中国社会科学院文库·哲学宗教研究系列
哲学逻辑研究

著摇摇者 辕张清宇摇郭世铭摇李小五

出 版 人 辕谢寿光
出 版 者 辕社会科学文献出版社
地摇摇址 辕北京市东城区先晓胡同 员园号
邮政编码 辕员园园园园缘
网摇摇址 辕澡贼贼责: 辕辕憎憎憎援泽泽凿责援糟燥皂援糟灶
网站支持 辕(园员园) 远缘圆远怨怨远苑
责任部门 辕编辑中心摇 (园员园) 远缘圆猿圆远猿苑
电子信箱 辕赠怎藻赠怎葬灶岳泽泽凿责援糟燥皂援糟灶
项目经理 辕宋月华
责任编辑 辕段景民
责任校对 辕王媛利
责任印制 辕盖永东

总 经 销 辕社会科学文献出版社发行部
(园员园) 远缘员猿怨怨远员摇远缘员猿怨怨远猿
经摇摇销 辕各地书店
读者服务 辕市场部 (园员园) 远缘圆愿缘缘猿怨
法律顾问 辕北京建元律师事务所
排摇摇版 辕北京中文天地文化艺术有限公司
印摇摇刷 辕北京智力达印刷有限公司

开摇摇本 辕远源缘伊怨远园毫米摇员辕员远开
印摇摇张 辕圆愿
字摇摇数 辕源苑远千字
版摇摇次 辕圆园园苑年 圆月第 圆版
印摇摇次 辕圆园园苑年 圆月第 员次印刷

书摇摇号 辕陨杂月晕 怨苑愿原苑原愿园圆猿园原缘愿怨原苑辕月·园猿园
定摇摇价 辕缘愿援园园元

本书如有破损、缺页、装订错误，
请与本社市场部联系更换

摇图书在版编目（[illegible]）数据

摇哲学逻辑研究[illegible]张清宇，郭世铭，李小五著援 原北京：社会科学文献出版社，
[illegible]
摇（中国社会科学院文库·哲学宗教研究系列）
摇[illegible]

摇Ⅰ[illegible]哲 [illegible]摇Ⅱ[illegible]①张 [illegible]②郭 [illegible]③李 [illegible]摇Ⅲ[illegible]逻辑 原研究摇Ⅳ[illegible]

摇中国版本图书馆[illegible]数据核字（[illegible]）第[illegible]号

目摇摇录

前摇言

逻辑学是研究推理的一门基础学科，它描述推理实践，也编制推理系统。逻辑学是自身独立的学科，历史悠久，无须寄生于任何其他学科，当然也不反对借用其他学科的方法。由于不断地进行推理是科学赖以生存的根本，故而逻辑学的概念和方法在许多其他领域中都有用。伴随科学、技术和生产的发展，本学科也在不断地发展着。现代逻辑科学发展极其迅速，今天已成为一门具有众多分支的学科。它在科学技术和哲学学科发展的洪流中不断革新内容，开拓领域，并且日益显示其重要的理论意义和实用价值。逻辑学在数学、哲学、语言学和计算机科学中有着广泛而重要的应用。为了促进哲学学科解决现实中带有理论性的深层次问题，我们必须加强哲学各分支学科的基本理论研究，更要加强现代逻辑基本理论的研究。没有现代逻辑基本理论的武装，要想培养出学贯古今中外的大哲学家是不可能的。

现代逻辑基本理论是多方面的，大致可以从以下四方面来看。一是数理逻辑方面，包括：一阶逻辑、高阶逻辑、模型论、证明论、递归论和公理集合论。二是哲学逻辑方面，包括经典逻辑的各种扩充和其他各种非经典逻辑，例如模态逻辑、时态逻辑、多值逻辑、相干逻辑、直觉主义逻辑和弗协调逻辑等。三是逻辑学和数理语言学的交叉方面，包括逻辑句法、蒙塔古语法、范畴语法和自动机理论等。四是逻辑学和计算机科学的交叉方面，包括动态逻辑、逻辑程序和人工智能中的逻辑等。

