。对于工业应用，对于电或汽车的奇迹，他不仅不关心，而且甚至视其为道德进步的障碍；在他看来，功利只不过是能够使人变得更完善的东西而已。

依我之见，无论对这一理想还是那一理想，不用说都不会使我满意；我既不需要贪婪而自私的富豪统治，也不需要伪善而平庸的民主，这种民主只不过是忙于改头换面而已。假如在那里居住着智者，这些智者毫无好奇心，避免一切过度行为，那么他们不会死于疾病，而确实将死于无聊。但是，这是各人的好恶，不是我希望讨论的问题。

问题依然没有解决，还会引起我们的注意。如果我们的选择仅仅取决于任性或直接的功利，那么就不会有“为科学而科学”其结果甚至无科学可言。但是那是真的吗？无可否认，有必要作选择；不管我们的能动性如何，事实跑得比我们快，我们

不能够捉住它们；当科学家发现一种事实时，在他身体一立方毫米内已经发生了数以亿亿计的事实。希望把自然包容于科学之内，不啻企图把整体放入局部之中。

但是，科学家相信，事实有等级可寻，在它们之中可做出明智的选择。他们是对的，因为要不然便不会有科学，而科学却存在着。人们只要睁眼看看，工业成就虽然为许多实际家促进，但是假若只有这些实际家，而没有下述一些人在前面作出的无私贡献，那么工业成就将会暗淡无光：这些人贫困潦倒，从未想到功利，而且具有与任性决然不同的指导原则。

正如马赫 (Mach) 所说，这些贡献使他们的后继者省却了思考的烦扰。仅仅着眼于直接应用的那些人，他们不会给后世留下任何东西，当面临新的需要时，一切都必须重新开始。现在，大多数人都都不爱思考，当本能指导他们时这也许是侥幸的，最通常的情况是，当他们追求即时的、永远相同的目的时，本能指导他们比理性指导纯粹的智力更为得宜。但是，本能是惯例，如果思想不使之丰富，人类便不会比蜂蚁有更多的进步。于是，对于那些不爱思考的人来说，有必要去思考，并且因为这些人数量众多，所以必须使我们每一种思想尽可能经常有用，这就是为什么定律愈普遍，它也将愈珍贵。

这向我们表明，我们应当如何选择：最有趣的事实就是可以多次运用的事实；这些是具有一再复现的机会的事实。我们幸好出生在存在这样的事实的世界中。假定不是六十种元素，而是六百亿种，它们没有多少共同之处，另一些是稀有的，但却均匀地分布着。那么，每当我们捡起一块新卵石时，它都十分可能由某种未知的物质构成；我们所知道的其他卵石的情况对它毫无用处。在每一个新对象面前，我们会像新生儿一样照此办理，我们只能服从我们的任性或我们的需要。如果只有个体而无种族，如果遗传不能使子孙与他们的祖先相似，那么生物学家同样

会茫然无措。

在这样一个世界中便不会有科学；也许连思想、甚至连生活也不可能，因为进化在这里不能发展保存的本能。幸亏情况并非如此；像我们习惯于所有的好运一样，这是不能鉴别出它的真正的价值的。

于是，哪些事实是很可能复现的事实呢？它们首先是简单的事实。很清楚，在复杂的事实中，一千个条件通过机遇结合在一起，更何况只有一个可能的机遇能把它们重新结合起来。但是，有简单的事实吗？如果有，如何认识它们呢？我们有什么把握确信，我们设想是简单事物没有隐藏惊人的复杂性呢？我们所能说的一切就是，我们应该偏爱似乎是简单的事实，而不选择那些我们肉眼辨认出不相似要素的事实。于是，只能是二者择一：或者这种简单性是真实的，或者要素密切地混合起来，以至于无法区分。在第一种情况下，存在我们重新遇到这个同一简单事实的机遇，无论它在整体上是纯粹的，还是它本身作为要素进入复杂的复合体中。在第二种情况下，这种密切的混合同样比异质的集合复现的机遇更多；机遇知道如何混合，而不知道如何分解，不知道如何用许多要素建造秩序井然的大厦，在这个大厦内，某些事物可以区分，但必须特意做成。因此，看来仿佛是简单的事实——即使它们并非如此——将更容易被机遇恢复。正是这一点可以为科学家本能地采取的方法辩护，进一步为它辩护的也许是，经常复现的事实对我们来说似乎是简单的，恰恰因为我们经常用到它们。

