# 数理逻辑资料

## 著作部分

# 汪奠基

## 逻辑与数学逻辑论

作者汪奠基(1900～1979)，现代逻辑学家，早年曾留学法国，后任中国社会科学院哲学研究所研究员。主要著作有《逻辑与数学逻辑论》、《现代逻辑》、《中国逻辑思想史》等。《逻辑与数学逻辑论》一书于1927年由商务书馆出版，是我国学者自著的第一本数理逻辑专著。但因内容不够完备，加上文字艰奥，所以影响不大。

## 第二部 第一篇 第三章

### 为什么有新数学逻辑的产生①

(1)亚里士多德派的逻辑根本太狭

亚里士多德的逻辑何以太狭呢？因为它值是一种“类分的逻辑”(Logiqul de classe)，所谓思想定律的三种原理，同一律、矛盾律、不容间位律，不过拿各个底本身来类分名辞的所有；换言之，概念都是孤立的，只在确定的秩序中，依其所能包容与所能连累的来包容或连累之②；再换言之，主格与表格彼此互用③。这惟在内包研究上有效，于实际的外延——表格性上——

都疏忽了。因为这种概念的类分，在内包秩序中，对于最普遍底意义不过建出合解底条件，然而仍有过于不切实的。

故新形式逻辑要用所谓标辞逻辑补充从前类分的旧式逻辑④。在复合名辞上构成类分的运算，或同一类推的运算。因为要使演绎真理可能，更使一切演绎方法都成正确推理，必须实行知道怎样标辞的细分，能连累于类分关系。

再一方面看，旧式逻辑所讲的标辞，只有专注于包摄（inclusion）关系，即是凡概念间的关系，都用一个关系动词的“是”字表记之,所谓关系也就止如此。总之,惟一的关系就是从表格到主格从形容到所形容的。而于这些关系旁边，再没有连累量性的，譬如语言中关于前词、连接词，以及语尾各处所表明的关系，如果想连成逻辑上有用的思想，对量性都应该注意。在亚里士多德的逻辑上，思想与语言的分析完全不够，所以一定要进一步底追求。

①这里论述了数理逻辑产生的原因， 数理逻辑和传统逻辑的比较等问题。

②连累：现在统称“蕴涵”。

③主格、表格：现在统称“主项”、 “谓项”。

④标辞：现在统称“命题”。

旧式逻辑不只显出无味的人造，还有不能自足的表现。它把标辞的分解都当为“天主是善”的形容法式。譬如下面的话：

我刚从段家店来；

变为

我是“段家店来的”。

这看出它忽略思想与实在的关系，亦不知标定地方久远的关系。还有同样用动词的“是”表明为“是的”。譬如：

甲是相似于乙；

甲是比乙大或小；

甲是乙的父；

甲是乙的地方；

诸如此类，实在的连辞并不由一“是的”可以表明关系。所表明的关系正要辞句的集合。如果改变标辞的证明，不能拿“相似于乙”来做主格，实在只是一乙，还要说：“乙相似于甲”。这正是旧式逻辑太狭的明证。

(2)赖布尼支的普通数学逻辑也不完备。

赖布尼支看见这种不完备的旧式逻辑，以为必使普通研究的理论,都困于亚氏或学院派的范围中,所以他从数学与文法两方面精深底研究。但是结果他自己还是脱不出亚氏法则的限制。我们从数学或文法上看，他的新逻辑方法仍旧日犯同一错误,不过加进数学普遍材料，比较远到一层观察。若谓为真正完备思想方法的数学逻辑又实在不够。

他的逻辑代数完全在亚氏的逻辑内包上（就三段式而言），这种范围极端底狭小。对精神所有观念，它只能包普泛概念或类分的部分（即普通观念或抽象观念）。再从各观念中看，所能得的关系，旧式逻辑也只能研究“包摄的关系”。（再还有相等的关系，也可以由此限定）。

