新疆理论研究创新优秀学术成果选萃

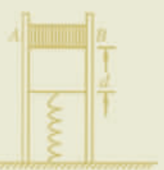
新疆物理奥林匹克竞赛特级教练主笔

新编 高中物理奥林匹克竞赛教程

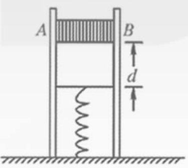
一年级（全一册）

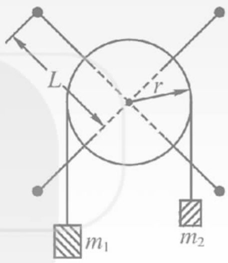
高兴玉 编著

XINBIAN
GAOZHONG WULI AOLINPIKE JINGSAI JIAOCHENG



新疆电子出版社


A
B
d


L
r
m_1
m_2


Q K
B
M
P
A C D E
F N

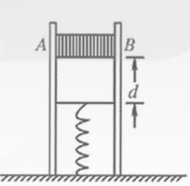
新疆理论研究创新优秀学术成果选萃

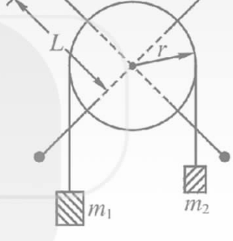
新疆物理学会奥林匹克竞赛高级、特级教练主笔

新编 高中物理奥林匹克竞赛教程

一年级（全一册）

编 著　高兴玉
编 委　庞增民
　　　托尔逊江·吐尔地





新疆电子出版社

责任编辑：于文胜　　庞增民
责任校对：庞　文
封面设计：李瑞芳

丛 书 名	新疆理论研究创新优秀学术成果选萃
本册书名	新编高中物理奥林匹克竞赛教程
作　　者	高兴玉
出　　版	新疆电子出版社
发　　行	新疆新华书店
印　　刷	兵团印刷厂
开　　本	787×1092 毫米　1/16
印　　张	20
字　　数	499千字
版　　次	2006年 1 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7-900328-88-2
定　　价	36.00 元（本版 CD）

前　言

一年一度的全国物理奥赛对于激发中学生对物理学科的热爱和学习兴趣，培养思维能力，“培养学科素养，科学选拔人才”提供了宽广的舞台。已成为物理基础教育的重要组成部分和一项重要内容。特别是全国竞赛获省级赛区一等奖及以上者可直接保送重点大学的选拔制度接轨，更加受到高中中学生、教师及家长们的高度重视。

为配合中学生参加全国物理奥赛，向读者提供可读性强、有参赛实用价值的学习指导材料，本书作者根据辅导奥赛的讲义稿及多年广泛收集的资料结合新的竞赛大纲精心编写成的。本书通过对知识要点系统性阐述，选题典型性及启发性结合，并给出了多种思维方法，设计了许多新题型，使读者耳目一新，对于经典题型给出了新的解法，设有一题多解栏目等。

考虑到全国物理竞赛分初赛、复赛和决赛模式，编写中注意到了试题梯度和难度。本书还注意到高考到竞赛的联接。本书即具有竞赛指导作用又具有题典功能。相信通过使用本书，能够提高分析问题和灵活应用知识解决实际问题能力，达到提高竞赛成绩的目的。

本书可供高中学生、中学物理教师和物理爱好者使用，也可供物理爱好者及教研人员参考。

考虑到师生手中竞赛辅导资料较为缺乏，故本书选择例题较多，类型全面，解法多种。如与编者编写的《高中物理奥林匹克竞赛习题及其解答》配合使用效果更佳。

由于笔者的水平有限，难免存在一些疏漏和错误，恳请读者批评指正。

编　者

2005 年 10 月

目　　录

第一章　运 动 学

第一节　质点运动的基本概念

一、参照系与坐标系

质点运动学研究质点的运动状态随时间变化的规律．为定量描述质点位置和速度等量，必须选择适当的参照物并在参照物上设置坐标系．在直角坐标系中位置矢量(简称位矢)$\vec{r}$ 定义为：自坐标原点到 $p\,(x\,,y\,,z\,)$所引的有向线段，其运动方程为$\vec{r}(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$．若质点沿直线运动则只须$x=x(t)$；当质点在平面上运动时则须$x=x(t)$，$y=y(t)$．若把方程中的$t$消去就得质点运动的轨迹方程．

二、平均速度、平均速率、即时速度、即时速率

平均速度是质点在一段时间内通过位移和时间的比$\overline{V}=\Delta x/\Delta t$，是矢量；而平均速率是路程与时间的比值，是标量．即时速度(简称速度)是质点在某一时刻或某一位置时的速度，它的定义是$\Delta t\to 0$时的平均速度的极限．速度的大小叫速率．

三、加速度

加速度是描写速度变化快慢的物理量、等于速度对时间的变化率$a=\Delta V/\Delta t$即为平均加速度；当$\Delta t\to 0$的极限值为即时加速度简称加速度，是矢量．