数理逻辑方面的分支相对来说是比较成熟的，但即使如此也出现了一些新的发展。一阶逻辑通常的系统叙述要使用个体变项，现在有一种不用个体变项的记法，这种无个体变项的系统仍保留了原有的表达能力，并在某些方面更接近普通推理。七八十年代还提出了一阶逻辑语义的一种动态解释。此外，由于在一阶逻辑的许多应用中仅涉及一阶语言的一部分，从而推动了对一阶逻辑的一些子系统的研究。例如，一元谓词逻辑（公式中只能有一元谓词而不能有其他多元谓词或函项的逻辑），全称子句，以及匀燥则灶原子句等的研究。匀燥则灶原子句逻辑是高级程度语言孕则燥造燥早的基础，孕则燥造燥早在人工智能研究的许多领域（如数据库、定理自动证明、智能问题求解等）中都有应用。高阶逻辑中的类型论和λ原演算在自然语言的语义研究中越来越显示出它们的优越性，λ原演算还为人工智能语言蕴陨杂孕奠定了基础。应计算机科学发展的需要，模型论中专门研究有穷模型的有穷模型论也在七八十年代发展起来，模型论中原有的某些概念和技术不能完全适应有穷模型论的要求，一些重要定理将不再成立，其他一些结果的论证必须引用更巧妙的组合性质。证明论也不甘寂寞，首先是联结词的证明论意义几乎发展成专门的意义理论，对于直觉主义逻辑以及更一般的构造性逻辑尤其是如此。然后是有许多更有意思的逻辑演绎表述方式需要研究，例如采用无变项记法的一阶逻辑系统所带来的表述方式。递归论方面于六十年代中期发展起来的计算复杂性理论对于判定过程的精细结构的研究越来越深广，研究范围已开始涉及自然语言中的一些递归过程。公理集合论方面自员怨远猿年柯恩提出力迫法以来又有了长足的进展，提出了一批有用的新公理（如马丁公理、正常力迫公理），证明了很多集合论问题对于在云系统的独立性；特别

是，这种独立性证明进入了不少其他数学领域，从根本上影响着不少重要数学问题的答案，公理集合论越来越显示出它在数学研究中的基础性地位。

哲学逻辑方面的分支一般都以命题逻辑、谓词逻辑为基础，与传统哲学中的概念、范畴和问题有直接或间接的联系。从目前来看，计算机科学中的逻辑学研究虽很引人注目，各种系统五花八门，但研究大都还不很成熟。因此，哲学逻辑仍可说是各种非经典逻辑分支的统称。

历史上很早对非经典逻辑就已有过研究。例如，古希腊的亚里士多德研究过模态逻辑，第欧多鲁·克罗纳的著作中包含有时态逻辑的思想。现代对非经典逻辑的研究是从 灵琵年开始的。屡琵多年来，非经典逻辑分支的涌现有过三次高潮时期。第一次是二三十年代，刘易斯建立模态命题逻辑，卢卡西维茨和波斯特建立多值逻辑，海丁建立直觉主义逻辑。第二次是五十年代，道义逻辑、认知模态逻辑、问题逻辑、相干逻辑、自由逻辑、时态逻辑和弗协调逻辑等都在这一时期出现，代表人物是赖特、普赖尔、阿克曼和欣迪卡等。第三次是 屡琵年代，动态逻辑、模糊逻辑和非单调逻辑在这一时期掀起了一个高潮，代表人物是计算机科学方面的一些专家。每次高潮持续十多年，间隔约二十年。第二次高潮是由模态逻辑可能世界语义理论的发展所推动的，第三次高潮则是由计算机科学的发展所推动的。

