第一章　理性的结晶

——现代数学科学

一、当代数学概观

自 19 世纪以来，现代数学得到了迅猛的发展，如今已经形成了一个高度抽象、错综复杂、相互关联和有机统一的“数学网络”。要想全面而系统地介绍现代数学的全貌，可以说已经是一件十分困难的事了。这里我们只是有选择性的介绍几个当代数学中较有代表性的学科。

(一)代数学

20 世纪的代数学主要是指在初等代数学的基础上产生和发展而来的抽象代数学。它通过数系概念的进一步推广、或可以实施代数运算的对象的范围的进一步扩大，逐渐发展而成的；它自 18、19 世纪之交萌芽并不断发展，而于 20世纪 20年代建立起来。它研究的对象是任意元素集合和定义在这些元素之间的、满足若干条件或公理的代数运算，亦即以各种代数结构或代数系统的性质的研究为中心问题。

主要的基础代数结构有：群、环、域、模、代数、格，以及泛代数、同调代数、范畴等。当前代数学研究的较大部分集中在这些专门的代数结构上。这些结构最初被看作简单的例子，后来才得到开发，但是这个领域中的方法和结果已发展到这样一种程度：其中每个结构的研究分开来看都已成为一门主要的理论。下

面我们就要列举其中的一些结构。“泛代数”有其特殊性，其合成律并不遵从诸如定义群或环结构那样具有限制性的公理。至于“经典”代数即本质上是代数方程组的研究，如今是交换代数的一部分。

1.“抽象”群。群是只具有一个运算的抽象代数结构。如全体整数的集合对于加法就构成一个群。群论这一理论始于若尔当所著《置换和代数方程专论》（1870），它已具有自己独特的方法和问题，并已成为一个庞大的分支。同样毋庸置疑的是它在数学所有领域中具有最多的应用，其程度有如人们所说：当你不很了解新的数学对象的性质，就应当试着在其上设置一个群结构。看起来这好像有点夸张，但事实上却已取得不止一次的成功。最接近于“抽象”群的数学领域是李群、代数几何、代数拓扑和微分拓扑以及数论，以这些结构为中介，群论使得数学中其他许多问题及其物理应用丰富多产。

2.交换代数。它是关于交换环的研究，始于约 1860 年，也已成为代数学的一个独立分支。所谓环就是一个具有两种运算的代数结构，而交换环就是乘法符合交换律的环。交换代数也有自己的问题和方法，最重要的是，现在它同代数几何有紧密的共同生长关系，它向代数几何提供了专门的工具即交换环的性质，但是近来它转过来得益于自然的属于代数几何问题的直观考虑，因为现在有可能把交换代数问题翻译为格罗腾迪克概形论中的几何术语，它们是代数曲线和代数曲面概念的终极推广。

3. 结合非交换代数和非结合代数。这是可以追溯到 19 世纪中期的某些理论。它们涉及结合的、非交换的环（其中乘法不满足交换律，但满足结合律）或非结合环（其中乘法不满足结合律，但满足关于加法的左、右分配律）。四元数、向量乘法、矩阵代数等是结合非交换代数的重要类型；李代数、若尔当代数、交错代数等是非结合代数最重要的类型。非结合代数的一个特点是，其

乘法往往满足某种恒等式。它们已进入抽象群论、李群论、代数拓扑和泛函分析中。

4. 同调代数。它涉及这样的函子的构造，这些函子使每类范畴的对象对应到另一些对象，最常见的是交换群。这种理论与代数拓扑相联系，大约诞生于 1943 年。它的应用领域不断扩展到几乎整个数学，成为一种不可缺少的有力工具。可惜由于它所用概念极端抽象，这里不可能对它进行更多的说明。