赖布尼支对于语言思想的复杂变更，有时虽然用关系词来概括，自己还是承认这个理论为离逻辑原理独立的导言。可惜他的试验不成,所余下的理论,完全草创,故相近两世纪之久,无人能继续研究，至十九世纪第二半期，才有人把他逻辑代数的形式建定。所谓关系逻辑亦从此发现。但是还不能说逻辑为事实的科学，它的价值还有一大部分要研究。能做这种研究的数学逻辑家完全在科学纯正见点上就数学普泛的方法，求出逻辑真正定律的原理。

（3）现代新数学逻辑补救的方法

赖布尼支的逻辑代数，在当时能明白知道的人并不多，所以他的思想真正注意的地方，因为自己没有完全成功，结果几乎没有人研究，好在他普遍数学的功效太深，所以逻辑代数的思想于无形中进步了。遂产生坡来的数论分析思想①。我们二十世纪的数学逻辑遂从此发轫，而赖布尼支的势力，亦因此愈加扩大。

①坡来：现在译作“布尔”

我们知道旧式逻辑与赖布尼支的数学逻辑，都失败于概念考察。要想把概念的考察代用以标辞的考察，使由标辞配合的与由孤立名辞配合的一样，应该用什么方法呢？坡来先研究出演绎运算不合理，遂注意三段式所用的演算，设法重消去中名辞；必使在三名辞系统中消去中名辞时，如同在两未知量的方程式中消去一未知量无异。

形式逻辑应该变为“消去法”的通论。如代数学在方程式的理论中，我们现在虽已使之与消去法的理论对立，但是消去法决不能负担关于量一方面的。结果是否能使之由此演算发展，以至

量性关系的与性质关系的一样？在概念与标辞上关系的又能否与数目和列数的关系所关的一样？这一定的，因为数学家只持算他的推论，只要适合征号的运算，从具体事物所表现的考察，遂做成征号上完全通释的抽象。

在这种新的演算中，又用什么方法实行呢？如果与代数演算相同，我们仍然不能知道先天的。但是要想把它设起式子来，就要把演释中精神方面所拘束的种种运算，统行分析用征号来表明所配置的关系，在征号间仍然能表现，换言之，所谓限定运算，必要征号都通于思想的实际运算。

应该凡是公理、公律、原理、都与一切科学上不同的发展相别，按照真实存在的关系来消灭之。又要不是假装定义或定理。所以能使科学完全发展的，只有唯一形式逻辑公理帮助。

因此，我们在一切理性索究的场围中，所有鉴定的意念，没有一点普通形式主义的部位。所以逻辑单纯的演绎法，能从此意念上超至其它的意念，全不用直觉救助。凡属科学就是逻辑的原动。到这种数学逻辑，才是真正达到笛卡儿、赖布尼支普遍数学的希望，真在普泛和永远的科学与哲学上建定的。

## 第二部　第二篇　第二章

现在再把$\varepsilon$与$\supset$的两重要关系，特别比较看看[1]。譬如旧三段式的

凡人是有死的；

孔子是人：

所以孔子是有死的。

这三个“是”字在语言中不甚分明，即旧式逻辑家亦未能申辩。其实大前提的连辞为$\supset$，而小前提与结论则为$\varepsilon$，此班洛之最大发现。因为$\supset$为两“类分”间第一连累第二的关系，而$\varepsilon$为由个体到类分的部分关系。就征号正确意义上应列为：

$$a\supset b \cdot x\varepsilon a \cdot \supset \cdot x\varepsilon b.$$

而与寻常所谓：

$$a\supset b \cdot c\supset a \cdot \supset c\supset b.$$

完全有科学理论之别。再者演算中$\supset$为转化的，而$\varepsilon$为非转化的。譬如：

$x\varepsilon y \cdot y\varepsilon z$不能断定为$x\varepsilon z$

因为$y$为类分，而$x$为个体，$z$为类分，而类分的$y$为个体；因此$z$为$y$上类推的类分之一类分。在它普通元素中不能合$x$为一。故一个体的类分，与唯一个体单类分的存在，应该特别分明。如果$x$为个体，则其惟一元素用“$\iota x$”表定类分。读为“相等于$x$。”如：$y=x$为关系$y$的条件，其集合证得：$y\ni(y=x)$，即是$x$为惟一个体的类分，换言之，为：$\iota x$的存在。所以：