非经典逻辑的门类很多，大致有两大类。一类是在经典逻辑中增加其他初始概念，成为经典逻辑的扩充系统。例如，模态逻辑中有模态词“必然”、“可能”；时态逻辑中有关于时态词“过去”、“将来”等的算子；在认知模态逻辑中有关于“知道”、“相信”等的算子。属于这一类的还有条件句逻辑、道义逻辑、问句逻辑和动态逻辑等。另一类主要是对通常说的逻辑常项（命题联结词和量词等）的解释不同，而成为与经典逻辑不同的逻辑。例如，直觉主义逻辑对联结词和量词都作构造性解释；相干逻辑认为蕴涵的前后件应具有相干性，也就是说将蕴涵解释成相干蕴涵；弗协调逻辑虽是为了处理不协调性而提出来的，但在具体系统的建立时往往是将否定解释成弗协调否定，故也可看成属于这一类的。属于这一类的还有多值逻辑，包括模糊逻辑。我建议用“异释逻辑”作为第二类的通称。

随着逻辑研究中多元化倾向的加强，也就是说承认可以选择多种方式来定义有效推理和逻辑常项，并且不指望将人类多种多样的认知方式归结为单一的标准方式，哲学逻辑方面的分支得到了越来越多的重视和发展。七八十年代是模态逻辑发展的黄金时代，取得了很大发展，出现了许多系统，弄清了克里普克关系语义、正规邻域语义、一般关系语义和模态代数语义四者之间的关系，建立起了三大理论支柱：完全性理论、对应理论和对偶理论。七八十年代模态逻辑在可证性解释、多值模态逻辑和直觉主义模态逻辑等其他方面也都有较大的发展。模态逻辑的大发展也推动了哲学逻辑其他分支的发展。例如，时态逻辑在最近十多年中，通过对传统方法的改进，建立了各种更加丰富的新系统，解决了相对于 郧和 匀、 郧和 匀忆 以及 杂和 哉等时态算子的极小系统问题，发现了许多不完全的时态逻辑公理系统，提出了改进传统时态逻辑局限的各种措施，在理论上和应用（尤其在程序设计中的应用）上都有许多问题等待研究。直觉主义逻辑近三十年来的发展较快，获得了很多重要成果，七八十年代一些逻辑学家在拓扑层（濡耨糯释 和拓扑斯（赙髅鬈 的基础上提出了更为普遍的拓扑解释，在构造性数学中取得了成功的应用，与电子计算机的设计和改进有着密切的联系，研究前景可观。相干逻辑在七、八十年代也有发展，解决了一些相干逻辑系统的判定性问题，证明了 砸和 耘都是不可判定的命题逻辑系统，简化了相干逻辑的克里普克式关系语义，相干模态逻辑和直觉主义相干逻辑都已开始有研究援

总的说来，一般趋势是承认多元化倾向，在继续深入研究已有逻辑系统的同时不断为适应新的需要建立新系统，提出新型的语义解释，积极开辟新的研究领域。学者们在研究中较倾向于考

察现存系统的子系统，力图以较低的表达能力和有限的演绎手段来作更多的事情。他们重视研究已往一些证明方法中被忽略的细节，以此来加深对它们的认识；他们也较感兴趣于逻辑中的构造性证明，尤其是那些有可能实施计算的证明。

本书的撰写是在员怨怨缘年国家社会科学基金项目《哲学逻辑研究》（批准号：怨缘月粤园园缘）的资助下进行的，因此我们也以《哲学逻辑研究》为书名，开辟这一研究项目的目的是想较全面系统地学习和探索哲学逻辑方面的新理论和新成果，同时深入发展我们已取得的成果。参加本课题的研究人员有张尚水、张清宇、郭世铭、李小五、邹崇理和王学刚。在不足二年的研究期间中所取得的一些成果已由课题组成员各自在别处发表。作为项目的最后成果，本书是由张清宇、郭世铭和李小五执笔撰写的，具体分工如下：张清宇，第一、二、六、七、八章；郭世铭，第三、五、九章；李小五，第四章。

我们希望本书将有助于国内读者对于哲学逻辑基本理论的掌握和加深对新理论、新成果的了解，也希望它能有助于推动我国深入开展现代逻辑基本理论的研究。本书各章可以独立阅读，但读者最好对一阶逻辑有一定的了解。