5. 范畴和函子。这是数学中最新领域之一，诞生于 1943 年，来自艾伦伯格和麦克莱恩关于代数拓扑的探索。数学的各个领域都有各自的研究对象。20 世纪中期，数学家认为有必要将各个领域中的研究对象各自合在一起成为一个总体，使之各个总体都是一种数学系统。这就是范畴思想。于是，所有的集合与映射组成集合的范畴 S ；所有的群与群同态组成群的范畴 G 所有的拓扑空间与连续映射组成拓扑空间的范畴 T 等等。范畴的定义是对提集合范畴 S、群范畴 G、拓扑空间范畴 T 的一些共同性质的归纳。此外，在范畴与范畴之间存在着内在的联系与变换。这种内在的联系与变换，提供了所谓函子的概念。这里实际上是做了一种“二阶抽象”，在这种抽象中，赋予结构和相互之间的映射的集合消失，更正确地说“升华”为与“总合”或“法则”这些日常概念毫无关系的“对象”和“箭矢”。这一理论先是在代数拓扑中十分有用，然后在代数几何中成为具有根本重要性的工具。它推进到数学中别的许多领域，最终成为自主发展的对象。

（二)几何与拓扑学

20 世纪几何学的主体是微分几何，它是用分析的方法来研究空间（微分流形）的几何性质的一门学科。从 17 世纪起，数学家们就把微分学应用于研究平面曲线的局部性质，诸如确定一点处的切线，确定拐点和多重点，定义曲率。这些结果在 18 世纪推广到空间曲线和曲面。然后黎曼于 1854 年大胆地使任何维数的“流

形”概念化，尽管它们已不再像曲线或曲面那样能由“具体形象”给出。黎曼的继承者发展了他的想法，并更加密切的着手研究整体问题。这一看来远离自然科学的理论，却在广义相对论和宇宙论（在这些理论中四维或更高维空间的观念起着基本作用）中具有完全意想不到的应用。

1. 微分几何学。1827 年高斯发表了他的现代微分几何的奠基之作《关于曲面的一般研究》。在这篇论文中，高斯不仅论述了三维空间中曲面的微分几何，更重要的贡献是他提出了一个全新观念：一张曲面本身就是一个空间。这是一个里程碑，它的含义之深刻，远远超出了高斯当时自己的认识。在此之前，曲面一直是被作为三维欧氏空间中的图形进行研究的。三维欧氏空间几乎是人们研究任何几何图形的绝对空间——参照系，各种曲线都处在这个绝对的空间或参照系中。1854 年 6 月 10 日,黎曼在哥廷根大学哲学系作了一次空前的题为“论作为几何基础的假设”的就职演说。在这次誉为哲学性的数学演说中，他发展了一般空间的理论。虽然三维空间是十分重要的情形，但黎曼还是一开始就直接处理 n 维空间,并且他把 n 维空间叫做一个流形。n 维流形中的一个点,可以用 n 个可变参数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一组特定值来表示，而所有这种可能的点的总体就构成 n 维流形本身。这 n 个可变参数就叫做流形的坐标。流形的特点是：它在每一个局部中都是欧几里德空间，但其整体则不然。所以，流形是局部的欧几里德空间，黎曼对空间的研究是局部化的。黎曼之后，克里斯托费尔、里奇等人作了进一步的发展，尤其是里奇创立了张量分析的方法，这在广义相对论中起了基本的作用。1915 年爱因斯坦创建了广义相对论，对黎曼几何的发展产生了巨大的作用，并导致了对黎曼几何的种种推广。这方面的工作主要是由外尔开创的，他引入了一种更为广泛的仿射联络空间几何。另外还有芬斯勒推广的芬斯勒几何学等。近半个多世纪以来，黎曼几何的研究还从局部发展到

整体。在整体微分几何发展中，纤维丛及其上的联络论的产生和发展，占有显著的地位。华裔美籍数学家陈省身为此做出了重要贡献。他所推广的高斯——邦尼——陈定理、纤维丛的微分几何和示性类理论把现代微分几何带入了一个新纪元。这些理论不仅在微分几何、代数几何、复变函数、复流形理论与大范围分析学等方面有着深刻的应用，而且在物理学中也有广泛的应用，纤维丛就是表达规范场的合适的数学语言。

