NEW
状元陪练

ZHUANGYUAN PEILIAN

九年义务教育四年制初中

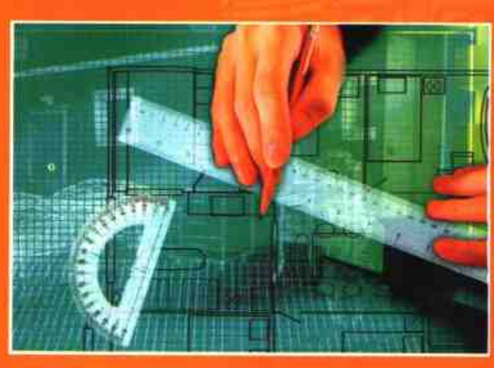
根据最新版人教社教材编写

状元陪练

全国名校同步训练名题精编

初三几何（下）

孙润珠　主编



- 点击学习要点
- 荟萃经典习题
- 拓宽知识视野
- 强化素质能力

黑龙江少年儿童出版社

九年义务教育四年制初中

状元陪练

全国名校同步训练名题精编

初三几何（下）

孙润珠　主编

孙润珠　战利超　李　游　编写
刘旭飞　赵余龙　关明智

黑龙江少年儿童出版社

2006年·哈尔滨

丛书策划：于晓北　王朝晔　赵　力
刁小菊　张立新
责任编辑：张小宁　范兴云

《状元陪练》四年制（初三几何）编委会

主　　编：孙润珠
副 主 编：战利超
编　　委：孙润珠　战利超　李　游
刘旭飞　赵余龙　关明智

九年义务教育四年制初中
状元陪练
初三几何（下）
孙润珠　主编
孙润珠　战利超　李　游
刘旭飞　赵余龙　关明智　编写

黑龙江少年儿童出版社出版
黑龙江省新华书店发行
黑龙江日报印务中心印装

开本：787 毫米×1092 毫米　1/16　印张：30　字数：600 000
2004 年 1 月第 2 版　2006 年 1 月第 3 次印刷
ISBN 7-5319-2051-4 / G·1417　定价：35.40 元（共 6 册）

出 版 说 明

为使广大学生走出茫茫题海，获得名列前茅的好成绩，我们根据大多数状元学生的成功经验之一——精选名题练习，特邀请富有经验的一线著名教师，编写了这套名为《状元陪练——全国名校同步训练名题精编》的高质量教学辅导用书。该丛书完全符合教育部关于课程改革的最新精神及素质教育的要求，与2006年新版教材同步，展示了全国多所名校著名教师教学新成果。

栏目介绍：

点击重点难点——根据教学要求，由名师就教材各个章、节知识点进行提示性讲解。

攻难解疑示例——结合例题，帮助学生掌握突破难点的思路和科学的解题方法。

课课达标◇状元陪练——博采众长，精选名题，与现行教材进行同步训练。

强化素质◇期中测试　提高素质◇期末评估——紧密贴近中考的要求，采取梯级拔高的形式，强化学生归纳、概括、运用知识的能力，增加跨学科知识的交叉渗透，提高学生创新能力。

中考权威预测——结合新的考试标准，贴近中考命题方向，帮助学生提高对中考的适应能力。

衷心期望《状元陪练》使更多的学生成为"状元"，也恳请广大读者在使用本丛书过程中，及时向我们提出宝贵意见和建议，以便修订再版时及时予以改正和提高。

《状元陪练》丛书编委会

2006年1月

☺ 把优异的成绩告诉父母

☺ 把发现的错误和建议寄给我们

《状元陪练》丛书读者意见反馈表

科别、册次：		
页码	正、倒行	错误及疑问
建议		
通信地址、姓名		

黑龙江少年儿童出版社：哈尔滨市南岗区宣庆小区8号楼　邮编：150008　张立新　收

目　录

第四章 四边形

二 平行四边形

4.5 矩形、菱形

点击重点难点

重点

掌握矩形,菱形的基本概念和它们的性质,明确矩形,菱形的判定定理.