但是，简单的事实在哪里呢？科学家在两种极端情形下寻求它，其一是无穷大，其二是无穷小。天文学家找到了它，因为星球之间的距离极其遥远，远到它们中的每一个都看来好像是一个点，远到质的差别可以忽略不计，由于一个点比一个具有形状和质地的物体简单。另一方面，物理学家找到了基元现象，他

们想像把物体分割为无限小的立方体，因为问题的条件在从物体的一点到另一点时经受了缓慢而连续的变化，在这些小立方体的每一个间隔内，条件可以认为是恒定的。用同样的方式，生物学家本能地被诱使认为细胞比整个动物更为有趣，结果证明他是明智的，由于对于能够认出细胞相似性的人来说，属于各种各样的有机体的细胞比有机体本身更相像。而社会学家却大为困惑 对他来说 要素是人 这太不相似了 太变幻莫测了 太反复无常了，一言以蔽之 太复杂了 此外 历史从来也不会重演。那么，如何选择有趣的、可以重演的事实呢？方法恰恰在于事实的选择 于是 首先需要着手创造方法 并且已想像出许多 由于没有一个方法会硬充方法，于是社会学是方法最多而结果最少的科学。

因此，以规则的事实开始是合适的；但是，当规则牢固建立之后，当它变得毫无疑问之后，与它完全一致的事实不久以后就没有意义了，由于它们不能再告诉我们任何新东西。于是，正是例外变得重要起来。我们不去寻求相似；我们尤其要全力找出差别，在差别中我们首先应选择最受强调的东西，这不仅因为它们最为引人注目，而且因为它们最富有启发性。一个简单的例子将使我的思想更加清楚：设一个人想通过观察曲线的若干点来确定曲线。只使自己关心眼前功利的实际家将仅仅观察那些他为某些特殊目标而需要的点。这些点不适当地分布在曲线上；它们在某些区域上密集，在另一些区域上稀疏，以致不可能用一条连续的线将它们连结起来，而且对于其他应用而言，它们是无用的。科学家将以不同的方式着手进行；当他希望为曲线本身而研究曲线时，他将使所观察的点规则地分布；当足够的点已知时，他将用一条规则的线连结它们，他就会得到完整的曲线。可是，为此他如何进行呢？如果他决定了曲线的端点，他没有停在这一端附近，而首先返回另一端；在这两个端点确定后，

最有指导意义的点将处于中点，依此类推下去。

法则一经确立，我们首先就要寻找这个法则具有最大失效机遇的情况。在其他理由当中，对天文事实的兴趣和对地质经历的兴趣由此而来；当达到十分遥远的空间或十分久长的时间时，我们可能发现，我们有用的法则完全被推翻了，这些重大的失效有助于我们更好地观察、更好地理解可能发生在距我们较近之处，即发生在我们被召集生活和行动的世界的小角落中的微小变化。由于我们到与我们毫无关系的遥远的国家去旅行，我们将更清楚地了解这个角落。

但是，我们应该达到的目的主要不在于弄清相似和差异，而是要认出隐藏在表观偏离下的类似性。特殊的法则乍看起来似乎是不一致的，然而通过较为仔细的观察，我们看到它们大体上相互类似 就实质而言 它们是不同的 但是就形式而言 就它们各部分的秩序而言，它们是相似的。当我们以这种倾向性观察它们时，我们将看到它们扩大并且有助于包容每一事物。这便造成了某些归结为完备的集合物的事实的价值，并且表明它是其他已知集合物的正确图像。