2. 解析几何学。19 世纪末期，当数学家们希望把柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯得到的关于单复变量解析函数的深刻结果推广到多复变量解析函数时，他们遭遇到始料未及的困难。直到 20 世纪中期，部分由于使用来自代数拓扑的新概念（“层上同调”），这些困难才得以克服。从那时以来，多复变量解析函数论也出现了更加几何化的转变，更加接近代数几何，研究必须紧挨“代数簇”研究“解析簇”；例如，两个复变量的方程 $F(x, y)=0$（其中 F 不再是一个多项式而是一个解折函数）定义一条“解析曲线”。因此，如今把多复变量函数论称为解析几何学（不同于如今初等数学中的称谓)。

3. 代数几何学。它的基本研究对象是在任意维数（仿射或射影）空间中，由若干个代数方程的公共零点所构成的集合的几何性质。这样的集合通常叫做代数簇，而这些方程叫做这个代数簇的定义方程组。通过一定的对应关系，代数几何可以看成是用几何的语言和观点进行的有限生成扩域的研究。代数几何的起源是从关于平面曲线的研究开始的。对于一条平面曲线，人们首先注意到的一个数值不变量是它的次数，即定义这条曲线的方程的次数。19 世纪以来，复值坐标和“射影”概念的引进给予较少依赖于使用坐标的想法以新的生命。这些想法取得了引人注目的成就，使其理论在数学家中十分流行。同时黎曼通过他关于代数函数的深刻结果，使代数几何学回到同复变量解析函数论和拓扑学的联

系上。这些联结比过去产生了更多成果，从大约 1930年起，几乎全部把使用分析的证明代之以仅依赖于交换代数的另外的证明。它为这一理论带来巨大扩展，并使它接近数论，并为在这两种理论中同样有用的问题提供想法。

4. 拓扑学。这个数学领域开始于给出度量空间定义的 1906 年，它是研究几何图形在连续变形下保持不变性质的学科。最常用的拓扑结构（可度量化空间及其最简单的推广）的公理和一般性质如今已是大学基本的教学内容。 20 世纪拓扑学的主要内容是代数拓扑和微分拓扑以及函数空间的主要理论。它们在近一个世纪的发展中是爆炸性的，或许它是数学中出现崭新概念最多的领域，其中许多概念在乍看起来距离极远的理论中得到出人意料的反响。它构成一个不断更新的壮丽大厦，其复杂程度使得极少有专家能全部掌握。

(三)分析学与微分方程

1. 泛函分析。数学中许多领域处理的是作用在函数上的变换或算子，这在接近 19 世纪后期已经很明显了。例如，常微分运算和它的逆运算(反微分),就是作用在一个函数上以产生新的函数。在变分法的典型问题中，人们处理形如

$$J(y)=\int_a^b F(x, y \cdot y')\,\mathrm{d}x$$

的积分，这个积分也可以看做是做用在一类函数 $y(x)$上的运算。微分方程提供了另一类算子 L，微分算子 L 作用在一类函数 $y(x)$ 上，把它变换为另外的函数。积分方程中也存在着重要的算子。推动创立泛函分析的基本思想是，所有这些算子都可以在作用于一类函数上的算子的一种抽象形式下加以研究。这些函数可以看做是空间的元素或点。这样，算子就把点变成点；在这种意义下，算子就是普通变换的一种推广。上述算子中有一些是把函数变成实数，而不是变成函数。那些变到实数或复数的算子，如

今称为泛函，而算子则用来通称把函数变成函数的变换。这样前面的 $J(y)$就可以看做是“函数的函数”(对每一个函数 y有一个 $J(y)$ 值相对应),也就是所谓的“泛函”。泛函的抽象理论在 19 世纪末 20 世纪初首先由意大利数学家伏尔泰拉和法国数学家阿达马在变分法的研究中开创。函数 y在这里被视为“点”,所有定义在某个区间上的函数的全体构成一个空间（函数空间）。“泛函”这个名称就是由阿达马首先采用的，伏尔泰拉称之为线函数，即曲线的函数。当这样定义了“函数空间”后，下一步就是考虑函数空间 E 到一个空间 F 的某个映射(算子)。类似于实变量的实值函数，算子能以各种方式组织起来，因而能构成群和环；还有可能定义关于算子的积分，等等。随着量子力学的发展，这些理论变得十分重要，在量子力学中，物理量（位置、动量、能量等等）解释为希尔伯特空间上的算子。