由于能力、时间和篇幅的限制，本书论述的不足和错误在所难免，敬请读者批评指正。

张清宇

员怨怨缘年 员员月

《中国社会科学院文库》出版说明

《中国社会科学院文库》（全称为《中国社会科学院重点研究课题成果文库》）是中国社会科学院组织出版的系列学术丛书。组织出版《中国社会科学院文库》，是我院进一步加强课题成果管理和学术成果出版的规范化、制度化建设的重要举措。

建院以来，我院广大科研人员坚持以马克思主义为指导，在中国特色社会主义理论和实践的双重探索中做出了重要贡献，在推进马克思主义理论创新、为建设中国特色社会主义提供智力支持和各学科基础建设方面，推出了大量的研究成果，其中每年完成的专著类成果就有三四百种之多。从现在起，我们经过一定的鉴定、结项、评审程序，逐年从中选出一批通过各类别课题研究工作而完成的具有较高学术水平和一定代表性的著作，编入《中国社会科学院文库》集中出版。我们希望这能够从一个侧面展示我院整体科研状况和学术成就，同时为优秀学术成果的面世创造更好的条件。

《中国社会科学院文库》分设马克思主义研究、文学语言研究、历史考古研究、哲学宗教研究、经济研究、法学社会学研究、国际问题研究七个系列，选收范围包括专著、研究报告集、学术资料、古籍整理、译著、工具书等。

为迎接中国社会科学院建院三十周年，我们将历届院优秀科研成果奖中的部分获奖著作重印出版，作为《中国社会科学院文库》的首批图书向建院三十周年献礼。

中国社会科学院科研局

圆园园远年 苑月

第 1 章
一阶逻辑

一阶逻辑，也称一阶谓词逻辑或狭义谓词逻辑。

一阶逻辑是数理逻辑的基础部分，是研究得最深透最完善的逻辑理论，包含命题逻辑作为子系统。它除研究复合命题的逻辑性质及推理关系外，还把命题分析成组成命题的非命题成分（个体词、谓词和量词），揭示简单命题的形式结构（命题形式），研究它们的逻辑性质和规律，重点是研究量词的逻辑性质和关于量词的推理规律。

一阶逻辑也是哲学逻辑的理论基础，是研究和建立哲学逻辑各种分支的基础。它的成果和方法广泛应用于哲学逻辑的各种分支中。

第一个完整的一阶逻辑系统是由德国逻辑学家弗雷格于 员愿苑怨年建立的。皮亚诺、皮尔士、施罗德和罗素等人为一阶逻辑的发展作出了贡献。哥德尔和根岑等人系统深入地研究了一阶逻辑的元逻辑问题，证明了重要的定理。

相对而言，大家对于一阶逻辑还是比较了解的，有关的中文书籍也还是比较多的。因此，我们在这一章中将极简要地概述一阶逻辑的基本内容。首先在第 员节中利用斯穆里安的统一记号概述命题逻辑的各种证明方法，然后在第 圆节中介绍我们的新成果——不用联结词和量词的一阶逻辑系统，最后在第 猿节中提出公理系统 匝匀和 匝陶，并证明它们的完全性。

第 1 节　命题逻辑的证明方法

命题逻辑是一阶逻辑的子系统，它研究由命题经命题联结词构成的复合命题的逻辑性质以及它们之间的推理关系。复合命题由命题联结词和一

些不再作进一步分析的命题组成。这些不再作进一步分析的命题叫作初始命题或简单命题，它们被看作只具有真或假的区别的对象。复合命题的真假由初始命题的真值和联结词决定。命题逻辑研究命题联结词的逻辑性质和相应的推理规律。

命题联结词决定了复合命题与作为其组成部分的命题（叫作支命题）之间的真假关系，因此也叫作真值联结词。自然语言中的联结词在意义方面往往不是完全严格确定的，有的是多义的。真值联结词是自然语言中的联结词的抽象，反映了复合命题与其支命题在真假方面的联系。真值联结词个数无穷，但相互之间不尽独立，可以取其中若干个为初始的联结词，其他真值联结词都可由它们表达出来。经常被用作初始联结词的有下列五个：→（否定），∧（合取），∨（析取），⊃（蕴涵），以及≡（等值）。