我将不再进一步坚持，但是这几句话已足以表明，科学家并非随意选择他所观察的事实。诚如托尔斯泰所言，科学家并没有去数瓢虫的数目，因为瓢虫无论可能多么有趣，其数目也是任意可变的问题。科学家力图把许多经验和许多思想浓缩在一个小容积内；这就是为什么一本物理学的小册子包含着如此之多的以往的经验，以及他预先已知其结果的多达千倍的可能的经验。

然而，我们迄今还只是看到问题的一个方面。科学家研究自然 并非因为它有用处 他研究它 是因为他喜欢它 他之所以喜欢它，是因为它是美的。如果自然不美，它就不值得了解；如果自然不值得了解，生命也就不值得活着。当然，我在这里所说

的美，不是打动感官的美，也不是质地美和外观美；并非我小看这样的美，完全不是，而是它与科学无关；我意指那种比较深奥的美，这种美来自各部分的和谐秩序，并且纯粹的理智能够把握它。正是这种美给予物体，也可以说给予结构以让我们感官满意的彩虹般的外观，而没有这种支持，这些倏忽即逝的梦幻之美只能是不完美的，因为它是模糊的、总是短暂的。相反地，理智美可以充分达到其自身，科学家之所以投身于长期而艰巨的劳动，也许为理智美甚于为人类未来的福利。

因此，正是对这种特殊美，即对宇宙和谐的意义追求，才使我们选择那些最适合于为这种和谐起一份作用的事实，正如艺术家从他的模特儿的特征中选择那些能使图画完美并赋予它以个性和生气的事实。我们无需担心，这种本能的和未公开承认的偏见将使科学家偏离对真理的追求。人们可以梦想一个和谐的世界，但是真实的世界把它丢弃得何其之远！永远活在人们心目中的最伟大的艺术家希腊人创造了他们的天空；它与我们的真实的天空相比，是多么蹩脚啊！

正因为简单是美的，正因为宏伟是美的，所以我们宁可寻求简单的事实、崇高的事实；我们时而乐于追寻星球的雄伟路线；我们时而乐于用显微镜观察极其微小的东西，这也是一种宏伟；我们乐于在地质时代寻找过去的遗迹，它之所以吸引人，是因它年代久远。

我们还看到，像对于有用的渴望一样，对于美的渴望也导致我们作相同的选择。因此，按照马赫的看法，这种思维之经济、劳力之经济是科学的永恒趋势，同时也是美的源泉和实际利益的源泉。我们所赞美的大厦是建筑师知道如何使手段与目的相称的大厦，在这样的大厦中，支柱似乎轻松地承载着加于其上的

重量而毫无吃力之感，像厄瑞克忒翁庙^①的雅致的女像柱一样。

这种协调从何而来呢？在我们看来好像美的事物是其本身最适合于我们理智的事物，因此它们同时是这种理智最了解如何使用的工具，事情只不过是如此吗？或者，在这里存在着进化和自然选择的游戏吗？最能使他们的理想与他们的最高利益一致的民族消灭了其他民族并取而代之了吗？所有人都追求他们的理想，没有考虑后果，而这种探求却导致一些人毁灭，另一些人称帝。人们被诱使相信它。假如希腊人征服了野蛮人，假如希腊思想的继承者欧洲人统治了世界，那是因为未开化的人爱好刺眼的颜色和聒耳的鼓声，这只能充塞他们的感官，而希腊人则爱好潜藏在感性美之下的理智美，正是这种理智美使理智变得可靠、有力。

毫无疑问，这样的凯旋会使托尔斯泰惊恐，他不乐意承认它确实是有用的。但是，这种无私利的为真理本身的美而追求真理也是合情合理的，并且能使人变得更完善。我清楚地知道，这里存在着错误，思想者并非总是由此引出他能够在其中发现的宁静，甚至在这里也有品质恶劣的科学家。因此，我们难道必须抛弃科学而仅仅研究道德吗？什么！当道德家从他们的受人尊敬的地位跌落下去的时候，你认为他们本身是无可指责的吗？