$$\iota x = y\ni(y=x)$$

$$\therefore y\varepsilon(\iota x) \cdot = \cdot y=x$$

反之，如果$a$为单类分，则其惟一个体所成之类分以其反号之“$\iota a$”表定之，读为“只一$a$。”简言之，$\iota$为转换个体成单类分，$\iota$为转换单类分成个体。其相当的两等式为：

$$a=\iota x \qquad x=\iota a$$

① “属于”与“包含于”是逻辑中非常重要的两个概念。汪奠基于1927年已经对这两个概念作了科学的准确的区分。

# 金岳霖

## 《逻 辑》

作者金岳霖(1895—1984)，湖南省长沙市人，中国共产党党员。1918年和1920年在美国哥伦比亚大学先后获硕士学位和博士学位。1926—1952年任清华大学文学院院长，哲学系主任、教授。1952—1955年任北京大学哲学系主任、教授。1956年后任中国科学院哲学社会科学部学部委员、哲学研究所副所长、一级研究员。1979年任中国逻辑学会会长。他是现代中国著名的哲学家和逻辑学家，是我国传播现代逻辑最早也最有影响的学者之一。对中国逻辑学的发展作出了杰出的贡献。他的《逻辑》一书于1937年由商务印书馆出版，是我国30年代以来最有影响的逻辑专著与大学教本。其哲学主要著作有《论道》、《知识论》等。

怀德海和罗素合著的《数学原理》，是一部庞大的权威性的数理逻辑著作。《逻辑》从其中选取了近300个定理，组成一个精干的逻辑演算系统。其中包括命题演算、谓词演算、类演算、关系演算。这是中国1949年以前介绍的最全面最系统的逻辑演算，也是1949年以前在传播数理逻辑方面，影响最大的逻辑系统。本书对这一系统中的多数定理都给出了证明。与《数学原理》不同的是，对许多定理还作了注解。金岳霖在序言中说：“不加语言方面的注解，不容易尽介绍的责任。”书中所加的许

多注解，表现出作者在数理逻辑方面的深刻思考和精辟见解，在数理逻辑和形式逻辑的比较研究上有重要价值。本书在中国最早讨论了逻辑系统的完全性、一致性、公理的独立性问题。作者对逻辑矛盾和逻辑必然的本质，也作了深刻的分析。本书以其独到的见解，产生了很大的影响。

## 第 四 部

## 二、界说方面的种种

B.必然的解释①。在未讨论必然之前，我们可以提出一青年所难免发生的问题。作者在十几年前与同学清谈时，就不免表示对于算学家有十分的景仰。尤其使他五体投地的就是算学家可以坐在书房写公式，不必求合于自然界而自然界却毫不反抗地自动地承受算学公式。这问题在许多读者们中或者根本没有发生过，或者发生过而自己有相当的解释，亦未可知。作者对于此问题，以算学素非所习，所以谈不到解释的方式。近年经奥人维特根斯坦与英人袁梦西的分析才知道纯粹算学，至少他们所称为“纯粹算学”的算学，或逻辑学，有一种特别的情形。此情形即为以上所称为逻辑的必然，或穷尽可能的必然。对于这种必然我们可以分以下三层讨论。

同时，排中律就是一最简单而又最显而易见的必然命题，此处讨论必然命题，间接地也就是在那里讨论排中律。

1.要知道此种必然的性质，我们最好先谈二分法。设以x代表任何东西或事体或事实或思想，如果我们引用二分法，即有x

与非$x$的正反的分别。

a. 如果$x$代表类称，引用二分法后即有正反两种类称，那就是，$x$与$\bar{x}$（非$x$）。

这种正反两分别的变类要看原来的类称数目多少。有$x$与$y$两类，引用二分法后，就有四种不同的类称。如果以$\bar{x}$代表非$x$类，$\bar{y}$代表非$y$类，这四种类称如下：