逻辑学家们为命题逻辑创制了多种证明方法，常见的有：自然推理系统、公理系统、后承演算和语义表列。本节的目的是引用斯穆里安的统一记号，以自然推理为主，对这些方法作一个简练而概括的综述。

员援员援公式和斯穆里安的统一记号

我们首先确定命题逻辑所使用的形式语言。我们选取的形式语言有下列三类初始符号：

（员）命题变项：责园，责贵，责圆，……。全体命题变项所组成的集合，记作孕，显然它是一个可数无穷集合。我们以责，择，则表示孕中任意元素。

（圆）真值联结词：→，∧，∨，⊃，≡。

（猿）括号：（,）。

由这些初始符号可以组成符号串，符号串就是由初始符号组成的有穷序列。我们仅对这些符号串的一部分感兴趣，这部分符号串由下面的定义员来确定。

定义员援所谓公式由下列递归规则给出：

（员）孕中的元素都是公式；

（圆）如果粤是公式，则→粤是公式；

（猿）如果粤，月是公式，则（粤∧月），（粤∨月），（粤⊃月）和（粤≡月）都是公式。

全体公式所组成的集合，记作 云 我们用正体大写的拉丁字母 粤， 月， 悦(或附加上、下标) 表示任意公式。粤， 月， 悦等可以是不同的或者相同的公式，但在同一个上下文中同一个 粤的不同出现必须表示同一个公式。在公式的概念下，我们有下面的唯一分解定理，其证明从略，但我们将常不加说明地引用。

唯一分解定理摇对任一公式 粤而言，下列条款 (员)， (圆)， (猿) 中有且只有一个成立：

(员) 粤是某个命题变项；

(圆) 有唯一的一个公式 月使得 粤为￢月；

(猿) 有唯一确定的两个公式 月和 悦， 以及四个联结词∧，∨，⊃和≡中唯一的一个 (记为 燥，使得 粤为 (月燥悦)，此时，燥叫作 粤的主联结词。

由此可知，每个公式有且仅有下列各种形式之一：责， ￢月， (月∧悦)，(月∨悦)，(月⊃悦) 和 (月≡悦)。所以，要想定义 云上的一个映射可以如下进行：

(员) 对各个命题变项赋值；

(圆) 假定已经对 月赋值，然后对￢月赋值；

(猿) 假定已经为 月和 悦赋值，然后对 (月∧悦)，(月∨悦)，(月⊃悦) 和 (月≡悦) 赋值。

这种定义方式，被称为公式上的归纳定义。下面的定义 圆就是利用这种定义方式作出的，以后使用这种方式时将不再一一申明。

定义 圆摇映射 杂遭定义如下：

(员) 杂遭(责) 越{责}；

(圆) 杂遭(￢月) 越{￢月}∪杂遭(月)；

(猿) 杂遭(月燥悦) 越{(月燥悦)}∪杂遭(月)∪杂遭(悦)，这里，燥∈{∧，∨，⊃，≡}。

映射 杂遭为各个公式 粤指定一个公式集 杂遭(粤)，杂遭(粤) 中的元素被称为 粤的子公式，不同于 粤的子公式，称为 粤的真子公式。

所谓一个公式的复杂度，是指符号￢，∧，∨，⊃和≡在其中出现的总次数。有关公式的一些性质，常常是施归纳于公式的复杂度上来证明的。能如此进行证明的根据，就在于公式 粤的真子公式的复杂度小于 粤的复杂度。

为读写公式方便起见，常采用一些省略括号的约定。首先，公式的最外层的括号可以省略。例如，((责∨择⊃(择≡则)可以简写成(责∨择⊃(择≡则。其次，括号也可以与方括号和波形括号结合使用。因此，公式((责∨择⊃((择∧则≡→择)可以更清楚地简写成(责∨择⊃〔(择∧则≡→择。此外，我们也经常采用优先性约定来省略括号。这种约定类似于书写数学公式时运算符号之间的优先性约定。例如，在代数学中乘法·优先于加法 垣，公式

(曾垣(赠 (扎垣(曾· 赠)))