^① 厄瑞克忒翁庙 (Erechtheum) 是公元前 421—前 405 年建于希腊雅典卫城上的爱奥尼亚式雅典娜神殿，由于其形体复杂和细部精致完美而著名。神庙的爱奥尼亚式柱头在希腊建筑中是最精美的，而与众不同的女像柱廊在古典建筑中是罕见的。——中译者注。

第二章 数学的未来

为了预见数学的未来，正确的方法是研究它的历史和现状。

在某种意义上，这不正是我们数学家的专业程序吗？我们习惯于外插法，这是一种从过去和现在推导未来的方法，因为我们充分地了解这相当于什么，所以关于它给予我们的结果的有效范围，我们不会冒使我们自己受骗的危险。

迄今我们已经有了不幸的预言家。他们轻率地重申，所有能够解答的问题都已经被解决了，除了拾遗之外，没有留下什么事情。幸好，过去的情况使我们消除了疑虑。人们往往以为，所有问题都被解决了，或者至少已列出了一切容许的解的清单。可是，解这个词的意义扩大了，不可解的问题变得最使大家感兴趣，未曾料到的其他问题呈现出来。对于希腊人来说，好解就是只使用直尺和圆规的解；后来，它变成用求根法得到的解，接着它又变成只利用代数函数和对数函数的解。这样一来，悲观主义者发现他们自己总是被挫败，总是被迫退却，因此我现在认为不再有悲观主义者了。

所以，我的意图并不是反对他们，因为他们已经消亡了；我充分了解，数学将继续发展，但是问题在于它如何发展、在什么方向发展。你将回答：“在各个方向发展。”这部分为真。如果它完全为真，那可有点骇人听闻了。我们的丰富资料不久便会成为拖累，资料的积累也会造成一堆费解的大杂烩，犹如无知的人面对未知的真理那样莫名其妙。

历史学家、物理学家甚至都必须在事实中作出选择；科学家的头脑只能顾及宇宙之一隅，永远也不能囊括整个宇宙；以致在自然界提供的不可胜数的事实中，一些将被忽略，另一些则被保留下来。

不用说，在数学中正是这样；几何学家已不再能迅速地把握所有呈现在他面前的杂乱的事实；更有甚者，因为正是他——我几乎要说他的任性——创造这些事实。他把它的要素收集在一起构造全新的组合；一般说来，自然并没有把预先准备好的组合给予他。

毫无疑问，有时会发生这种情况：数学家着手解决问题是为了满足物理学的需要；物理学家或工程师请求他计算某些应用方面的数值。难道能够说，我们几何学家应当仅限于听候命令，而不为我们自己的欢娱来培育科学，只是力图使我们自己迁就我们恩主的需求吗？假如数学除了帮助那些研究自然的人之外没有其他目标，那我们就只好听候命令了。这种看问题的方式合理吗？这绝不合理；如果我们不为科学而培育精密科学，那我们就既不可能创造出数学工具，待到物理学家提出请求的那一天，我们就会无能为力。

物理学家研究一种现象，也不是要等到物质生活的某种急迫需要使它成为他们必不可少的东西；他们是对的。假使十八世纪的科学家因为电在他们的眼中只是好奇的玩意儿而没有实际利益，因此忽略电的研究，那么在二十世纪，我们就既不可能有电报，也不可能由电化学或电技术。所以，不得不进行选择物理学家并没有仅仅以功利来指导他们的选择。可是，他们怎样在自然事实之间选择呢？我们在上一章已作了说明：使他们感兴趣的事实是能够导致发现规律的事实，这些事实因而类似于许多其他在我们看来似乎不是孤立的、而是与另外的东西紧密聚集在一起的事实。孤立的事实吸引着大家的眼睛，吸引着