四、匀变速直线运动

质点沿x轴作直线运动时其运动形式方程为$x=x(t)$，$V=V(t)$．对于匀变速直线运动a为常量、其运动规律 $x=x_0+V_0t+\frac{1}{2}at^2$　$V_t=V_0+at$ 两式消去t得 $V_t{}^2=V_0{}^2+2a(x-x_0)$．

五、本节应用举例

例 1　已知某质点的运动方程为$x=t^2+6\,(\mathrm{m})$，求瞬时速度和加速度．

解　$\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)=(t+\Delta t)^2+6-(t^2+6)=2t\Delta t+\Delta t^2$，$\Delta x/\Delta t=2t+\Delta t$

当$\Delta t\to 0$时，$V=2t\,\mathrm{m/s}$即为所求的瞬时速度．

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{2(t+\Delta t)-2t}{\Delta t}=\frac{2\Delta t}{\Delta t}=2$$

当$\Delta t\to 0$时，$a=2\,\mathrm{m/s^2}$即为所求的加速度．

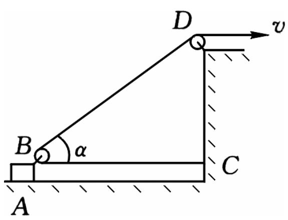


图 1-1-1

例 2　图 1-1-1 所示，物体A置于水平面上，A前固定一滑轮B，高台上有一定滑轮D，一根轻绳的一端固定在C点，再绕过B、D，BC段水平，当以恒定水平速度V拉绳的自由端时，A沿水平面前进，

求当跨过B的两段绳的夹角为α时，A的运动速度．

思路：要确定某时刻两点间瞬时速度的关系，通常先分析Δt内两点的位移情况，然后利用瞬时速度公式求解．

解法 1 设Δt时间物体从A运动到A'如图 1-1-2 使$DE = DB'$则绳子的自由端运动的距离$s = BE + BB'$，当$\Delta t \to 0$可认为$EB' \perp BD$．

因此有 $$s = BB'\cos\alpha + BB' = BB'(1+\cos\alpha)\text{，}$$

而 $$V_A = \lim_{\Delta t \to o} \frac{BB'}{\Delta t}\text{，}V = \lim_{\Delta t \to o} \frac{s}{\Delta t}$$

故 $$V = V_A(1+\cos\alpha)$$

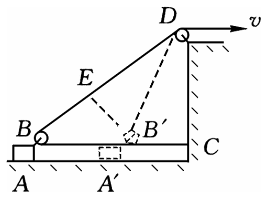


图 1-1-2

解法 2 从能的角度，拉自由端输入能量的瞬时功率P_1，通过定滑轮D，作用于物体对应的瞬时功率为P_2，由于定滑轮不损失功，则$P_1 = P_2$，设作用于D点的拉力为F则

$$P_1 = FV \qquad P_2 = FV_A + FV_A\cos\alpha$$

由此得 $$V_A = V/(1+\cos\alpha)$$

例 3 A、B两站相距s，将其分成相等的n段，汽车无初速由A站出发向B站做加速直线运动．第一段的加速度为a，当汽车达到每一等份的末端时其加速度增加a/n，求汽车的加速度．

解法 1 设汽车达每一位置时的速度分别为V_1、$V_2 \cdots V_n$则

$$V_1^{\ 2} - V_0^{\ 2} = 2a\frac{s}{n}\text{，}V_2^{\ 2} - V_1^{\ 2} = 2a(1+\frac{1}{n})\frac{s}{n} \ \cdots\ V_n^{\ 2} - V_{n-1}^{\ 2} = 2a(1+\frac{n-1}{n})\frac{s}{n}$$

以上各式相加得 $$V_n^{\ 2} = \frac{2as}{n}[1+(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{2}{n})+\cdots(1+\frac{n-1}{n})]$$

故 $$V_B = V_n = \sqrt{as(3n-1)/n}$$

解法 2 设汽车在第一段的加速度$a_1 = a$，第n段的加速度为$a_n = a + \dfrac{n-1}{n}a$则全程的平均加速度 $\bar{a} = \dfrac{1}{2}(a_1 + a_n) = \dfrac{3n-1}{2n}a$，根据$V_t^{\ 2} - V_0^{\ 2} = 2\bar{a}s$可得汽车达 B 时的速度

$$V_B = \sqrt{2s\bar{a}} = \sqrt{(3n-1)as/n}$$

例 4 一个学生的学校位于环形地铁的一个站附近，他的住处在城市的另一端靠近该环形地铁的另一个站．这样，他可以乘坐任何一个方向的地铁去上学．所以，他总是哪个方向先来车就坐那辆车．但是学生注意到，他常常乘坐的车都是顺时针方向开来的列车．如何解释这一现象？