2. 交换调和分析。这一数学理论起源于 18 世纪,它的主要目标是把周期函数 f（即对每个 $x\in R$ 满足 $f(x+2\pi)=f(x)$）的函数）“分解”为简单周期函数 $a_n\cos(nx+\theta_n)$之和。这种分解一般含有无穷多项，即它是一个级数。这方面的深入研究由傅里叶于 1807年开始，后来从未间断地吸引着分析学者，并在物理学中有无数应用。傅里叶通过创造所谓“傅里叶变换”扩展了他的研究范围。这种变换是算子的最早例子，它建立了定义于 R 上的实值函数（一般不是周期的）与另一个也是定义于 R 上的函数之间的对应。这种算子及其推广在偏微分方程、数学物理和概率论中是非常有用的工具。最近注意到，在这种理论同可度量化交换群理论之间有着紧密联系，而调和分析已占领了代数数论。

3. 微分方程。从 18 世纪以来，除极少数情形外，并不知道如何显式地写出微分方程的解。除了由弦或杆的振动问题引起的方程外，在很长时间中微分方程组的一般理论限于依据所给方程在一个点的邻域内的性态，对解进行局部研究。庞加莱于 1880 年开

始首先成功地得到涉及解（它常称为轨道，因为自变量 t 常被同化为“时间”）的整体的定理。如今这种理论界定为动力系统理论，当然它在力学和天文学中有众多应用。它在 19、20 世纪得到重大扩展，在其发展进程中越来越同代数拓扑和测度论紧密相联。

4. 偏微分方程。最早一批偏微分方程与微分几何学和物理学问题相联系，出现于 18 世纪。但由于缺乏合适的数学工具，19 世纪前不可能对其一般理论开始进行研究。开始时设想，当从一个自变量转向几个自变量时，用于研究常微分方程的方法易于推广到研究偏微分方程。但很快认识到，两种理论之间的相似性是非常表面的，由偏微分方程提出的问题需要完全新的探索方法，其研究有时导致惊人的结果，例如 1956 年发现存在没有解的偏微分方程，自 1950 年以来，从泛函分析和傅里叶变换理论发掘的新概念使偏微分方程理论有可能出现令人惊异的新转折，它现在正全速扩展，并且仍然与物理应用紧密相联。

二、理解数学

由于现代数学高度的抽象性，大众对现代数学的理解几乎是空白的。数学家哈尔莫斯就曾诉苦到：“甚至受过教育的人们都不知我的学科存在，这使我感到伤心。”确实，数学在现实社会中是一条“看不见的战线”。数学作为一门科学很少受到关注，与其他任何科学相比，大多数人更为忽视的是数学。高速公路、摩天大厦、汽车、飞机、电视、电脑等等这些现代科技文明的代表，往往只被人们看做是以物理学为代表的自然科学和工程技术的杰作。数学的作用在哪里？人们大都视而不见。数学是我们这个时代的看不见的文化，尽管它已融合在我们日常的工作和生活所处的技术环境之中，但数学的思想常常隐藏在大众的视野之外。然而，数学它的确是存在的，它是人类的理性本能所固有的，在人类文化和人类历史中，它的地位绝不亚于语言、艺术、宗教和哲

学。尤其是近三百年来，数学已对科学文化和经济社会产生了翻天覆地的影响。

数学是科学技术的理论基础和工具，是推动社会进步和思想解放的原动力；数学也能产生情感方面的体验，它能给人乐趣和美的享受，能使人激动也能令人厌恶。总之，它是人类文化中的一种。将其孤立于大众文化之外，无疑是一种损失。今天，我们应该把数学带回到人类文化中来，让大众尤其是学生意识到数学是为所有人服务的，数学是一种多边的人类文化活动。可以说，数学不仅是科学的语言、模式，而且数学是一种智力体操、一种思维艺术；只要你积极地参与和体验，它还会成为你打开机会大门的钥匙（关于数学是科学的语言、科学的模式，早有许多论述，这里不再重述）。