重点

能够根据矩形,菱形的定义、性质和判定方法,进行有关的计算和证明.

攻难解疑示例

例 1

如图 4.5-1 矩形 $ABCD$ 中,E 为 CD 上一点,$EF\perp BE$ 交 AD 于 F,若 $EC=2$,矩形的周长为 16,且 $BE=EF$,求 DE 的长.

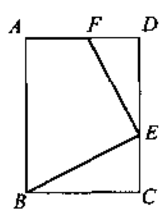


图 4.5-1

点拨思路

据已知条件 $BE=EF$ 及矩形的基本性质可证$\triangle DEF\cong\triangle BCE$,可得到矩形的宽 $BC=DE$,再据矩形的对边相等的性质及周长可求 DE.

答案

解:$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形(已知)

$\therefore\angle D=\angle C=90°$(矩形四角为直角)

$\because FE\perp BE$(已知)

$\therefore\angle FEB=90°$(垂直定义)

$\therefore\angle FED+\angle BEC=90°$(平角定义)

又$\because\angle EBC+\angle BEC=90°$(Rt△的两锐角互余)

$\therefore\angle EBC=\angle FED$(等量代换)

在$\triangle EFD$与$\triangle BEC$中

$\begin{cases}\angle D=\angle C(\text{已证})\\ \angle FED=\angle EBC(\text{已证})\\ EF=BE(\text{已知})\end{cases}$

$\therefore\triangle EFD\cong\triangle BEC(AAS)$

$\therefore DE=BC$(全等三角形的对应边相等)

$\because$矩形周长为 16,$EC=2$

$\therefore 2(DE+2)+2DE=16$

$DE=3$

例 2

如图 4.5-2 矩形 $ABCD$ 的边 CD 的延长线上取一点 E,使 $CE=CA$,F 为 AE 中点,求证:$BF\perp DF$.

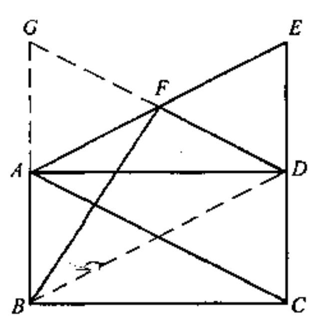


图 4.5-2

点拨思路

欲证 $BF\perp FD$，须证 $\angle BFD=90°$，于是想到连 BD，但证 $\triangle BFD$ 为 Rt△ 的条件不足，故考虑延长 DF，交 BA 的延长线于 G，从而证明 $\angle GFB=\angle DFB$，而确定出 $\angle BFD=90°$，这自然联想须证 $\triangle BGF\cong\triangle BDF$.

答案

证明：延长 DF 交 BA 的延长线于 G，连 BD.

$\because F$ 是 AE 中点（已知）

$\therefore AF=EF$（中点定义）

$\because ABCD$ 是矩形（已知） $\therefore BG\parallel CE$（矩形对边平行）

$\therefore \angle G=\angle EDF$（两直线平行，内错角相等）

在 $\triangle AGF$ 与 $\triangle DEF$ 中

$\begin{cases}\angle G=\angle EDF & （已证）\\ \angle AFG=\angle EFD & （已证）\\ AF=EF & （已知）\end{cases}$

$\therefore \triangle AGF\cong\triangle DEF(AAS)$ $\therefore GF=FD$；$AG=DE$（全等三角形对应边相等）

又 $\because AB=DC$（矩形对边相等）

$\therefore AB+AG=DC+DE$　即 $BG=EC$（等量公理）

又 $\because CE=AC$，而 $AC=BD$（矩形对角线相等）

$\therefore BG=BD$（等量代换）

在 $\triangle BFG$ 与 $\triangle BFD$ 中

$\begin{cases}GF=DF & （已证）\\ BF=BF & （公用边）\\ BG=BD & （已证）\end{cases}$

$\therefore \triangle BFG\cong\triangle BFD(SSS)$

$\therefore \angle GFB=\angle DFB$（全等三角形对应角相等）

$\because GFD$ 为直线，$\therefore \angle BFG=\angle DFB=90°$.