解 以T表示开往同一方向的两列火车之间的时间间隔，如果顺时针方向开出的列车与最近一列逆时针方向开来的列车之间的时间间隔等于t的话，那么逆时针方向开出的列车与顺时针方向开来的列车之间经过的时间就是$T-t$．如果$t < T/2$，则$T-t > t$，该学生在$T-t$时间内赶乘列车的概率大于在t时间内赶乘的概率．很明显，前者是后者的$(T-t)/t$倍．所以该生经常乘坐的是顺时针方向的列车．

例 5 摄制电影时，为了拍摄下落物体的特写镜头，做了个线度为实物的$1/49$的模型．放电影时，走片速度每秒24张，为了使画面逼真，拍摄时走片速度应为多大？模型的运动速度应为实物的多少倍？

解 设实物在时间t内下落h的高度，模型用时t_0，下落高度h_0，则由自由落体公式

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \text{，} h_0 = \frac{1}{2}gt_0^2 \quad \text{又} h : h_0 = 1:49$$

故 $$t_0 = t/7$$

可见放电影时应将模型运动的时间“放大”7倍，才能使人们看电影时观赏到逼真的画面．为此，在拍摄电影时，拍摄的走片速度应为放映时走片速度的7倍．这样才可使对应于模型运动时间t_0而放映时间却为$7t_0$．故得拍片时走片速度为24张/秒$\times 7 = 168$张/秒

又设实物在某段时间Δt内以速度V通过位移ΔS，而模型与之对应的量则分别是时间Δt_0、速度V_0、位移ΔS_0由于有

$$\Delta t_0 = \Delta t/7 \qquad \Delta S_0 = \Delta S/49$$

故得模型运动速度V_0与实物运动速度V之比$\dfrac{V_0}{V} = \dfrac{\Delta S_0}{\Delta t_0} \div \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{1}{7}$

即模型运动速度应为实物运动速度的$1/7$．

例6 如图1-1-3所示，一质点自倾角为 α 的斜面上方定点A，沿光滑斜槽从静止开始下滑，为了使质点在最短时间内到达斜面．求斜槽与竖直方向的夹角β应等于多少？

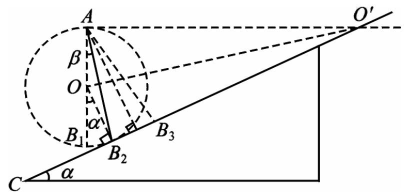


图1-1-3

解法1 质点沿AB_2下滑的加速度为$a = g\cos\beta$，设A到斜面的距离为h

则 $$AB_2 = \frac{h \cdot \cos\alpha}{\cos(\beta - \alpha)}$$

由 $$S = \frac{1}{2}at^2 \text{得} t^2 = \frac{2h \cdot \cos\alpha}{g \cdot \cos\beta \cdot \cos(\beta - \alpha)} = \frac{4h \cdot \cos\alpha}{g[\cos(2\beta - \alpha) + \cos\alpha]}$$

当$\cos(2\beta - \alpha)$即$\beta = \alpha/2$时，质点滑到斜面所用时间最短．

解法 2 为画出一竖直圆通过起点A且与不同终点B_1、B_2、$\cdots$ 的连线相切．可先通过A点作一水平线与斜边延长线交于O'，然后作$\angle AO'C$的平分线交过A的竖直线O．再以O为圆心，以OA为半径画圆．

可看出：从A运动到圆周与斜面的切点B_2所用时间最短．又因为等腰ΔOAB_2，α为外角

故 $\alpha = 2\beta$，所以$\beta = \alpha/2$．

说明：自由弦定理：物体自静止开始，无摩擦地自圆环最高点沿不同弦运动到圆周上或从圆周上沿不同的弦运动到圆周上最低点，所用时间相等，等于沿竖直直径下落经过的时间．可见，时间与弦的倾角及弦长无关．应用时关键是准确作圆．该圆的特点是：一定通过运动的起点和终点；一定与不定点连线相切；起点一定时与不同终点连线相切．

例7 如图1-1-4所示为两个光滑斜面，两斜面高度相同，且$AB + BC = A'B'$．今让小球分别从斜面(a)的A点和斜面(b)的A'点无初速释放，若不计小球在B点损失的能量，试问哪种情况下，小球滑至斜面底端历时较短？

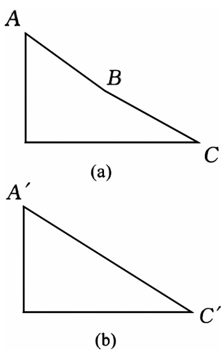


图1-1-4

解法1 由能量守恒知球达C和C'的速率相等，分别做出它们的$V \sim t$图其中直线对应$A'C'$上的运动情况，要使图线和t轴所围的面积相等，只有使$t < t'$，即小球在ABC段上运动所需时间较短，如图1-1-5所示．