外行人的眼睛和科学家的眼睛。但是，唯有名副其实的物理学家才知道如何观察，把其类似是深刻的但却是隐蔽的许多事实结合起来的结合物是什么。牛顿（Newton）的苹果故事恐怕不是真实的，而是象征性的；不过，让我们把它当做真实的谈一谈吧。好啦，我们必须认为，在牛顿之前，好多人都看见过苹果落地；没有一个人知道从中如何得出任何结论。假如没有能够在事实中选择、分辨在哪些事实背后隐藏某种东西以及识别什么正在隐藏着的精神，假如没有在未加工的事实下察觉事实精髓的精神，事实也许是毫无成果的。

我们在数学中正好发现同样的东西。从我们正在处理的各种各样的要素中，我们能够得到无数个不同的组合；但是，这些组合中的一个倘若是孤立的，则其毫无价值可言。我们常常含辛茹苦地构造它，但是它却没有效用，也许至多不过是为初等教育提供练习而已。当这个组合在一组类似的组合中找到了位置时，当我们注意到这种类似时，它就完全是另外一个样子了。我们就不再是面对一个事实，而是面对一个定律。在那一天，真正的发现者将不是耐心地建造某些组合的工匠；真正的发现者将是揭示它们的亲缘关系的人。前者看到的只是未加工的事实，只有后者才能察觉到事实的精髓。往往为了确定这种亲缘关系，足以使他构思出新名词，这个名词是有创造力的。科学史向我们提供了大量的大家熟知的例子。

著名的维也纳哲学家马赫曾经说过，科学的作用在于产生思维经济，正像机器产生劳力经济一样。这是十分正确的。原始人用他的手指或借助卵石来计算。在给儿童教乘法表时，我们使他们以后节省了用无数堆卵石进行计算的辛劳。某人已经发现，用卵石或其他东西计算，6 乘 7 等于 42，他特意把这个结果记录下来，因此我们不需要重复它了。他没有白费他的时间，即使他是为消遣而计算的：他的运算只花了两分钟；如果十亿个

人在他之后重复作这个运算，那总共就要花费二十亿分钟时间。

于是，事实的重要性用它产生的效益来衡量，也就是说，用它容许我们节省的思维数量来衡量。

在物理学中，具有最大效益的事实是进入十分普遍的定律中的事实，由于这些事实能够使我们根据定律预见大量的其他事实，在数学中情况正是如此。设想我从事一项复杂的运算，费力地达到了一个结果：如果我由此还不能预见其他类似运算的结果，还不能可靠地指导运算以避免人们在首次尝试中必须屈从的摸索，那么我就没有补偿我的辛劳。另一方面，如果这些摸索本身最终向我揭示出刚刚处理的问题深刻类似于更为广泛一类的其他问题，如果它们一举向我表明这些问题的相似和差异，一句话，如果它们使我察觉到概括的可能性，那么我就没有白费我的时间。因此，这不是我已经赢得的一个新结果，而是一种新的能力。

首先想到的简单例子是代数公式的例子，当我们最后用数字代替字母时，这些公式便把一种类型的数值问题的答案给予我们。多亏它，一次代数运算就使我们省去不断重新开始新的数值计算的辛苦。但是，这只是一个粗糙的例子；我们大家都知道，还有不能用公式表示的、更为珍贵的类似性。

既然在把早就已知的而迄今依然分离的、似乎相互陌生的要素统一起来时，新结果突然在表面上由无序统治的地方引入秩序，那么它就是有价值的。于是，它容许我们一眼看到这些要素中的每一个以及它在集合中的位置。这个新事实不仅仅因其自身而珍贵，而且唯有它才能使它所结合的一切旧事实具有价值。我们的心智像我们的感官一样，也是软弱的；如果世界的复杂性不是和谐的，它就会在这种复杂性中迷失；它像一个眼睛近视的人一样，只能看到细微末节，在审查下一个枝节前，它又会被迫忘掉先前的每一个细节，由于它不能囊括整体。唯一值得