可以简写成 曾垣赠 (扎垣曾· 赠。联结词之间的优先次序按→，∧，∨，⊃，≡的顺序排列，每个左方的联结词优先于右方的联结词。利用所有这些约定，我们可以将公式

(((责∧→择⊃((择∧→则∨责)≡(择∨(责∧则))

简写成

责∧→择⊃择∧→则∨责≡择∨责∧则

省略了所有的括号。当一联结词在一公式中同时有两个或更多个的出现时，我们仍用括号表明使用它们的先后次序。省略公式中的括号只是为了表达方便和看起来醒目，并不一定要按约定尽量省略括号，尤其在考虑公式的结构时不仅不能过多省略括号，而且还应当写出它原来的(未被简写的)形式。

下面，我们引入斯穆里安的统一记号：α甄公式和β甄公式。这种统一记号把一些同类讨论合并成一种情况，从而简化了许多有关命题逻辑系统的证明。斯穆里安的记号有带标识和不带标识两种说法，我们这里采用他的无标识说法。不过，我们在α甄公式的规定中作了一个小的变化，也就是将带有双重否定号的公式排除出α甄公式，而把公式(粤≡月)引进α甄公式。我们这样做是为了使α甄公式和β甄公式之间有某种共轭性质并能处理联结词≡。

α甄公式(及其成分$\alpha_{员}$，$\alpha_{圆}$)，β甄公式(及其成分$\beta_{员}$，$\beta_{圆}$)和它们的共轭$\overline{\alpha}$($\overline{\alpha_{员}}$，$\overline{\alpha_{圆}}$)，$\overline{\beta}$($\overline{\beta_{员}}$，$\overline{\beta_{圆}}$)，列表如下：

α	α员	α圆	$\overline{\alpha}$员	$\overline{\alpha}$圆	$\overline{\alpha}$
粤∧月	粤	月	¬粤	¬月	¬(粤∧月
¬(粤∨月	¬粤	¬月	粤	月	粤∨月
¬(粤⊃月	粤	¬月	¬粤	月	粤⊃月
粤≡月	粤⊃月	月⊃粤	¬(粤⊃月	¬(月⊃粤	¬(粤≡月
$\overline{\beta}$	β员	β圆	β员	β圆	β

摇摇

从表中可见，α型公式和β型公式有下述共轭性质：

$\alpha\neq\overline{\alpha}$，$\beta\neq\overline{\beta}$，$\alpha$越$\overline{\beta}$，$\beta$越$\overline{\alpha}$，

$\overline{\overline{\alpha}}$越$\alpha$，$\overline{\overline{\beta}}$越$\beta$，($\overline{\alpha}$)蚤越$\overline{\alpha}$蚤，($\overline{\beta}$)蚤越$\overline{\beta}$蚤；

这里，蚤越员，圆 公式上的归纳定义方法只消经过一定的变更，就可适用于统一记号，具体请参见下面的真值赋值定义。

员援圆援猿摇重言式和重言后承

字母表中的符号本身并无任何意义，只表示其自身。公式本身也无意义可言，只是一串符号。只有在给这些符号以一定的解释后，公式才有意义。所谓命题语义也就是命题逻辑中所使用符号的含义的解释，命题逻辑中公式的涵义总是相对于某一给定的命题语义的。

定义 员援猿摇一个真值赋值 σ(简称赋值) 就是为各个公式 粤指定一个真值 σ(粤 的映射，即从集合 云到集合 {圆 员} 的一个映射，它满足下述条件：

(员) 对各个命题变项 责，σ(¬责 越员$\Leftrightarrow\sigma$(责 越园；

(圆) σ(α) 越员$\Leftrightarrow\sigma$(α员) 越σ(α圆) 越员；

(猿) σ(β) 越员$\Leftrightarrow\sigma$(β员) 越员或 σ(β圆) 越员；

(源) 对任一个公式 月，σ(¬¬月 越员$\Leftrightarrow\sigma$(月 越员

这里，“$\Leftrightarrow$”读作“当且仅当”，下同，“σ(粤 越员”可以读作“σ使粤为真”或者“σ满足 粤”。由定义可知，关于真值联结词¬，∧，∨，⊃和≡，我们有