（一）数学：一种智力游戏

有位社会学家对游戏的特征作了如下的描述：1. 游戏是一种“自由活动”。“自由”在希腊语中意思是“无报酬的”，也就是说活动本身的目的是为了锻炼、娱乐，而不是从中获取利益。2. 游戏在人类的发展中起着重要的作用。幼儿就像小动物一样玩耍，并为将来的竞争和生活做准备。成年人也玩游戏，且通过游戏体验到解放、回避、放松和愉快等感觉。3. 游戏不是玩笑，做游戏必须相当认真，不认真对待游戏的人是在糟蹋游戏。4. 游戏在时间与空间上“和日常生活分开”，远离尘世。5. 游戏中包括“一定的紧张因素”，通过宣泄与解放而产生巨大的乐趣。6. 游戏可使参加者之间产生兄弟般的“特殊默契”与友好的协作。7. 通过游戏规则可以创造一种“新秩序”和充满和谐韵律的新生活。同时体现出行为规则的必要。

简要地分析一下数学活动，我们就可以发现它在许多方面具有游戏的这些特点。所以，从其深层性质来说，数学也是一种游戏，当然这是一种更为复杂的要涉及到科学、设备、哲学等多方

面的游戏，同时还是一种可以给社会带来收益的游戏，因而这使数学成为人类文化的基本支柱之一。

任何游戏一开始都是介绍一系列的规则、一些对象，它们在游戏中的作用就由那些规则所定。数学理论的对象也同样通过隐含的定义、公理来确定。无论谁在开始做游戏时，都必须对它的规则有一定的了解，将各对象相互联系，就像数学的初学者那样，用同样的方法比较并建立该理论中的基本元素之间的相互作用。这些就是游戏或数学理论的基本练习。

初步掌握了某种游戏的人，就能在游戏中获得一些简单实用的技巧，并导致最终的胜利，这种情况是颇为常见的。这相当于某种理论的基本引理和事实，通常在初次接触该领域的简单问题时就容易得到。

在更复杂的游戏中，问题永不会枯竭，游戏高手想要在从未探索过的游戏情境中用首创方法来解决，这就对应于研究数学理论中未解决的问题。

最后，有些人有能力创造新的游戏，善于出新鲜点子，设计情景，能给出新颖的策略和创造性的游戏方式。将其与创立新的数学理论类比的话，这就相当于具有丰富的思想，善于提出问题，并应用于其他未解决的问题，从而更深刻地揭示现实生活中某些至今尚不明了的真理。

数学不仅具有游戏的品性，更重要的是游戏或游戏式的态度对数学的发展有着直接而积极的促进作用。数学史上经常出现这样一种情况，一个像游戏似的有趣问题，或是对一个表面看来无关紧要的情境作巧妙观察，会产生一种新的思维模式。当人们能以自愿而嬉笑的心境，而不是以正式的科学常有的严肃认真的背景来看待一门学科时，这种精神就能使科学有效地取得进展。

游戏是智慧的象征，数学的生命力就在于其内在的趣味性或游戏性。

（二）数学：一种思维艺术

艺术最早的含义是技艺，是制作某种东西的能力。在最平常的意义上，一件艺术作品首先是一件人工制品，而人工制品，就意味着一种加工技艺是不可缺少的，这在造型艺术中表现得最为明显。但技艺不应该仅指手工的技艺，虽然技艺原本就是指的“手工的”技艺。即除了“手工的”技艺外，还应该包括“智力的”或“心智的”或“思维的”技艺。在对观念、理念的模仿制作过程中，实际上就包含了手工的技艺与心智的技艺。诗歌就主要是一种心智的技艺的产品。数学也就是这种心智技艺的产品。这便是我们所说的数学是一种思维的艺术。

那么何以见得数学就是心智技艺的产品，而不是像许多人以为的那样是逻辑推理的产品呢？如果数学的创造真的只是一种刻板的机械的或程序化的逻辑推导，那么它就谈不上是思维的艺术，而只是机械的生产。