$xy$、$x\bar{y}$，

$\bar{x}y$、$\bar{x}\bar{y}$，

如果我们有$xyz$三类称，引用二分法后，就有以下八类：

$xyz$，$\bar{x}yz$，$x\bar{y}z$

$xy\bar{z}$，$\bar{x}\bar{y}z$，$x\bar{y}\bar{z}$

$\bar{x}y\bar{z}$，$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$。

由此我们可以看出如果我们以2表示正与反两分别，$n$代表原来类称数目，引用二分法后，所能有的类称的总数为$2^n$。

b. 以上是以二分法引用于类称，可是当然不必限制到类称方面。现在研究逻辑的人似乎都觉得命题比类称还要根本。这一层在此处不必讨论。我们所注意的是二分法之引用于命题方面与用之于类称方面是一样的。命题也可以有正与反。普遍以正为真以反为假，我们可以照办。可是我们不要把真假看得太呆板，我们现在只认它们为正与反两绝对分别中之一种解释而已。

如果我们有一个命题$p$，引用真假二分法后，就有以下真假两可能。

$p$，$\bar{p}$。

如果有两个命题$p$与$q$引用二分法后，就有以下四个可能：

$pq$，$p\bar{q}$。

$\bar{p}q$，$\bar{p}\bar{q}$。

如果有三个命题 $p$、$q$ 与 $r$，引用二分法后，就有以下八个可能：

$pqr$，$\bar{p}qr$，$p\bar{q}r$，

$pq\bar{r}$，$\bar{p}\bar{q}r$，$p\bar{q}\bar{r}$，

$\bar{p}q\bar{r}$，$\bar{p}\bar{q}\bar{r}$。

这种可能我们称为真假可能。它的数目为 $2^n$，与类称方面的正反可能一样。

2.类称方面的正反可能有正反可能的函数，命题方面的真假可能有真假可能的函数。我们从最简单的例着手。

a.一个命题 $p$，引用二分法后，有真假两可能，我们最好用以下方式表示这两个可能：

| | P |
|---|---|
| 1. | 真 |
| 2. | 假 |

可是对于这两个可能，我们从承认与否认方面着想，可以有四种不同的态度，或者说有四种真假可能的函数。这四种不同的态度，可以表示如下：

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| a. | 真 | 真 |

| | | |
|---|---|---|
| b. | 真 | 假 |
| c. | 假 | 真 |
| d. | 假 | 假 |

以上“1”与“2”代表一命题的真假两可能，“a”“b”“c”“d”代表四种不同的态度，或真假可能的函数。原来的真假两可能是两个命题，一个说p是真的，一个说p是假的。abcd四个不同的态度是四个不同的命题如下：

a.—「“p是真的”是真的或“p是假的”是真的。」

b.—「“p是真的”是真的而“p是假的’是假的。」

c.—「“p是真的”是假的而“p是假的”是真的。」

d.—「p是真的”是假的“p是假的”也是假的。」

以上四命题中，“b”与“c”可以不必提出讨论，因为它们只承认真假两可能中之一可能。“b”命题不过是说“p是真的”，因“p是假的是假的”等于“p是真的”。“c”命题不过是说“p是假的”。因“p是真的是假的”等于“p是假的”。

b.“a”与“d”两命题有特别的情形。“d”命题对于原来的两可能均不承认。原来的真假两可能一方面彼此不相容，另一方面彼此穷尽；事实上的情形无论若何的复杂不能逃出二者范围之外。换句话说，所有的可能都包括在原来两可能之中。若将所有的可能均否认之是不可能。“d”命题既否认所有的可能，是一不可能的命题，那就是说是一矛盾。

“a ”命题与“ d”命题的情形恰恰相反。“a”命题把原来任何可能都承认了。“d ”命题不能是真的，而“ a” 命题则不能是假的。这两个命题的真假与寻常命题的真假不同。寻常命题或者是真的或者是假的，而这两个命题中一个不能不假，一个不能不真。