我们注意的事实是那些把秩序引入到这种复杂性中去的事实，从而是使它可以理解的事实。

数学家把重大的意义与他们的方法和他们的结果的雅致联系起来。这不是纯粹的浅薄涉猎。在解中、在证明中给我们以雅致感的实际上是什么呢？它是各部分的和谐，是它们的对称、它们的巧妙平衡；一句话，它是所有引入秩序的东西，是所有给出统一、容许我们清楚地观察和一举理解整体和细节的东西。可是，这正好就是产生重大结果的东西；事实上，我们越是清楚地、越是一目了然地观察这个集合，我们就越是彻底地察觉到它与其他邻近对象的类似性，从而我们就有更多的机会推测可能的概括。在意外地遇见我们通常没有汇集到一起的对象时，雅致可以产生未曾料到的感觉；在这里，它再次是富有成果的，因为它这样便向我们揭示出以前没有辨认出的亲缘关系。甚至当它仅仅起因于方法的简单性和提出的问题的复杂性之间的强烈对照时，它也是富有成效的；于是，它促使我们想起这种悬殊差别的理由，而且每每促使我们看到，偶然性并不是理由；它必定能在某个意想不到的定律中找到。简言之，数学雅致感仅仅是由于解适应于我们心智的需要而引起的满足，这个解之所以能够成为我们的工具，正是因为这种适应。因此，这种审美的满足与思维经济密切相关。我又一次想到厄瑞克忒翁庙的雅致的女像柱的比喻，但是我没有必要过于经常地利用它。

正是由于同样的理由，当相当冗长的运算导致出某一简单的引人注目的结果时，只要我们还未证明，我们即使不能预见完整的结果，至少应该能够预见它的大多数特性，那我们就会心满意足。为什么呢？这个运算似乎把我们想要知道的一切都告诉给我们，究竟是什么东西妨碍我们以此为满足呢？这是因为，在类似的情况中，冗长的运算不可能再起作用了，而关于能使我们预见的推理——它常常有一半是直觉的——却不是这样。由

于这种推理简短，我们一瞥即见它的所有部分，以致我们即时地觉察到，为了使它适应于能够出现的同一本性的问题，我们必须改变什么。于是，它能够使我们预见这些问题的解是否将是简单的，它至少能够向我们表明是否值得从事这一运算。

我们刚才所说的一切足以表明，企图用任何机械程序代替数学家的自由的首创精神，将是多么愚蠢啊。为了得到具有真正价值的结果，刻苦地进行运算，或者拥有整理事物的机械，都是不够的；值得花时间追求的不只是秩序，而是未曾料到的秩序。机械可以啮噬未加工的事实，而事实的精髓将总是逃脱它。

自十九世纪中期以来，数学家越来越想望得到绝对的严格性；他们是对的，这种倾向将越来越受到强调。在数学中，严格性不是一切，但是没有它便没有一切。不是严格的证明微不足道。我想没有人辩驳这个真理。但是，如果过分照字面来理解严格性，我们可能会被诱使得得出结论，例如在 1820 年之前还不存在数学；这显然是过分了；当时的几何学家自愿地理解了我们现在用冗长的论述说明的东西。这并不意味着他们根本没有看到严格性；而是他们太迅速地越过了它，要明确地领会它，就必须耐心把它讲一讲。

但是，总是需要这么多的次数来讲它；在所有其他人之前第一个强调精密性的人，把我们可以力图仿效的论据给予我们；可是，如果将来的证明都建立在这个模型的基础上，那么数学论文就会十分冗长；我担心长起来，不仅因为我不赞成书刊塞满图书馆，而且因为我担心这样冗长下去，我们的证明就可能失去和谐的外观，我刚才已说明了和谐的有用性。

思维经济是我们应该对准的目标，因此提供仿效的模型还是不够的。需要使我们之后的人能够省却这些模型，不去重复已经作出的论据，而用几句话概括它。而且，这一点有时已经达到了。例如，有一种到处都可找到的、而且处处相似的推理模