世界著名数学家庞加莱关于数学创造的论述，为我们回答以上问题提供了一个良好的素材。他首先指出：“数学创造的发生应该是心理学最感兴趣的问题。它似乎是人的心灵向外界索取最少东西的一种活动。在这里，人的心灵只是或似乎只是自身在起作用，并只作用于自身。所以，在研究几何思维过程时，我们可以期望触及人的心灵里最本质的东西。”然后他便提到了一件他认为是让人感到奇怪的事情：“怎么会有人不懂数学呢？如果数学只是求助于逻辑规律，诸如所有智力正常的人所能接受的那些规律；如果数学提供的事实是根据人类普遍知道的原则，而且只要不是疯子就不会否认它们，那么怎么会有那么多人跟数学格格不入呢？”庞加莱认为，不是每个人都能搞发明，这一点毫不奇怪；不是每个人都能记住曾经学过的证明，这也容易理解。但是，不是每个人都能懂得人家给他讲解的数学推理时，却是非常奇怪。然而，只有很费劲才能领会这种推理的人却占了大多数，这是不可否认的。

进一步，他还说到：搞数学时怎么可能产生错误呢？一个心智健全、神智清醒的人不应该犯逻辑上的错误。可是许多非常优秀的人物，他们在诸如日常生活的简单推理中能不出差错，但他们不能领悟或不能无误地重述一些数学论证，虽然有些论证长了一些，但终究不过是他们很容易作的简单推理的推砌。

正是这个被庞加莱视为奇怪的事情，我们认为，它深刻地反映了数学创造是一种心智的技艺、技能，而不是刻板的、机械的、程序化的推导。如果只是后者，只要你认真的一步一步地遵循有关的规则程序化的推下去就行了，那就不会出错，不会不懂数学。正因为数学创造包含了像绘图技巧一样的技艺成分，才使其看上去不那么容易理解。理解的过程就是一种需要运用思维技能的过程，如果没有这种思维的技能或这种技能较差，那就难以理解稍微复杂一点的数学。如若没有绘画的技能，就画不像一个很简单的图案一样。这里你缺少的是手工的技艺，而一个学不懂数学的人缺少的是大脑的技艺。这就是我们为什么说，数学是一种思维艺术的原因之一。这是从数学发生、数学创造，也即一种思维技艺的角度而言的。

那么什么是数学创造呢？这种思维技艺又是如何体现出来的呢？根据庞加莱的思想，数学创造就是以已知的一些数学知识来做出各种新的组合，如把“连续”这个概念与“函数”这个概念组合在一起，就有了“连续函数”这个新的概念。这是很简单的一个概念组合。最复杂的组合是理论与理论之间的组合，一种包括概念、公理、方法等方面的系统组合。如几何学与微积分的组合，产生了微分几何学。这种复杂的系统组合，其实也是根源于简单的概念组合。这种简单的组合多数人都会做，但是这种无序的简单组合的数目将是无穷的，而且其中的大多数组合是无意义的。庞加莱认为，“创造恰恰在于不去作各种无用的组合，而去作那些有用的、数量极少的组合。”创造就是鉴别，就是选择。识别、

选择，进而组合，并不是一个机械的过程，它全然没有可供遵循的规则，通常还是下意识的或潜意识的。庞加莱根据自己数学创造的经验指出，数学创造需要的是一种和谐的美感、愉悦的情感。他说：以美和高雅为特征，同时能启发我们内心某种美感的数学组合是这样的东西，“组成它们的各个部分是如此和谐地配置着，致使我们的心灵只要了解了细节就能毫不费力地领悟它们的全体。当一个秩序井然的整体出现在我们眼前时，它就使我们预见到一条数学定律……由此，我们得出下列结论：有用的组合正是那些最美丽的，我指的是那些最能诱惑特殊情感的组合。所有数学家都知道这种情感，但外行人对它是如此无知，通常总是对它一笑置之。”数学是那些创造真谛的人们的思维结晶。由此说明，数学创造不仅是一种思维技能，而且是一种遵循美学原则的技艺。因此，我们完全有理由说，数学是一种思维艺术。只是要欣赏这一艺术，还必须接受严格的训练，使自己获得起码的技能。

（三）数学：打开机会大门的钥匙

数学是打开机会大门的钥匙。这已是数学在美国等西方发达国家中树立的新形象。现在数学不再只是科学的语言，它也以直接的和基本的方式为商业、财政、健康和国防做出贡献。如为国家提供技术经济竞争的工具；帮助人们做出有充分依据和可操作的决策。它为人们、尤其是大学生、研究生打开了职业的大门。