解法 2 (极限法)设斜面高为h，斜面长L且令$\theta=0^{\circ}$见图 1 - 1 - 6，在图中物先自由下落h，然后水平向右匀速通过距离$h-L$，所用的总时间为

$$t=\frac{2h}{\sqrt{2gh}}+\frac{L-h}{\sqrt{2gh}}=\frac{L+h}{\sqrt{2gh}}$$

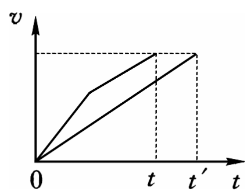


图 1 - 1 - 5

而在(b)图中，物体运动时间 $t'=\dfrac{2L}{\sqrt{2aL}}=\dfrac{2L}{\sqrt{2gL\cos\theta}}=\dfrac{2L}{\sqrt{2gh}}$，

所以 $t<t'$

解法 3 用比较两段的平均速度的大小(略)

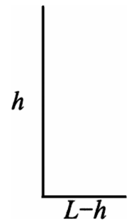


图 1 - 1 - 6

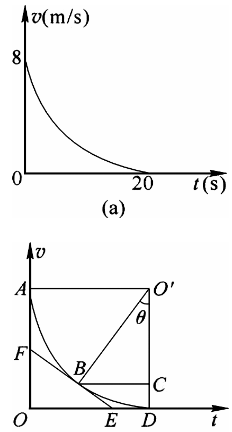
例 8 质点沿直线运动，其速度随时间变化的关系图像恰好是与坐标轴相切的四分之圆弧如图 1 - 1 - 7 (a) 所示．求质点在 20 秒内的位移s和质点在10秒末的加速度a．

解 物体在 20 s 内的位移是速度图线与两坐标轴围成的图形面积． 但在数值计算时，应注意图中弧的半径 R 在表示速度和表示时间方面所代表的数值不一样．若仅从图形考虑，则

$$s=R^2-\pi R^2/4\text{．}$$

考虑到物理意义，则

$$s=8\times 20-\pi\times 20\times 80/4=34.4\,(\text{m})$$



(a)

(b)

图 1 - 1 - 7

图 1 - 1 - 7(b) 所示，若仅从过10 s 对应的圆弧上的B点作切线FE，设圆弧半径为R，图形方面考虑，易得$\sin\theta=BC/O'B=(R/2)/R=1/2$，

所以 $\theta=30^{\circ}$

由图中几何关系还可知到 $\Delta EOF\backsim\Delta O'CB$， 故

$\tan\theta=BC/O'C=OF/OE$，若结合图形的物理意义，显然BC和OF 表示的是速度，$O'C$和OE则表示的是时间，故

$$a=\frac{BC}{O'C}=\frac{(R/2)\cdot(R/8)}{R\cos30^{0}(20/R)}=\frac{2\sqrt{3}}{15}\quad(\text{m}/\text{s}^2)$$

例 9 蚂蚁离开巢沿直线爬行，它的速度与到蚁巢中心的距离成反比．当蚂蚁爬到距巢中心$L_1=1\,\text{m}$的A点处时，速度是$V_1=2\,\text{cm/s}$．试问蚂蚁从A点爬到距巢中心$L_2=2\,\text{m}$的B点需要多长时间？

分析：一是可用小变量分析法(微元法)将AB分成很小的n等份，则在任意一等份内蚂蚁的运动可看成匀速运动．但在各等份中运动的速度并不相等，将蚂蚁经过各等份所用时间加起来．另一种思考可作$1/V\sim x$图像巧解．

解法 1 如图 1 - 1 - 8 ，O为蚁巢中心，向右为正方向．则坐标x处蚂蚁的速度$V=k/x$．当 $x=L_1$时，$V=V_1$ 则$0.02=k/1$得$k=0.02$

所以 $V=\dfrac{0.02}{x}$ 即$\dfrac{1}{V}=50x$

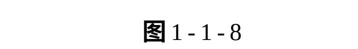


图 1 - 1 - 8

当$x=L_2$时$V_2=0.02/2=0.01$ (m/s)，将AB分成n等份，

每段长为$\Delta x=(L_2-L_1)/n$．对应的速度为V_1，V_1'，V_2' $\cdots$ V_{n-1}'，V_2．当n很大时，每小段

运动可看成匀速运动，由 A 到 B 所需的总时间为

$$T=\frac{\Delta x}{V_1}+\frac{\Delta x}{V_1'}+\cdots+\frac{\Delta x}{V_{n-1}'}$$

注意到 $\{1/V\}$ 是一等差数列　$T=\frac{L_2-L_1}{n}\cdot(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_{n-1}'})n/2=\frac{L_2-L_1}{2}(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_{n-1}})$

当 $n\to\infty$ 时，$V_{n-1}'\approx V_2$，即 $T=(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2})(L_2-L_1)/2$

