College 高等学校经典教材配套辅导丛书

微积分

辅导及习题精解

同济二版

下册

滕兴虎 吴 红 廖洪林 滕加俊 编著

◆ 名师执笔 ◆ 精准解答

◆ 知识归纳 ◆ 习题全解 ◆ 经典考题

陕西师范大学出版社

图书代号:JF5N0967

图书在版编目(CIP)数据

微积分辅导及习题精解(上、下册)/滕加俊,滕兴虎,廖洪林 编著. —西安:陕西师范大学出版社,2005.2

(高等学校经典教材配套辅导丛书)

ISBN 7-5613-3278-5/O·83

Ⅰ.微… Ⅱ.①滕…②滕…③廖… Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 007323 号

责任编辑 史 进
装帧设计 王静婧
出版发行 陕西师范大学出版社
社　　址 西安市陕西师范大 120#(邮政编码:710062)
网　　址 http://www.snuph.com
经　　销 新华书店
印　　刷 南京人民印刷厂
开　　本 850×1168 1/32
印　　张 42.875
字　　数 850 千
版　　次 2005 年 10 月第 1 版
印　　次 2005 年 10 月第 1 次印刷
定　　价 49.00 元(上册 24.50 元,下册 24.50 元)

开户行:光大银行西安南郊支行　账号:0303070-00330004695

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)85307864　85233753　85251046(传真)

E-mail:if-centre@snuph.com

前 言

《微积分》作为高等数学的重要组成部分，是理工科学生必修的一门重要基础课，也是许多专业研究生入学考试的必考科目。微积分中的概念复杂多样，从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分，形成了一个无比精美的庞大系统，这个系统不仅内容丰富，更重要的是结构严密，无懈可击。作为进入大学阶段学习的第一门高等数学课程，许多同学在学习过程中感到微积分抽象、难懂，对基本概念以及定理结论在理解上感到困难，具体解题时，缺乏思路，难以下手。为了帮助广大同学更好地掌握微积分的基本概念和基本理论，综合运用各种解题的技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们根据同济大学应用数学系编写的《微积分》编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 主要概念及公式：列出相应各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握和理解的核心内容。

2. 重点难点解答：列出相应各章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出相应的解释说明，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻。

3. 课后习题全解：教材中课后习题丰富、层次多，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法。对此，我们对教材课后的全部习题给出了详细的解答。由于微积分解题方法千变万化，大多数习题我们只给出了一

种参考解答,其他方法留给读者自己去思考。

4. 考研试题精解:精选历年硕士研究生入学考试试题中具有代表性的试题进行了详细的解答,这些试题涉及内容广、题型多、技巧性强,可以使广大同学举一反三,触类旁通,开拓解题思路,更好地掌握微积分的基本内容和解题方法。

5. 试验题解答:鉴于计算机的广泛应用以及数学软件的日臻完善,教材中编写了 11 个数学试验。我们对这些试验题给出了详细的解答和说明。由于思路的不同,试验题还有其他更好的解答,我们只是提供了一种参考解答,全书的试验题解答单列在教材的最后。

本书由滕兴虎、吴红、廖洪林、罗剑、汤光华、周华任等同志编写,全书由滕加俊统稿。在本书的策划、编写、审稿等方面得到了陕西师范大学出版社的大力支持和热情帮助,在此表示感谢。由于编者水平有限,加之时间仓促,书中不妥之处敬请广大同行和读者加以批评指正。

编　者

2005 年 8 月 5 日

目　录

一、基础知识及习题精解

第五章　向量代数与空间解析几何 …………………………（ 3 ）
第六章　多元函数微分学 ………………………………………（ 81 ）
第七章　重积分 …………………………………………………（218）
第八章　曲线积分与曲面积分 …………………………………（372）
第九章　级数 ……………………………………………………（540）

二、实验题解答

第五章　向量代数与空间解析几何 …………………………（655）
第六章　多元函数微分学 ………………………………………（672）
第七章　重积分 …………………………………………………（679）
第八章　曲线积分与曲面积分 …………………………………（681）
第九章　级数 ……………………………………………………（683）

基础知识及习题精解 1

第五章　向量代数与空间解析几何

一、基本要求、重点与难点

基本要求：

1. 理解向量的概念，掌握向量的加法与数乘运算.

2. 理解空间直角坐标系，掌握向量的坐标及向量线性运算的坐标表示及两点之间距离公式、方向余弦.

3. 熟练掌握向量的数量积、向量积的运算及意义，理解向量的混合积的意义.

4. 熟练掌握平面与空间直线的方程和它们之间的平行、垂直关系.

5. 掌握曲面与空间曲线的方程.

6. 了解空间曲线在坐标面上的投影.

7. 掌握常用的几种二次曲面的标准方程和它们的图形.

重点：

1. 向量的数量积、向量积.

2. 平面的点法式方程.

3. 直线的对称式方程及直线与直线的关系.