我们要记得“ a”命题说「“ p是真的 ”是真的或者“ p是 假的 ”是真的。」这不过是说“ p是真的或者 p是假的 ”。我们可以用一个很寻常的命题来试试。假如我们说“这个东西或者是桌子或者不是桌子 ”，这句话无论如何是不会错的。所谓“这个东西 ”者既可以是桌子，而不是其它的东西，但也可以是人，或者是椅子，或者是米，或者是西瓜……等等。可是无论它是什么，它都可以容纳到“是桌子或者不是桌子 ”的范围之内。照此看来“ a ”命题无往而不真，我们不能否认它，因为在引用二分法条件之下它承认所有的可能。

同时我们也要注意“ a ”命题这样的命题对于具体的事实或自然界的情形根本就没有一句肯定的话。这种命题既不限制到一个可能而承认所有的可能，在无论甚么情况之下，它都可以引用。这就是承认所有可能的“必然 ”命题。

c. 以上不过是就一个命题而说的话：如果有 p、q两命题，原则一样，不过真假可能加多而已。p与q两命题的真假可能有四个，如下：

$pq$，$p\bar{q}$

$\bar{p}q$，$\bar{p}\bar{q}$

而这四个真假可能的函数则有十六个。那就是说，我们对于这四个可能可以有十六个不同的命题表示十六个不同的态度。此十六

个命题之中有一个不可能的命题，有一个必然的命题。前者否认所有的可能，后者承认任何可能。

如果我们有三个命题如p、q、r，我们有八个真假可能，有二百五十六个真假可能的函数。那就是说，我们可以有二百五十六个命题，表示对于这八个可能有二百五十六个不同的态度。这些命题之中有一个否认所有的可能，所以是矛盾的命题，有一个承认任何可能，所以是必然的命题。

3.凡从以上所讨论的必然的命题所推论出来的命题都是必然的命题。这句话容易说，而不容易表示，更不容易证明。现在姑就容易着手的一方面，表示逻辑的基本命题是方才所说的这一种必然的命题。逻辑与算学或者是已经打成一片，或者是可能打成一片，或者是根本不能打成一片。但无论如何，在P、M、的定义范围之内它们是已经打成一片。这部书的基本命题也就是它的逻辑与算学的前提。我们可以看看这些基本命题是否是必然的命题。

P、M第一章（在1910版中）有六个基本概念，一个定义，十个基本命题。基本命题之中，有五个是用符号表示的，有五个是用普通言语表示的。后者之中有两个是推论的规律。以语言表示的基本命题应否视为此系统的基本部分，颇发生疑问。无论如何本文可以不去管它们。我们在此处仅表示所有以符号表示的五个基本命题都是必然的命题。

1.01 $p \supset q. = \cdot \sim p \vee q.$ Df.

这是定义。我们要利用这个定义，去表示以下五个基本命题都是必然的命题。我们要知道：

$$\sim p \vee q = \sim p \sim q \vee \sim pq \vee pq$$

以上“～”代表“非”或“反”，“∨”代表“或者”。

$1.2 \vdash : p \vee p \cdot ; \cdot p$。$P_p$（$P_p$表示是基本命题）

这是第一个以符号表示的基本命题。照以上的定义它可以变成以下的形式：

$= \sim (P \vee P) \vee P$

$= \sim P \sim P \vee P$

$= \sim P \vee P$

这个命题说：“P或者是假的或者是真的。”一个命题P只有这两个可能，若此两可能之中任何一可能均为此基本命题所承认，它一定是必然的命题。

$1.3. \vdash : q \cdot \supset \cdot p \vee q$。$P_p$.