代入数据得　$T=75\ \mathrm{s}$

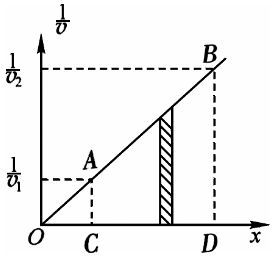


图 1-1-9

解法 2　因蚂蚁的运动的速度 V 与蚂蚁离巢的距离成反比，故 $1/V$ 与 x 成正比，做出 $1/V\sim x$ 图像如图 1-1-9 图示为一条过原点的直线，图 $ABCD$ 中所围的面积即为所求时间

$$T=\frac{(1/V_1+1/V_2)(L_2-L_1)}{2}=75\ \mathrm{s}$$

例 10　一只蟑螂和两只甲虫在一水平大桌面上爬行，每只甲虫的速度都能达到 $V=1\,\mathrm{cm/s}$．开始时这些虫子恰位于一个等边三角形的三个顶点上．问蟑螂应具有什么样的速度，才能在两只甲虫任意移动的情况之下仍能保持三者分别位于一等边三角形的三个顶点上？

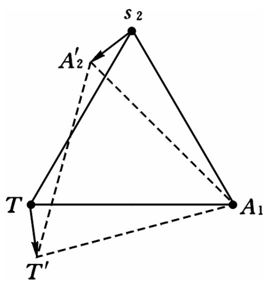


图 1-1-10

解　假设在一段很短的时间间隔 Δt 内，第一只甲虫爬 $s_1=V_1\Delta t$ 的距离，而第二只甲虫则了 $s_2=V_2\Delta t$ 的距离．为求蟑螂应该怎样移动才能保证它们移动后所处的位置能连成一个等边三角形，可以先假设第一只甲虫不动，而第二只甲虫爬了 s_2 的距离．由图 1-1-10 可见，为使三角形 $A_1A_2'T'$ 为等边三角形，蟑螂应移动距离 $\overline{TT'}=s_2=V_2\Delta t$．

现在再假定第二只甲虫不动，而第一只甲虫爬 s_1 的距离，那么此蟑螂应移动一个距离 $\overline{T'T''}=s_1=V_1\Delta t$

如果第一只甲虫移动了距离 s_1，第二只甲虫同时移动了距离 s_2，则蟑螂移动的距离应为前述两对应位移 $\overrightarrow{TT'}$ 和 $\overrightarrow{T'T''}$ 的矢量和，即为 $\overrightarrow{TT''}=\overrightarrow{TT'}+\overrightarrow{T'T''}$．由图 1-1-11 所示的矢量三角形中可以看到

$$|\overrightarrow{TT''}|\le|\overrightarrow{TT'}|+|\overrightarrow{T'T''}|$$

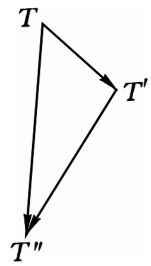


图 1-1-11

从上式可知蟑螂的速度 V_0 的大小应该满足

$$V_0=|\overrightarrow{TT''}|/\Delta t\le V_1+V_2=2V=2\,\mathrm{cm/s}$$

质点运动时，若同时受到几个互相独立因素的作用，这几个因素独立作用于质点时都可以使质点产生一个相应的运动，则此质点的运动可以看成是由这几个独立进行的运动的叠加而成，这就是运动的独立性原理或称为运动的叠加原理．这几个独立的运动称为分运动，而它们的叠加结果就是合运动．

第二节 运动的合成与分解

一、矢量与标量

即有大小又有方向的量称为矢量．例如力、速度、位移等．矢量的合成或分解遵守平行四边形定则或三角形定则．求多个矢量和可用多边形法则．一般可用正交分解法．

只有大小没有方向的量称为标量．如时间、长度、路程等．

二、运动合成法则

运动的合成包括位移、速度和加速度的合成遵守矢量合成法则．通常我们把质点对地或对地面上静止物体的运动称为绝对运动．质点对运动参照系的运动称为相对运动．而参照系对地的运动称为牵连运动．以速度为例这三种速度的关系：绝对速度＝相对速度＋牵连速度，即

$$\vec{V}_{甲对乙}=\vec{V}_{甲对丙}+\vec{V}_{丙对乙} \qquad (位移、加速度也满足此类关系)$$

说明：(1)合速度的前角与第一分速度前脚相同，合速度的后脚标和最后一个分速度的后脚标相同；(2)前面一个分速度的后标和相邻的后面一个分速度的前标相同；(3)所有分速度都用矢量合成法相加；(4)速度的前后脚标对调，改变符号．