科学技术的发展，已造成了巧干比仅仅苦干更为重要的世界经济。而巧干对人们的智力则提出了更高的要求。他们要能吸收新的想法、能适应各种变化，对复杂性事件能发觉其模式并且能解决非常规的问题。这些要求不仅是需要会计算（现在这主要由机器来做），而是要能够数学地思考一切。数学成为各种工作的先决条件。美国人已经意识到：如今人们比过去任何时候都需要为生活而思考，人们比过去任何时候都更需要数学地思考。高新技术的迅速发展，已经使当今的工作场所“数学化”。然而，由于缺

乏数学能力，许多现在的人们（包括学生）没有为未来的工作做好准备，甚至没有为现在的工作做好准备。但是，数学已经成为并将更加成为机遇和职业的关键。

数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断，以及运用符号等，它们是普遍适用并且强有力的思考方式。应用这些数学思考的方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代日益重要的一种智力，它使人们能批判地阅读，能识别谬误，能探察偏见，能估计风险，能提出变通办法。数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界。

数学的观念也在众多不同的层次上影响着我们的生活方式和工作方式：

实用的——在改善基本生活水平方面马上能用到的知识，诸如比较贷款的优劣、计算保险金额、看懂按比例尺画的图、理解各种通货膨胀率的后果等等。这些能力会直接带来实际利益。比如，对于个人、群体，乃至对于作为整体的人类来说，风险评估（汽车事故、核电站事故、地球的灾难）已成为不可缺少的生活内容，有了数学我们才能做出合理的决策。概率方法是进行这类评价的一种行之有效的手段。概率概念使我们得以用一种批评的眼光来检查数据和进行推测。

公民的——能加强理解公共政策事务的概念，公众关于物价、税率、交通和公共卫生的重大问题的争论常常集中在用数字表述出来的科学问题上。从人口增长的预测中，从影响利率的诸因素之间的相互作用中推断出来的问题本质上都包含着与数学有关的内容，害怕数字或不能从数字做出推理的公众是不能辨别公共政策中的合理主张和不顾后果的主张的。理想地说，数学教育、数学大众化应有助于创造“有见识的公民”。美国有位总统曾称“有见识的公民”为民主的惟一适当的基础。

技能的——能改善思维的品质，提高思维的技能。通常人们对事物的认识都是凭借自己已有的经验对事物进行一种定性的思考，很少考虑事物中量的关系。然而，不知道事物中所包含的量的关系，就很容易构想出表面上合乎逻辑而实际上荒谬无理的论点来。量的错误是思维中的一种主要错误，这根源于人们对感觉的轻信和对量的迟钝。关于事物发展、变化的预测、估计通常是容易出错的，尤其是当事物的发展以指数增长的形式进行，常常会产生一些惊人的使人迷惑不解的结论。有这样一个问题，不知迷惑了多少人。一张纸，对折 50 次，有多厚？1 米？10 米？100 米？……你绝不会想到：它比喜马拉雅山还高！说出来难以让人相信，但算一算确实比喜马拉雅山还要高得多得多。即使纸薄到仅千分之一毫米，也将有一百万公里厚，从地球到月亮跑一个来回还绰绰有余。这就叫指数增长。

文化的——数学作为一种主要的智力活动的传统，作为一门因其优美不亚于其威力的学科而受到赏识。诸如对称、证明和变化这些抽象概念的不朽的地位是经过 3000 多年的智力努力而发展起来的。可以认为它们是我们必须传给后代的人类文化遗产的最好部分。的确，只有把数学看成人类探索的一部分，外行人才能正确地认识 20 世纪的深奥的研究工作的价值。如同语言、宗教和音乐一样，数学也是人类文化的一个影响全局的部分。

对于社会的经济和政治结构来说，数学经验的这些层次形成了一种数学文化的源泉，尽管这种源泉一般说是隐藏在公众视线之外的，它与科学和社会提出的挑战相呼应，而且经常地改变着。我们现在正处在一个变化最活跃的时期。数学的力量提供给人们抓住机会、迎接挑战的钥匙。