$\therefore BF\perp FD$　（垂直定义）

例 3

如图 4.5-3，已知点 M 是菱形 $ABCD$ 的边 CD 的中点，过 M 的直线 $MN\perp DB$ 于 F，交 AD 于 E，交 BA 的延长线于 N，求证：MN 与 AD 互相平分.

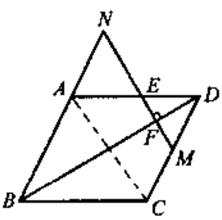


图 4.5-3

点拨思路

欲得结论，必证 $\triangle ANE\cong\triangle DME$，而除了角的条件充分外却没有边相等的条件，需通过连 AC，证四边形 $ACMN$ 为平行四边形来解决 $AN=MD$ 的问题，这时 $\triangle ANE$ 与 $\triangle MDE$ 全等了，结论得证了.

答案

证明：连 AC. $\because ABCD$ 是菱形（已知）

$\therefore BD\perp AC$（菱形对角线互相垂直）

$\because DB\perp MN$（已知）

$\therefore AC\parallel MN$（垂直于同一直线的两直线平行）

又 $\because BN\parallel CD$（菱形对边互相平行）

$\therefore$ 四边形 $ACMN$ 为平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）

$\therefore AN=MC$（平行四边形对边相等）

又 $\because M$ 为 CD 中点（已知） $\therefore MC=MD$（中点定义）

$\therefore AN=MD$（等量代换）

又 $\because AN\parallel ME$（已证） $\therefore \angle N=\angle DME$（内错角相等）

在 $\triangle ANE$ 与 $\triangle MDE$ 中

$\begin{cases}\angle N=\angle DME & （已证）\\ AN=DM & （已证）\\ \angle AEN=\angle DEM & （对顶角相等）\end{cases}$

$\therefore \triangle ANE\cong\triangle MDE(AAS)$

$\therefore NE=ME$；$AE=ED$（全等三角形对应边相等），$\therefore MN$ 与 AD 互相平分.

例 4

如图 4.5－4,已知 E、F 分别是菱形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 上的点,$\angle B=\angle EAF=60°$,$\angle BAE=18°$,求$\angle CEF$ 的度数.

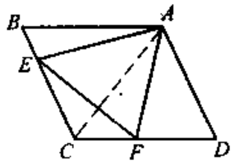


图 4.5－4

点拨思路

欲求$\angle CEF$ 的度数,应知$\angle BEA$ 和$\angle AEF$ 的度数.由已知易求$\angle BEA$ 的度数,关键是求出$\angle AEF$ 的度数,由菱形的性质可知$\triangle ABC$ 为等边三角形,可知$\angle BAC=60°$,从而可证出$\angle BAE=\angle CAF$,而得$\triangle ABE\cong\triangle ACF(ASA)$,而得$\triangle AEF$ 为等边三角形,于是$\angle CEF$ 的度数即可求出.

答案

解:$\because\angle B=60°$(已知).AC 平分$\angle BAD$(菱形对角线平分一组对角).

$\therefore\angle BAC=\frac{1}{2}\times120°=60°$.