例 骑自行车的人以 4m/s 的速度向东行驶，感觉风从正南吹来，当车速为6 m/s 时，感觉风从东南吹来，求风速．

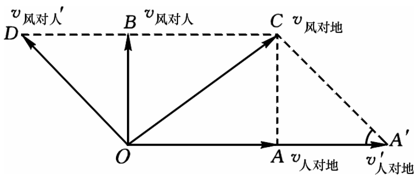


图 1 - 2 - 1

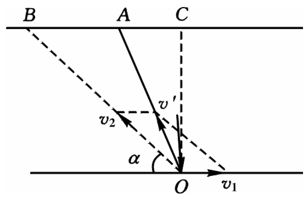


图 1 - 2 - 2

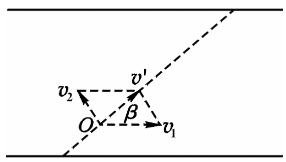


图 1 - 2 - 3

解 根据速度合成法则，由前后两次人相对地的速度V，V'及风对人的速度u作平行四边形如图 1 - 2 - 1 则有

$$V_1=\sqrt{u^2+(V-V')^2}=\sqrt{4^2+(6-4)^2}=5.4 \quad (\text{m/s})$$

设风对地的方向与东向北成α，则$\tan\alpha=2/4=0.5$，故$\alpha=26.6^{\circ}$．

三、过河问题

渡河时，船参与两个运动，船对岸是水对岸与船对水的运动的合运动如图 1 - 2 - 2 及 1 - 2 - 3．由于合运动和分运具有等时性，则

(1)过河时间：$$t=\frac{OB}{V_2}=\frac{OA}{V'}=\frac{AB}{V_1}=\frac{d}{V_2\cdot\sin\alpha}$$

当$\alpha=90^{\circ}$时过河时间最短．

(2)最小过河位移：分两种情况当①$V_2>V_1$时，当$\cos\alpha=V_1/V_2$时过河位移最小$S_{小}=d$．(河宽)；但过河时间较长$t=d/\sqrt{V_2^{\,2}-V_1^{\,2}}$；

②当$V_1>V_2$时，当$\cos\alpha=V_2/V_1$时，过河位移最小$S_{小}=d/\cos\alpha=V_1 d/V_2$．

例如：河宽 d 船从 O 点过河，下游 s 距离的对岸 A 点为瀑布，为使船安全过河抵达对岸，船速 V_2 的最小值是多少？

解　$V_2 = V_1 \sin\alpha = V_1\, d / \sqrt{d^2 + s^2}$　船的指向由 $\tan\alpha = \cot\beta = \sqrt{{V_1}^2 - {V_2}^2} / V_2$

四、物系相关速度

正确分析物体(质点)的运动，除可以用运动的合成知识外，还可充分利用物系相关速度之间的关系简捷求解．以下结论在解题中十分有用：

(1) 刚性杆、绳上各点在同一时刻具有相同的沿杆、绳的分速度；

(2) 接触物系在接触面法线方向的分速度相同，切向分速度在无相对滑动时亦同；

(3) 线性交叉物系交叉点的速度是相交物系双方沿双方切向运动分速度的矢量和．

例如：绳索拉物体如图 1-2-4，当绳端在做即不沿绳又不垂直于绳方向的运动时，一般要将端点的运动分解为沿绳的方向和垂直于沿绳方向两个分运动有　$V_B \cos\alpha = V$

故　$V_B = V / \cos\alpha$

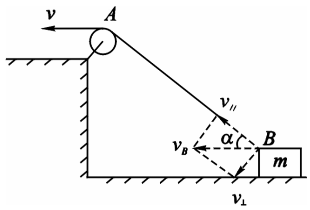


图 1-2-4

说明：推上式也可用小变量分析法．

例　如图 1-2-5 的系统中 A_1 和 A_2 两物均有向下的速度 V_A，吊住 B 物体的两根绳与竖直方向的夹角都是 α，求 B 物体上升的速度．

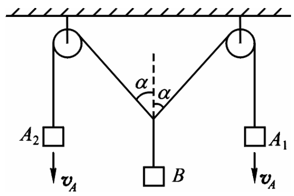


图 1-2-5

解法 1　(微元法)由于对称性，只考虑 B 与 A_1 的速度关系即可，如图 1-2-6 所示．设 B 原点在 O 点，经 Δt 达 P 点．过 P 点作 OQ 的垂线 PR．因 OP 很短，所以可设 $QP = QR$ 图中 $\Delta L = OR$ 是物体 A_1 在 Δt 时间内下降的距离，$\Delta H = OP$ 是 B 物体在 Δt 时间内上升的距离．因 A_1 下降的速度 $V_A = \Delta L / \Delta t$，$B$ 上升的速度 $V_B = \Delta H / \Delta t$，而 $\Delta L = \Delta H \cos\alpha$

所以　$V_B = V_A \cos\alpha$

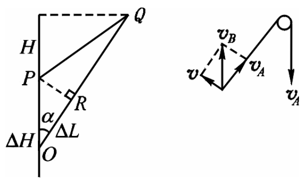


图 1-2-6

解法 2　用绳端速度分解法求解．B 物体竖直向上的速度 V_B 可分解沿绳方向的速度 V_A(这个速度就是 A_1 物下降的速度)和垂直于绳子方向的分速度 V(这个速度使绳子以右边的滑轮为中心发生转动)即可直接得出　$V_B = V_A \cos\alpha$