照以上的基本定义，这命题可以变成以下诸形式：

$= \sim q \cdot V \cdot (pVq)$

$= \sim q \cdot V : (pq \cdot Vp \sim q \cdot V \cdot \sim pq)$

$= p \sim q \cdot V \cdot \sim p \sim q \cdot V \cdot pq \cdot V \cdot p \sim q \cdot V \cdot \sim pq$

$= p \sim q \cdot V \cdot \sim p \sim q \cdot V \cdot pq \cdot V \cdot \sim pq$

$1.4. \vdash : pVq \cdot \supset \cdot qVp \quad P_p$

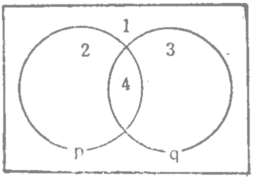
$= \sim (pVq) \cdot V \cdot qVp$

$= \sim p \sim q \cdot V \cdot pq \cdot V \sim pq \cdot V \cdot p \sim q$

p与q两命题的真假可能可用下图表示：

$1 = \sim p \sim q \quad 2 = p \sim q$

$3 = \sim pq \quad 4 = pq$



以上1。3与1。4两基本命题把$p$与$q$所有的真假可能中的任何可能均承认之，所以它们都是以上所讨论的必然命题。

1.5. $\vdash : p\vee(q\vee r)\cdot\supset\cdot q\vee(p\vee r)$

根据同样的办法，这一命题可以有以下的形式上的变化：

$$=\sim[p\vee(q\vee r)]\cdot\vee\cdot[q\vee(p\vee r]$$

$$=\sim[p\cdot\vee\cdot(q\sim r\cdot\vee\cdot qr\cdot\vee\cdot\sim qr)]\cdot\vee\cdot[q\cdot\vee\cdot(p\sim r\cdot\vee\cdot pr\cdot\vee\cdot\sim pr)]$$

$$=\sim p\sim q\sim r\cdot\vee\cdot[q\cdot\vee\cdot(p\sim r\cdot\vee\cdot pr\cdot\vee\cdot\sim pr)]$$

$$=\sim p\sim q\sim r\cdot\vee\cdot\sim pq\sim r\cdot\vee\cdot pq\sim r\cdot\vee\cdot pqr\cdot\vee\cdot\sim pqr\cdot\vee\cdot p\sim q\sim r\cdot\vee\cdot p\sim qr\cdot\vee\cdot\sim p\sim qr$$

1.6. $\vdash : q\supset r\cdot\supset : p\vee q\cdot\supset\cdot p\vee r$

我们可以先把以上命题分成两部，用同样的办法改变它的形式。

$$q\supset r\cdot=\cdot\sim q\vee r$$
$$=\sim q\sim r\cdot\vee\cdot\sim qr\cdot\vee\cdot qr$$

而$p\vee q\cdot\supset\cdot p\vee r=\sim(p\vee q)\cdot\vee\cdot(p\vee r)$

$$=\sim p\sim q\cdot\vee\cdot(p\sim r\cdot\vee\cdot pr\cdot\vee\cdot\sim pr)$$

所以整个的命题是：

$$\sim[\sim q\sim r\cdot\vee\cdot\sim qr\cdot\vee\cdot qr]\cdot\vee\cdot[\sim p\sim q\cdot\vee\cdot(p\sim r\cdot\vee\cdot pr\cdot\vee\cdot\sim pr)]$$

$$=q\sim r\cdot\vee\cdot[\sim p\sim q\sim r\cdot\vee\cdot\sim p\sim qr\cdot\vee\cdot p\sim q\sim r\cdot\vee\cdot pq\sim r\cdot\vee\cdot p\sim qr\cdot\vee\cdot pqr\cdot\vee\cdot\sim pqr]$$

可是$q\sim r$对于$p$有两个可能：$pq\sim r$与$\sim pq\sim r$，所以以上又$=pq\sim r\cdot\vee\cdot\sim pq\sim r\cdot\vee\cdot\sim p\sim q\sim r\cdot\vee\cdot\sim p\sim qr\cdot\vee\cdot p\sim q\sim r\cdot\vee\cdot pq\sim r\cdot\vee\cdot p\sim qr\cdot\vee\cdot pqr\cdot\vee\cdot\sim pqr$