$\therefore\angle BAC=\angle EAF=60°$

$\therefore\angle BAE=\angle CAF=18°$

在$\triangle ABE$ 与$\triangle ACF$ 中

$$\begin{cases}\angle B=\angle ACF=60° & (\text{已证})\\ AB=AC & (\text{已证})\\ \angle BAE=\angle CAF & (\text{已证})\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ACF(ASA)$

$\therefore AE=AF$(全等三角形的对应边相等)

又$\because\angle EAF=60°$(已知)

$\therefore\triangle AEF$ 为等边三角形(含 60°角的等腰三角形是等边三角形)

$\therefore\angle AEF=60°$(等边三角形各角 60°)

$\because\angle B=60°\quad\angle BAE=18°$(已知)

$\therefore\angle AEB=180°-60°-18°=102°$(三角形内角和 180°)

$\therefore\angle CEF=180°-102°-60°=18°$

课课达标◇状元陪练

一、选择题

1.四个内角都相等的四边形一定是(　　).

A.平行四边形　　B.矩形

C.菱形　　D.任意四边形

2.在矩形 $ABCD$ 中,点 E 为边 AB 的中点,过点 E 作直线 EF 交对边 CD 于点 F,若 $S_{AEFD}:S_{BCFE}=2:1$,则 $DF:FC=$(　　).

A.5:1　B.5:2　C.4:1　D.3:1

3.矩形的两条对角线所成的角之一是 65°,那么对角线与各边所成的角是(　　).

A.57.5°　　B.32.5°

C.57.5°和 32.5°　　D.33.5°

4.菱形 $ABCD$ 中,$\angle A=120°$,周长为 14.4 cm,则较长的对角线的长度是(　　).

A.$\frac{18}{5}$ cm　　B.$\frac{18}{5}\sqrt{3}$ cm

C.10.8 cm　　D.7.2 cm

5.菱形的面积为 50 cm^2,一个内角为 30°,则这个菱形的边长为(　　).

A.8 cm　　B.10 cm

C.12 cm　　D.14 cm

6.菱形的对角线的平方和等于一边的平方的(　　).

A.4 倍　　B.8 倍

C.3 倍　　D.2 倍

7.在矩形 $ABCD$ 中,对角线相交于 O,若$\angle AOB=100°$,则$\angle OAB=$(　　).

A.50°　　B.40°

C.45°　　D.30°

8.顺次连接矩形各边中点所得的菱形面积与矩形面积之比为(　　).

A.1:2　B.1:3　C.1:4　D.1:8

9.从一个菱形的钝角的顶点向对角的两邻边作垂线,垂足恰好在该边的中点,则这个菱形内角中锐角的度数是(　　).

A.30°　B.40°　C.60°　D.45°

10.下列命题正确的是(　　).

A.对角线互相垂直平分的四边形是矩形

B.有一个角是直角的平行四边形是矩形

C.矩形的对角线互相垂直平分

D.矩形是以对角线所在直线为对称轴的轴对称图形

11.若一个矩形相邻两边的比是2:3,面积为54 cm^2,则矩形的周长是(　　).

A.15 cm　　B.30 cm

C.45 cm　　D.60 cm

12.能够判定四边形是菱形的条件是(　　).

A.两条对角线相等

B.两条对角线互相垂直

C.两条对角线相等且互相垂直

D.两条对角线互相垂直平分

13.矩形的两条对角线的夹角中有一个为120°,则这个矩形的短边与长边之比为(　　).

A.$1:\sqrt{3}$　B.1:3　C.$1:\sqrt{2}$　D.1:2

14.如图4.5-5,菱形$ABCD$中,$AE\perp BC$于E,$AF\perp CD$于F,若$BE=EC$,则$\angle EAF=$(　　).

A.75°　B.60°　C.50°　D.45°

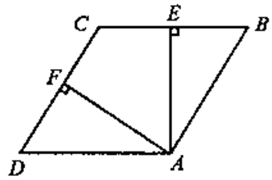


图4.5-5

15.矩形具有而平行四边形不一定具有的性质是(　　).

A.对角线互相平分

B.对角线相等

C.对角线平分一组对角

D.对角线互相垂直

16.已知矩形的边长分别是15和25,一个内角的平分线分较长边为两部分,则这两部分的长为(　　).