再例：如图 1-2-7 的系统中，杆 AB 沿墙滑下，A、B 二端的速度也是两个相关速度．求 V_A 与 V_B 的关系．

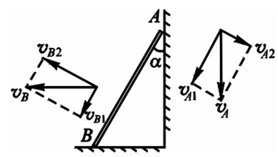


图 1-2-7

解　将 V_A，V_B 分解成沿杆和垂直杆的分速度

$$V_{A1} = V_A \cos\alpha\,,\quad V_{B1} = V_B \sin\alpha$$

由于杆的长度不会变化，所以 $V_{A1} = V_{B1}$ 即有

$$V_A \cos\alpha = V_B \sin\alpha$$

两杆交点的运动：两杆的交点同时参与了两杆的运动．而且相对每一根杆还有自己的运动，因而是一种比较复杂的运动．

如图 1-2-8 直线 l_1 以大小为 V_1 的速度沿垂直 l_1 的方向移动，而直线 l_2 以大小为 V_2 的速度沿垂直于 l_2 的方向移动，两直线夹角为 θ．求它们交点 O 的速度．

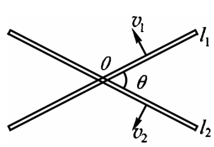


图 1-2-8

解法 1　作出直线运动速度V_1、V_2沿双方切向分速度的矢量图如图 1-2-9 所示则

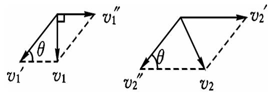


图 1-2-9

$V_1'=V_1/\sin\alpha$，　$V_2'=V_2/\sin\alpha$ 将这两个速度合成可得O点的合速度

$$V=\sqrt{V_1'^2+V_2'^2-2V_1'V_2'\cdot\cos(180^0-\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{V_1^{\ 2}+V_2^{\ 2}+2V_1V_2\cdot\cos\theta}$$

说明：若l_1直线不动，当直线l_2垂直于杆运动时交点O移动速度$V_1'=V_1/\sin\alpha$，方向沿L_1杆．同理V_2'也有相同的物理意义．故当两杆一起运动时，O点的速度可以看成两速度V_1'、V_2'的合成．这就是交叉点的速度可以看成是相交物系双方沿对方切线运分速的矢量和的原因所在．

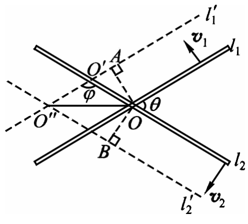


图 1-2-10

解法 2　如图 1-2-10 经过Δt之后l_1移到l_1'位置，l_2移到l_2'位置，l_1'与l_2'相交于O''．

则　$$O'O''=\frac{V_2\Delta t}{\sin\theta}\ ，\ OO'=\frac{V_1\Delta t}{\sin\theta}$$

$$OO''=\sqrt{O'O''^2+OO'^2-2\cdot OO'\cdot O'O''\cos\varphi}=\sqrt{V_1^{\ 2}+V_2^{\ 2}+2V_1V_2\cos\theta}\cdot\frac{\Delta t}{\sin\theta}$$

当$\Delta t\to 0$时 $V=\dfrac{OO'}{\Delta t}=\dfrac{1}{\sin\theta}\sqrt{V_1^{\ 2}+V_2^{\ 2}+2V_1V_2\cos\theta}$．

因为Δt可以取得无限小，因此上述讨论与V_1，V_2是否为常量无关．如果V_1、V_2是变量上述表达式仍然可以表达二杆交点某一时刻的即时速度．

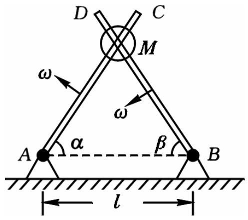


图 1-2-11

例　如图 1-2-11 中的AB、CD两杆均以角速度ω绕A、B两固定轴在同一竖直面内转动，转动方的如图．当$t=0$时$\alpha=\beta=60^{\circ}$．试求t时刻两棒交点M的速度和加速度．

解　$t=0$时ΔABM为等边三角形，因此$AM=l$．它的外接圆半径$R=OM=l/\sqrt{3}$．如图 1-2-12 所示．二杆旋转过程中，α角增大的角度一直等于β角减小的角度．所以M角的大小始终不变(等于60°)，因此M点既不能偏向圆内，也不能偏向圆外，只能沿着圆周移动．因$\angle MOM'$和$\angle MAM'$是对着同一段圆弧的圆心角和圆周角．于是有$\angle MOM'=2\angle MAM'$即M以2ω的角速度绕O点做匀速圆周运动，任意时刻t的速度大小恒定为