4. 母线平行于坐标轴的柱面方程.

难点：

1. 母线平行于坐标轴的柱面方程.

2. 空间曲线在坐标平面上的投影曲线.

二、主要概念及公式

1. 向量概念.

(1) 既有大小又有方向的量称为向量.

(2) 如果两个有向线段的大小和方向是相同的，则不论它们的起点是否相同，我们都认为它们表示同一个向量，叫做自由向量.

(3) 模等于 1 的向量叫做单位向量.

(4) 模等于 0 的向量叫做零向量.

(5) 两个向量平行，称两向量共线.

(6) 设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量共面.

2. 向量的加法与数乘运算.

(1) 向量的加法：二个法则：平行四边形法则和三角形法则. 如图所示.

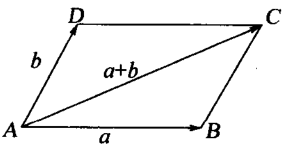

图 5－1

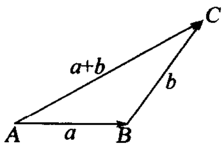

图 5－2

(2) 向量的加法符合下列运算律：

① 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

② 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

(3) 向量的数乘记为 $\lambda\boldsymbol{a}$（λ 为常数，$\boldsymbol{a}$ 为向量）$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$；当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(4) 向量数乘的运算规律.

结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

(5) 负向量，当 $\lambda=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量记为 $-\boldsymbol{a}$.

(6) 任何非零向量可以表示为它的模与同向单位向量的

数乘.

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a;\qquad \boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

(7) 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$ 的充要条件是存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(8) 对数轴 Ou 上的任意一点 P,轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 都可唯一地表示为 P 点的坐标 u 与轴上单位向量 $\boldsymbol{e}_u$ 的乘积 $\overrightarrow{OP}=u\boldsymbol{e}_u$.

3. 空间直角坐标系.

(1) 三条坐标轴中每两条可以确定一个平面,称为坐标面.

(2) 三个坐标面将空间分为八个卦限分别用罗马字母 Ⅰ、Ⅱ、……Ⅷ 表示.

(3) 空间中两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离:

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

4. 向量的坐标表示

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$$

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,则

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

5. 向量的模:

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

6. 方向角与方向余弦:

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向所成的夹角,即与标准单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 所成的夹角 α、β、γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.($0\leqslant\alpha$、β、$\gamma\leqslant\pi$),方向角的余弦 $\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

且

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\qquad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\qquad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$$

其中

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

方向余弦满足关系式：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

7. 向量的投影：设向量

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{ON},\quad \boldsymbol{b}\neq 0\quad 且\quad (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi.$$

过 M 点作平面垂直于 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线并交该直线于点 M'，如图 5－3 所示，则称有向线段 OM' 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量. 易知，$\overrightarrow{OM'}=(|\overrightarrow{OM}|\cos\varphi)\boldsymbol{e}_b=(|\boldsymbol{a}|\cos\varphi)\boldsymbol{e}_b$，称 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影（Prejection）并记作 $\mathrm{prj}_b\boldsymbol{a}$.

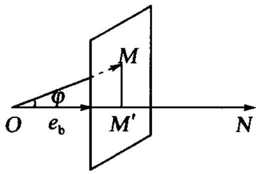

图 5－3

8. 向量的数量积（点积、内积）.

（1）定义：设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个向量，$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$），$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，又称为点积，内积.

（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$；　　$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a\cdot\boldsymbol{b}$

（3）两向量的数量积等于两向量对应坐标的乘积之和.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x,a_y,a_z)\cdot(b_x,b_y,b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

（4）若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为任意向量，λ,μ 是任意实数有：

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$

②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$　（交换律）

③$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$　（分配律）

④$(\lambda\boldsymbol{a})(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$　（数乘结合律）

（5）向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角满足公式：

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant x)$$

若 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

(6) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

若 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 的充要条件为：

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

9. 向量的向量积(又称叉积，外积)，记作 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

(1) 定义：$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta \qquad (\theta = (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}))$；

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，并且 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 符合右手法则.

(2) 对任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，有：

$$\boldsymbol{0} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \qquad \text{(反交换律)}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \qquad \text{(结合律)}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a}) \times (\mu\boldsymbol{b}) = \lambda\mu(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \qquad (\lambda\mu \text{ 为任意常数})$$

(3) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ 的充要条件为：$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

(4) $$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

(5) 向量积的几何意义：

①$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，表示以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

②$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 的方向：由定义知 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 与一切既平行于 $\boldsymbol{a}$ 又平行于 $\boldsymbol{b}$ 的平面垂直.

10. 向量的混和积.

(1) 定义：设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是三个向量，先作向量积 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，再作 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的数量积，得到的数 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ 叫做 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积，记为 $[\boldsymbol{abc}]$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$[\boldsymbol{abc}] = [\boldsymbol{bca}] = [\boldsymbol{cab}]$$

(2) 几何意义：混和积$[\boldsymbol{abc}]$的绝对值是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻三棱的平行六面体的体积.