A.16和9　　B.15和10

C.12.5和12.5　　D.18和7

17.如图4.5-6,矩形$ABCD$沿AE折叠,使点D落在BC边上的F处,如果$\angle BAF=60°$,则$\angle DAE$等于(　　).

A.15°　B.30°　C.45°　D.60°

图4.5-6

18.已知一个四边形$ABCD$的边长分别为a、b、c、d,其中a、c为对边,且满足$a^2+b^2+c^2+d^2=2ac+2bd$.则四边形是(　　).

A.平行四边形　　B.正方形

C.菱形　　D.矩形

19.在菱形$ABCD$中,E、F分别在BC和CD的边上,且△AEF是等边三角形,$AE=AB$则$\angle BAD$的度为数为(　　).

A.95°　B.100°　C.105°　D.120°

20.如图4.5-7,周长为80 cm的矩形被分成8个全等的矩形,则矩形$ABCD$的面积为(　　).

A.296 cm^2　　B.98 cm^2

C.280 cm^2　　D.384 cm^2

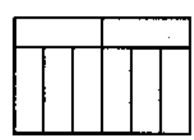


图4.5-7

二、填空题

1.矩形$ABCD$中,AC、BD相交于O,$AC=8$,$AB=4$,则$BC=$________,$BD=$________,$\angle AOB=$________.

2.如图4.5-8,矩形$ABCD$中,$BE\perp AC$于E,$DF\perp AC$与F,若$AE=1$,$EF=2$,则$AB=$________,$BC=$________.

3.如图4.5-9,菱形的面积为24 cm^2,周长20 cm,则两条对角线AC长分别是________.

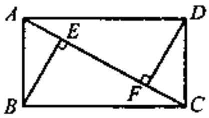


图 4.5－8

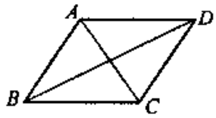


图 4.5－9

4. 若菱形的边长为 6 cm，一个角为 60°，则它的面积为________.

5. 菱形的周长为 52 cm，$\angle A:\angle B=1:2$，则对角线 $BD=$________.

6. 在矩形 $ABCD$ 中，一条对角线与较短边的和为 48 cm，两条对角线的夹角为 120°，那么此矩形的对角线长为________.

7. 已知菱形的周长为 40 cm，两条对角线的比是 3:4，则菱形的面积是________，边长是________.

8. 菱形的两邻角的度数之比为 1:3，菱形的高为 $7\sqrt{2}$，则边长为________，面积为________.

9. 若从菱形的一个顶点到对边的距离等于边长的一半，则菱形的相邻两个内角的度数分别是__________.

10. 如图 4.5－10，矩形 $ABCD$ 中，$AE\perp BD$，$\angle DAE=3\angle BAE$，那么 $\angle BAE=$________，$\angle EAC=$________.

11. 如图 4.5－11，把两个全等的矩形拼摆成如图形式，则 $\angle FAC=$________，$\angle FCA=$________.

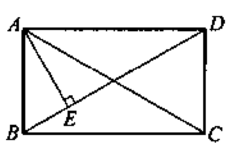


图 4.5－10

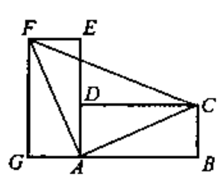


图 4.5－11

12. 如图 4.5－12，在矩形 $ABCD$ 中 E 是 BC 的中点，$\angle BAE=30°$，$AE=2$，则 $AC=$________.

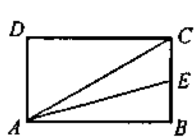


图 4.5－12

13. 菱形的一个内角为 120°，且平分这个内角的对角线长为 8 cm，则菱形的周长为________.

14. 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于 O，$\angle AOB=2\angle BOC$，若对角线 AC 长 12，则 $AD=$________.

15. 菱形的两条对角线长分别是 3 和 7，则这个菱形面积________.