1984 年 5 月，美国国家研究委员会曾就进一步繁荣美国数学等问题，撰写了一份长达 162 页的报告。该报告明确提出：高新技术的出现把我们的社会推进到数学工程技术的新时代。在这个

时代里，数学与工程技术以新的方式相互作用着。从前，数学虽然也直接为工程技术提供一些工具，但基本方式是间接的：先促进其他科学的发展，再由这些科学提供工程原理和设计的基础。现在不一样了，数学与工程技术之间，在更广阔的范围内和更深刻的程度上，直接地相互作用着，极大地推动了数学与工程科学的发展和技术的进步。由此，也增强了数学在经济建设和社会发展中的作用。

数学工程技术的新时代对于广大公众意味着什么呢？在人们的意识里，企业、公司从来聘用的都是各类应用科学工程技术型人才及经济与法律型人才。从来没有哪个企业、公司会聘请一个专职的数学家。人们会说：数学家在市场中没有位置。然而在数学工程技术的新时代，企业、公司的老板，首先考虑要聘用的人才就是数学家。这在美国和西欧一些大的企业中已成为事实。越来越多的公司意识到，利用强有力的计算技术去解决复杂的方程以及最优化问题的能力，已经戏剧性地改变了工业过程的组织和模型试验以及新产品的设计。许多大公司的研发总监则认为：“当今对工业研发的最大产出之需求只能靠更多地使用数学方法来满足”。“比如仿真方法可大规模地减少复杂产品开发中实验和建设耗费”。20 世纪 80 年代以后逐渐兴盛的工业数学已在这方面大显身手。企业对“工业数学家”有一种日益增长的需求。西方一些大学已经设立了专门培养工业数学专业的大学生、研究生和博士后的工业数学系。人们开始形成一个基本的想法：如果在企业方面没有人能够恰当地评价数学理论成果，技术转化工作将受到阻碍。他们相信，理论终将转化为利润。

不仅产品的研发、生产需要数学，如今，工业、商业的经营管理也应用了数学。如运用线性规划最优化技术，在各种工商业活动中，从选择油轮船队的最佳航线和工厂机器的最优使用，到运输系统的合理调度，都发挥了作用，提高了管理决策的水平。非

线性规划和整数规划的发展，各种解决非线性函数值问题的有效方法的出现，使应用范围更为扩大，并促进了研究活动十分活跃的运筹学、管理科学的发展。总之，数学已经并正在以空前的规模进入社会的各个领域。为人们提供了打开机会大门的钥匙。

三、数学大厦的基础

为了更好的理解数学，阐明数学大厦得以建立的基础是十分必要的。顾名思义，数学大厦的基础就是数学得以建立的基石，是数学的逻辑根据，是数学的出发点。不过，作为一门相对独立的学科——数学基础，它的出现已是 20 世纪后的事了，尽管数学的历史已有数千年。对数学基础的研究起因于对数学可靠性的怀疑，要说明这一点，还得从历史上的三次数学危机谈起。

(一)数学史上的三次危机

公元前五世纪毕达哥拉斯学派中的一位名叫希帕索斯的数学家发现了正方形的一边与其对角线不可通约，即两条线段的长度不可用两个整数之比表示。这引起了他们极大的恐慌，因为在毕达哥拉斯学派中的人们心理上有这样一个信条：宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比。要知道，当时人们刚刚把自然数扩充到有理数（尽管当时的人们还不一定有分数或有理数这个概念），根据经验以及各式各样的实验，完全确信任何量在任何精确度范围内都可以表成整数或整数之比即有理数。不可通约几何量的发现几乎等于把以前所坚信的东西从根本上推翻了。正因为如此，人们把它称之为数学的第一次危机。后来人们认识到，不可通约几何量的发现，就是无理数的发现，从此使人们认识到整数与整数之比并不能包括一切几何量。

16、17 世纪诞生了微积分。当时整个微积分理论是建立在含糊不清的无穷小概念之上，没有一个牢固的基础。导数、微分、积分等基本概念模糊不清。因此，微积分创立不久便遭到了来自各