(3) 三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是：

$$[\boldsymbol{abc}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_z & c_y \end{vmatrix} = 0$$

11. 平面方程.

(1) 平面点法式方程，过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且以 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 为法向量的平面 π 的方程为：$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

(2) 平面的一般方程：$Ax + By + Cz + D = 0$，$\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 是平面的法向量.

(3) 平面的截距式方程：

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

其中，a, b, c 依次为平面在 x, y, z 轴上的截距.

(4) 两平角的夹角：两平面的法向量的夹角称为两平面的夹角(取锐角). 设两平面 π_1 和 π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

两平面夹角余弦为

$$\cos\theta = \left| \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} \right| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

(5) 点到平面的距离：点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

12. 直线方程.

(1) 直线的参数方程与对称式方程

过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且以 $\boldsymbol{S} = (m, n, p)$ 为方向向量的直线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

而

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

为直线的点向式方程,或对称式方程.

(2) 直线的一般方程:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

其中$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$ 不成立.

(3) 两直线的夹角:两直线的方向向量的夹角叫做两直线的夹角.

$$\cos\varphi = \left|\frac{\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2}{|\boldsymbol{S}_1||\boldsymbol{S}_2|}\right|$$

$$= \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + m_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

$L_1 \perp L_2$ 的充要条件为:$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$

$L_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} L_2$ 的充要条件是:$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$

(4) 直线与平面的夹角

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

其中 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面法向量，$S=(m,n,p)$ 为直线的方向向量.

直线 L 与平面 π 的关系.

$L\ /\!/\ \pi$ 的充要条件是$\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

$L\perp\pi$ 的充要条件是 $Am+Bn+Cp=0$.

13. 曲面.

(1) 柱面：平行于定直线 L 并沿定曲线 C 移动的直线所形成的曲面叫做柱面，定曲线 C 叫做柱面的准线，动直线叫做柱面的母线.

(2) 旋转曲面：平面上的曲线 C 绕该平面上一条定直线 l 旋转而形成的曲面叫做旋转曲面. 该平面的曲线 C 叫做旋转曲面的母线，定直线叫做旋转曲面的轴.

曲线$\begin{cases}f(y,z)=0\\x=0\end{cases}$绕 z 轴旋转的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

绕 y 轴旋转的旋转曲面方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

曲线$\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$绕 x 轴旋转的旋转曲面方程为

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0.$$

绕 y 轴旋转的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0.$$

曲线$\begin{cases}f(x,z)=0\\y=0\end{cases}$绕 x 轴旋转的旋转曲面方程为

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0.$$

绕 z 轴旋转的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},z)=0.$$

14. 空间曲线的方程.

(1) 曲线的一般方程：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

(2) 曲线的参数方程：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

15. 空间曲线在坐标面上的投影

(1) 以空间曲线 Γ 为准线，母线垂直于 xOy 面的柱面叫做 Γ 对 xOy 面的投影柱面，投影柱面与 xOy 面的交线叫做 Γ 在 xOy 面上的投影曲线.

设空间曲线 Γ 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad ①$$

消去(1)中变量 z 后得 $H(x,y)=0$ 为 Γ 对 xOy 面的投影柱面，与 $z=0$ 联立.

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

为 Γ 在 xOy 面上的投影曲线.

类似地，消去(1)中变量 x，得 $R(y,z)=0$ 为 Γ 对 yOz 面的投影柱面.

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

为 Γ 在 yOz 面上的投影曲线.

消去(1)中变量 y，得 $T(x,z)=0$ 为 Γ 对 xOz 面的投影柱面.

$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

为 Γ 在 xOz 面上的投影曲线.

16. 二次曲面.

(1) 椭球面方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>0,b>0,c>0)$$

(2) 抛物面：

① $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm z$ 为椭圆抛物面方程.

② $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm z$ 为双曲抛物面方程.

(3) 双曲面：

① $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 为单叶双曲面方程.

② $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 为双叶双曲面方程.

(4) 椭圆锥面方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

三、重点难点解答

1. 向量的运算.

(1) 向量的加减法主要运用二个法则：平行四边形法则和三角形法则，运用时注意向量的方向性.

(2) 向量的数量积的交换律成立：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；但结合律和消去律不成立，即：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$. 因向量相等是指大小相等方向相同，而 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 同向，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不同向，故二者必然不同. 又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\nRightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\nRightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 我们知道只要 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3) 数量积的几何意义：$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 的模和 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的乘积，或 $\boldsymbol{b}$ 的模和 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上投影的乘积，即：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|\,\mathrm{prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}\qquad(\boldsymbol{a}\neq 0)$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}\qquad(\boldsymbol{b}\neq 0)$$

(4) 向量积的运算规律中

交换律不成立 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

结合律不成立 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$