16. 菱形的高为 1.5 cm，它的两个相邻内角度数的比为 1:5，它的周长为________.

17. 把一个长为 14 cm 的铁丝折成一个矩形，这个矩形的面积为 12 cm^2，则这个矩形的对角线的长为________.

18. 如图 4.5－13，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2BC$，在 CD 上取一点 E，使 $AE=AB$，则 $\angle EBC$ 的度数为________.

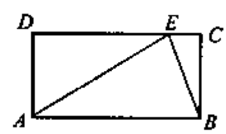


图 4.5－13

19. 过矩形 $ABCD$ 的顶点 D 作对角线 AC 的垂线交 AC 于 E，若 $AE=8$ cm，$DE=2$ cm 则矩形的周长为________.

20. 如图 4.5－14，矩形 $ABCD$ 中 $\angle ABD=15°$，$CE\perp BD$ 于 E，$CE=2$，则矩形 $ABCD$ 的面积为________.

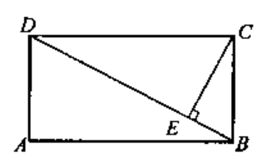


图 4.5－14

三、解答题

1. 如图 4.5－15，菱边 $ABCD$ 中 $AE\perp CD$，且 $AE=OD$，求 $\angle CAE$ 的度数.

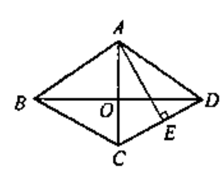


图 4.5－15

2. 如图 4.5－16，等边△*AEF* 与菱形 *ABCD* 有一个公共顶点 *A*，△*AEF* 的顶点 *E*、*F* 分别在菱形的边 *BC*，*CD* 上，求菱形 *ABCD* 的相邻两角的度数.

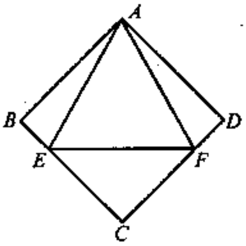


图 4.5－16

3. 如图 4.5－17，已知菱形 *ADEF* 的顶点 *D*，*E*，*F* 分别在△*ABC* 的边 *AB*、*BC*、*CA* 上，且 ∠*AEB* ＞ ∠*AEC*，求证：*BD* ＞ *FC*.

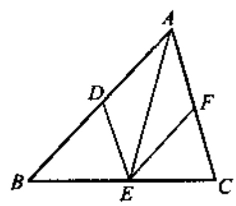


图 4.5－17

4. 如图 4.5－18，矩形 *ABCD* 中，*AC*，*BD* 相交于点 *O*，过 *O* 点作 *EF*⊥*BD* 交 *AD* 于 *E*，交 *BC* 于 *F*，若 *BF* = *ED*，求证：*OE* = *OF*.

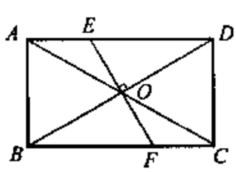


图 4.5－18

5. 如图 4.5－19，已知矩形 *ABCD* 中，*AB* = 4 cm，*AD* = 6 cm，*M* 为 *BC* 的中点，*DN*⊥*AM* 于 *N*，且 *MN* = 1 cm，求 *DN* 的长.

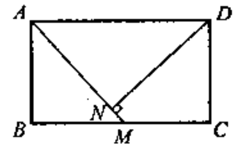


图 4.5－19

6. 如图 4.5－20，四边形 *ABCD* 是平行四边形，*E*、*F* 分别是 *BC*、*AD* 上的点，且 *EF* 垂直平分 *AC*，求证：四边形 *AFCE* 是菱形.

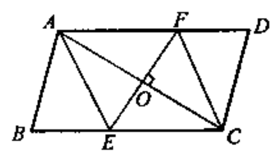


图 4.5－20

7. 如图 4.5－21，矩形 *ABCD* 中，*O* 是对角线的交点，*AF* 平分∠*BAC* 交 *BC* 于 *F*，*DE*⊥*AF* 分别交 *AC*、*AF*、*AB* 于 *G*、*H*、*E*，求证：*BE* = 2*OG*.