α(¬粤 越员$\Leftrightarrow\sigma$(粤 越园

α(粤∧月 越员$\Leftrightarrow\sigma$(粤 越σ(月 越员

α(粤∨月 越员$\Leftrightarrow\sigma$(粤 越员或 σ(月 越员

α(粤⊃月 越员$\Leftrightarrow\sigma$(粤 越园或 σ(月 越员

α(粤≡月 越员$\Leftrightarrow\sigma$(粤 越σ(月。

我们称从 孕(全体命题变项) 到 {园 员} 的映射为真值指派，每一个真

值赋值确定一个真值指派，另一方面，每一个真值指派也唯一确定一个真值赋值。因此，我们只消确定一个真值指派，也就确定了一个真值赋值。

定义 圆摇称一公式 粤为可满足的，仅当有一真值赋值使其为真。称一公式集 Γ 为可满足的，仅当有一真值赋值满足其中的所有公式。称一公式 粤为重言式，仅当它为任一真值赋值所满足，此时，记⊨粤 称一公式 粤为公式集 Γ 的重言后承，仅当满足 Γ 的真值赋值一定满足 粤，此时，记Γ⊨粤

给定一个公式，我们可以能行地决定它是否为一重言式，之所以能如此做是由于以下几点。首先，在任一真值赋值下，任一公式的真值取决于出现在其中的命题变项的真值。其次，当我们为有穷多个命题变项指定真值后，我们可以把这个有穷指派扩充成一个真值指派（例如，为其他命题变项都指定真值 园）。有了这两点，我们就有第三点：一公式不是重言式，当且仅当，我们能为出现在其中的命题变项指定某些真值而整个公式在此指派下取值为 园 由于出现在任一公式中的命题变项只能是有穷多个，为它们指定真值的可能也只能是有穷多种，因此我们可以能行地决定一公式是否为重言式。列出全部这样的可能并求出公式的真值的过程可以用真值表的方法表述出来。有关真值表方法的详细描述可以参看任何一本现代逻辑教科书，此处从略。不过，要提请注意的是，当所含命题变项个数相当大时，真值表方法也并不是一个很实用的方法。

真值表方法也可用来决定两个公式是否（语义）等值：粤(语义）等值 月当且仅当 粤≡月是重言式。

下面的定理叙述了重言后承关系的某些重要性质。定理中的 Γ，Δ 指任意公式集，“Δ∪{粤}⊨月” 将简记成 “Δ，粤⊨月”。

定理摇（重言后承关系的性质）

(员 粤⊨粤；

(圆 如果⊨粤 那么 Γ⊨粤；

(猿 如果 粤∈Γ，那么 Γ⊨粤；

(源 如果 Γ⊨粤并且 Γ⊆Δ，那么 Δ⊨粤；

(缘 如果 Γ⊨粤并且 粤⊨月 那么 Γ⊨月；

(远 如果 Γ⊨粤并且 Δ，粤⊨月 那么 Γ∪Δ⊨月；

(苑 如果 Γ∪{粤员，…，粤灶}⊨月并且对 藻越员，…，灶有 Γ⊨粤藻 那么 Γ⊨月；

(愿 Γ，粤⊨月⇔Γ⊨粤⊃月；（语义演绎定理）

(怨 ⊨粤⇒任一非空的Γ有Γ⊨粤；

(员园 如果⊨粤(责，那么⊨粤(月，这里粤(月是将责在粤中的每一出现都换成月的结果。(代入定理)

证明：这里只证明(怨和(员园，其余留给读者。

(怨 从左往右的方向恰好是(圆。至于另一方向，假定对任一非空的Γ有Γ⊨粤。取Γ为{→粤，则得→粤⊨粤。据(愿可得：

⊨→粤⊃粤

因而在任一真值赋值下都为真。所以，粤在任一真值赋值下都为真，即为⊨粤。

(员园 责只有在月中出现时才能在粤(月中出现。因此，任给一个真值赋值σ，在求出σ(月后作一个真值赋值σ忆，使σ忆除了对责指定σ(月为值外其余都跟σ相同。σ(粤(月))的求值过程完全跟σ忆(粤(责))的求值过程一样。由于有⊨粤(孕，故而有：