式。它们是完全精密的，但却颇为冗长。于是，“收敛的一致性”这个用语突然被想到，这个用语使这些论据变得不需要了；我们不再必须重复它们了，由于它们可以被理解。这样一来，那些克服困难的人就给我们双重的帮助：他们首先告诉我们在紧急时像他们那样去做，但是尤其是，他们能够使我们在不牺牲精密性的条件下，尽可能经常地避免像他们那样去做。

我们刚才通过一个例子已经看到名词在数学中的重要性，不过还可以引用许多其他例子。人们很难相信，正如马赫所说，一个精选的名词就能使思维有多么经济。也许我在某处已经说过，数学是把同一名称给予不同事物的艺术。可以说，把这些在内容上不同而在形式上有可能相似的事物纳入同一模式中是恰当的。当选好语言时，我们不胜惊讶地发现，对某一对象所作的论证可直接用于许多新对象；这里什么也没有改变，甚至连名词也没有改，由于名称已变成相同的了。

一个精选的名词通常足以消除用旧方式陈述的法则所遭受的例外；这就是为什么我们创造了负数、虚数、无穷远点等等。我们一定不要忘记，例外是有害的，因为它掩盖着定律。

好了，这是我们用以辨认产生巨大结果的事实特征之一。多产的事实是容许这些巧妙的语言革新的事实。再者，未加工的事实往往没有多大兴趣；我们可以多次指出它，但对科学并没有提供多大帮助。只有当比较有见地的思想家觉察到它所代表的关系，并用名词把它符号化时，它才会获得价值。

此外，物理学家的做法正好相同。他们发明了“能”这个词，这个词格外富有成效，因为它通过消除例外而创造了定律，由于它把同一名称给予内容不同而形式相似的事物。

在具有最幸运的影响的名词中，我可以挑选出“群”和“不变量”。它们使我们看到许多数学推理的实质；它们向我们表明，在多少情况下，以往的数学家是在不明其义的情况下考虑群的，

他们是怎样突然地发现它们不知何故这么接近，他们原以为它们彼此相距甚远呢。

今天，我们可以说，他们处理的是同构群。我们现在知道，在一个群中，内容几乎没有什么兴趣，唯有形式才有考虑的价值；当我们了解一个群时，我们从而也就了解所有的同构群；由于“群”和“同构”这些名词把这个微妙的法则浓缩在几个符号内，并使所有的心智迅速地通晓它，因此转变是即时的，能够以充分的思维经济努力完成。此外，群的观念归属于变换的观念。我们为什么要把这样的价值放在新变换的发明上呢？因为从一个定理，能使我们得到十个或二十个定理；这与在紧靠整数的右边加一个零具有同样的价值。

于是，这就是迄今决定数学进展方向的东西，将来肯定还将同样地决定它。可是，所提出的问题的性质同样有助于这个目标。我们不能忘记，我们的目的应当是什么。按照我的观点，这个目的是双重的。我们的科学与哲学和物理学二者相毗邻，我们为两个邻居而工作；因此，我们总是看到，而且还将继续看到，数学家在两个相反的方向上前进。

另一方面，数学科学必须反思自身；由于反思自身就是反省创造它的人类心智，因而它是有用的；因为它真正是人类心智从外界所借取的东西最少的创造物之一，所以它就更加有用了。这就是为什么某些数学推测是有用的，例如专门研究公设、非寻常几何、特殊函数的推测。这些推测距通常的概念以及距自然界和应用愈远，它们就愈加充分地向我们表明，当人类心智越来越多地摆脱外部世界的羁绊时，它能够创造出什么东西，因此它们就愈加充分地让我们在本质上了解人类心智。

但是，我们必须指挥我们的主力部队向其他方面前进，即向自然界方面前进。在这里，我们遇到了物理学家和工程师，他们对我们说：“请给我积分这个微分方程吧；我可能在一周后需要