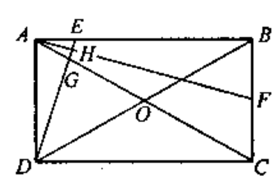


图 4.5－21

8. 如图 4.5－22，已知▱$EFGH$ 的四个顶点分别在矩形 $ABCD$ 的四条边上，且 $HG /\!/ AC$，$FG /\!/ BD$，求证：▱$EFGH$ 的周长是定值.

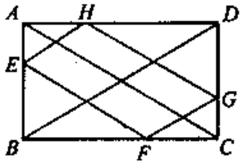


图 4.5－22

9. 如图 4.5－23，一位勘测队员对一矩形土地的三个顶点的距离进行了测量，所得结果如图所示，问是否有必要再对到第四个顶点的距离 b 进行测量？证明你的结论.

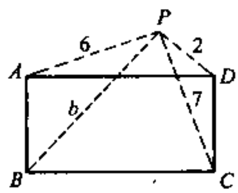


图 4.5－23

10. 如图 4.5－24，已知四边形 $ABCD$ 与 $DEBF$ 都是矩形，$AB = BF$，AD，BE 相交于 M，FD、BC 相交于 N，求证：四边形 $BMDN$ 是菱形.

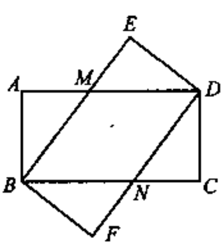


图 4.5－24

11. 如图 4.5－25，已知过矩形 $ABCD$ 的顶点 A 作对角线 BD 的垂线，垂足为 F，并将其反向延长与$\angle BCD$ 的平分线交于 E，求证：$AC = AE$.

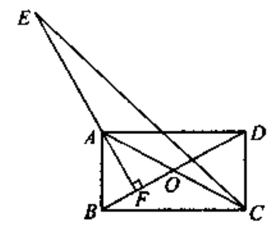


图 4.5－25

12. 如图 4.5－26，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，BD 是角平分线，$CE \perp AB$，交 BD 于 G，$DF \perp AB$，E、F 为垂足，连结 FG，求证：四边形 $DCGF$ 是菱形.

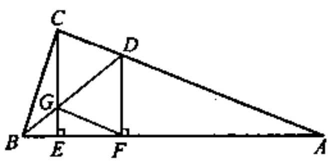


图 4.5－26

4.6 正方形

点击重点难点

重点

正方形的概念、性质、判定方法.

难点

明确正方形既是特殊的平行四边形,又是特殊的矩形,也是特殊的菱形,除平行四边形、矩形、菱形的性质外的独特独具的性质.

攻难解疑示例

例 1

如图 4.6-1,在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上取一点 E,使 $CD=AE$,过 E 点作 $EF\perp AC$ 交 BC 于 F,求证:$CE=EF=BF$.

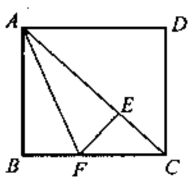


图 4.6-1

点拨思路

证线段 $BF=EF$,首先考虑它们所在的三角形能全等.于是想到连结 AF,易证 $\triangle ABF\cong\triangle AEF$,得 $BF=EF$,而涉及与 EC 相等,应考虑它所在的 $\triangle EFC$ 为等腰 Rt△就可得 $CE=EF$ 了.

答案

证明:连结 AF,在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle AEF$ 中,

$$\begin{cases} AE=CD=AB & (\text{已知}) \\ AF=AF & (\text{公用边}) \\ \angle B=\angle AEF=90^\circ & (\text{已知}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle AEF(HL)$

$\therefore BF=EF$.又 $\because \angle FEC=90^\circ\quad \angle ECF=45^\circ\quad \therefore \angle EFC=45^\circ$

$\therefore \triangle EFC$ 为等腰 Rt△ $\quad\therefore EC=EF=FB$.