σ忆(粤(责)) 越员

从而又有：

σ(粤(月)) 越员

由σ的任意性就得，⊨粤(月。

员圆援陆摇基本定理

定义员援摇令悦是由一些公式集组成的类。称悦为协调类，仅当悦中各个公式集Γ符合下列条件：

(员 Γ不同时包含一个命题变项责及其否定→责；

(圆 如果α∈Γ，那么Γ∪{α员，α圆}∈悦；

(猿 如果β∈Γ，那么Γ∪{β员}∈悦或Γ∪{β圆}∈悦；

(源 如果→→粤∈Γ，那么Γ∪{粤}∈悦。

如果Γ∈悦当且仅当Γ的各个有穷子集都在悦中，则称悦为具有有穷性征的。

引理员援摇任一个协调类悦都可扩张成具有有穷性征的协调类。

证明：首先作一类悦忆

悦忆越{Γ：Γ是悦中某公式集的子集}，

易证，悦忆是包含 悦的一个协调类。这个类对于子集是封闭的，即，$\Gamma_{员} \in$ 悦忆且 $\Gamma_{圆} \subseteq \Gamma_{员} \Rightarrow$。$\Gamma_{圆} \in$ 悦忆 然后再作一个类 悦义

悦义越{Γ：Γ 的有穷子集都在 悦忆中} 。

同样易证，悦义是包含 悦忆(从而包含 悦) 的一个协调类。此外不难验证，悦义具有有穷性征。悦义即为所求。 证毕。

下面，我们先叙述选择公理的一个等价形式——栽燥则早引理，然后引用它建立引理 圆，最后证明命题逻辑的一个基本定理。

栽燥则早引理摇具有有穷性征的非空类有极大元。

引理 圆摇令 悦是一个具有有穷性征的协调类。那么 悦的任一个元素都可扩张成它的一个极大元。

证明：设 $\Gamma \in$ 悦。作一个类 阅：

阅越{Δ：$\Gamma \cup \Delta \in$ 悦} 。

可以验证，阅是具有有穷性征的非空类。由 栽燥则早引理可知，阅有一个极大元 $\Delta_{园}$。由于 $\Delta_{园} \in$ 阅，故而 $\Gamma \cup \Delta_{园} \in$ 悦。$\Gamma \cup \Delta_{园}$就是所要求的 悦的极大元。 证毕。

基本定理摇令 悦是一个协调类。如果 $\Gamma \in$ 悦，那么 Γ 是可满足的。

证明：设 $\Gamma \in$ 悦。据引理 员，悦可以扩张成一个具有有穷性征的协调类悦忆。显然 $\Gamma \in$ 悦忆。从而由引理 圆可知，悦忆有一个极大元 $\Delta \supseteq \Gamma$，利用 Δ，我们可以作出这样一个真值指派：当命题变项 责属于 Δ 时它为 责指定真值 员。这个真值指派确定了唯一的一个真值赋值 σ。σ 具有下述性质：

粤$\in \Delta \Rightarrow \sigma$(粤) 越员

这性质的证明可以如下进行。

当 粤为某个命题变项 责时，显然有 责$\in \Delta \Rightarrow \sigma$(责) 越员

当 粤为某个 α 鄄公式时，则有

$\alpha \in \Delta \Rightarrow \Delta \cup \{\alpha_{员}, \alpha_{圆}\} \in$ 悦 （定义 员圆）

$\Rightarrow \alpha_{员} \in \Delta$ 且 $\alpha_{圆} \in \Delta$ （Δ 原极大）

$\Rightarrow \sigma(\alpha_{员})$ 越σ $(\alpha_{圆})$ 越员 （归纳假设）

$\Rightarrow \sigma(\alpha_{员})$ 越员

当 粤为某个 β 鄄公式时，则有