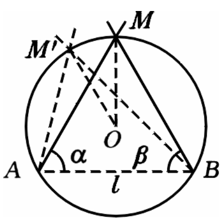


图 1-2-12

$$V=R\cdot 2\omega=(2\sqrt{3}\omega l)/3$$

向心加速度的大小恒定为$a=(2\omega)^2R=4\sqrt{3}\omega^2 l/3$

五、相对运动及参照物的选取问题

运动是绝对的但描述运动是相对的，因此在讨论一个运动时，必须选定适当的参照系．在一般情况下，人们总是习惯于将地面作为参照系．但有些问题选择其它物体作为参照系(即选相对地运动的物体为参照系)可使问题简化．

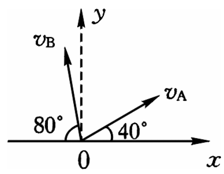


图 1-2-13

例　如图 1-2-13 所示，在同一地点斜抛出两个质点，$V_A=20\,\text{m/s}$，$V_B=10\,\text{m/s}$，则 1 秒未两质点相距多远？

解　若取一自由落体的物体为参照系(或取A和B其中一个为参照物也

可)，则A、B质点均做匀速直线运动，于是

$$S_{AB}=\sqrt{10^2+20^2-2\cdot 10\cdot 20\cdot\cos 60^0}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}\,(\mathrm{m})$$

例 1 一升降机以加速度a沿竖直方向上升．在升降机天花板上有一螺钉某时从天花板上松落．升降机的天花板与其地板间距为L，试求螺钉从天花板落到升降机底板所用时间．

解 以升降机为参照物，则螺钉相对升降机做$V_0=0$，加速度为$g+a$向下的匀加速直线运动，由位移公式得 $t=\sqrt{2L/(g+a)}$

例 2 在光滑的水平面上有两个半径均为R的小球A和B，质量分别为m和$2m$．当两球球心距离大于l（l比$2R$大得多)时，两球间无作用力；当两球心间距等于或小于l时，两球间存在了相互作用力F (恒为斥力)．设A球从远离B球以速度V_0沿两球心线向原来静止的B球运动如图 1 - 2 - 14 所示，欲使两球不发生接触，V_0应满足什么条件？

解 当A、B两球距离等于或小于l时，A球减速运动加速度$a_A=F/m$．B球作初速度为零的匀加速直线运动加速度为$a_B=F/2m$．现取B为参照物，A相对B的加速度

$$a=a_A+a_B,$$

由匀变速直线运动公式 $0^2=V_0'-2as$；又$s=l-2R$

得 $V_0'=\sqrt{3F(L-2R)/m}$

故V_0应满足的条件是 $V_0\le\sqrt{3F(L-2R)/m}$

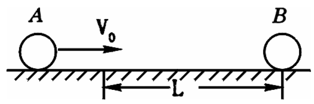


图 1 - 2 - 14

例3 在空间某一点D向三维空间的各个方向以相同的速率V_0射出很多小球．求(1)t秒后这些小球中离得最远的两小球之间的距离是多少？(2)证明这些小球在下落过程中始终保持在同一球面上．并求出球面半径与球心位置随时的变化规律(不计空气阻力)．

解 (1)取一个在小球射出的同时开始自O点自由下落的参照系．所有的小球都始终在以O点为球心的球面上，球的半径为V_0t，那么离得最远的两球之间的距离自然是球的直径$2V_0t$．

(2)以抛出点为坐标原点，初位置为$O\,(0,0,0)$，初速度V_0的三个分量为(V_{0x},V_{0y},V_{0z})．取任一小球在x、y方向上做匀速直线运动；在z轴方向作$a=-g$的匀变速直线运动，故该球的运动方程为：

$$\begin{cases}x=V_{0x}t\\y=V_{0y}t\\z=V_{0z}t-gt^2/2\end{cases}$$

由此可得$x^2+y^2+(z+gt^2/2)^2=(V_{0z}t)^2=R^2$．式中$V_0$为任一球的初速度与抛射角无关．对于每一个给定时间$t$，上述方程是一个球面方程．对于其它球面都满足同样的方程．所以在任何时刻所有的球都分布在同一球面上．

由球面方程可知，球面的半径$R=V_0t$将随时间成正比地不断增大．球心的位置为$O\,(0,0,-gt^2/2)$表明球心位置始终保持在z轴上且随时间以重力加速度g加速下降．

例4 一些很小的球从竖直对称轴附近,、高度$H=R/8$处，无初速度自由落下．碰到半径为R的凹形球面上，小球与球面的碰撞是完全弹性的，试证明在第一次碰撞后，每个小球都落在球面的最低点(小球间不发生碰撞)．

分析：小球碰撞后作抛体运动，较为复杂．若此时开始取自由落体参照系，则每个小球都做匀速运动．而小球都是从竖直对称轴附近下落的，故可作光学类比，相当于近轴平行光线经凹面镜反射后，都交于焦点即球面的最底点的竖直正方$R/2$处．只要证明经过相同的时间凹面镜在自由落体