例 2

如图 4.6-2,已知正方形 $ABCD$ 中的 $BE\,/\!/\,AC$,$AE=AC$,求证:$CF=CE$.

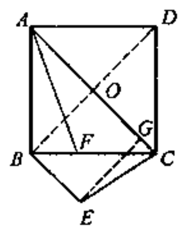


图 4.6-2

点拨思路

证明线段 $CF=CE$,它们所在的三角形全等的可能性不存在的情况下,应考虑在同一三角形中等角对等边的问题,即可证 $\triangle ECF$ 为等腰三角形,则要证 $\angle CEF=\angle CFE$ 了.

答案

证明:连结 BD,过 E 作 $EG\perp AC$ 于 G.

$\because BE\,/\!/\,AC\quad GE\perp AC$ 于 G,$AC\perp BD$ 于 O,$\therefore BD\,/\!/\,EG\quad\therefore$ 四边形 $BEGO$ 为平行四边形,$\therefore EG=BO=\frac{1}{2}AC$.又 $\because AE=AC\quad\therefore EG=\frac{1}{2}AE$.$\angle AGE=90^\circ\quad\therefore \angle EAC=30^\circ$ 又 $\because \triangle AEC$ 为等腰三角形,$\angle EAC=30^\circ\quad\therefore \angle AEC=\angle ACE=\frac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$ 又 $\because \angle BAC=45^\circ$,$\angle EAC=30^\circ\quad\therefore \angle CFE=45^\circ+30^\circ=75^\circ\quad\therefore \angle CEF=\angle CFE=75^\circ$

$\therefore CF=CE$.

例 3

如图 4.6-3，E、F 分别为正方形 $ABCD$ 的边 AB、BC 上的中点，M 为 BC 延长线上的点，CH 是 $\angle DCM$ 的平分线交 AD 延长线于 H，$FG\perp AF$ 交 CH 于 G，求证：(1) $\triangle ABF\cong\triangle DAE$；(2)求证：$\triangle AEF\cong\triangle FCG$；(3)求证：四边形 $EFGD$ 是平行四边形；(4)若 $AB=20$ cm，求四边形 $EFGD$ 的面积.

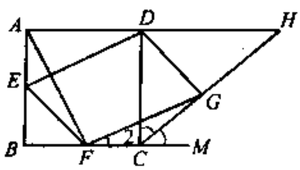


图 4.6-3

点拨思路

(1)易证 $\triangle ABF\cong\triangle DAE(SAS)$

(2)可证 $\triangle AEF\cong\triangle FCG(ASA)$

(3)由(1)和(2)的结论可得 $FG\mathrel{\underline{\parallel}}ED$

∴四边形 $EFGD$ 为平行四边形.

(4)由勾股定理得 $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{20^2+10^2}=10\sqrt{5}$ cm. AK 是 Rt$\triangle ADE$ 斜边上的高，由三角形的面积易得 $AK=\dfrac{AE\cdot AD}{DE}=\dfrac{10\times 20}{10\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$ cm.

$\therefore S_{\square EFGD}=DE\cdot FK=10\sqrt{5}\times(10\sqrt{5}-4\sqrt{5})=300\ \text{cm}^2$.

例 4

如图 4.6-4，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，AB、AD 上各有一点 P、Q，如果 $\triangle APQ$ 的周长为 2，求 $\angle QCP$ 的度数.

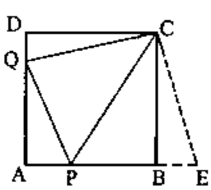


图 4.6-4

点拨思路

此题的求解方法可采用"旋转"法，即把 $\triangle CDQ$ 绕点 C 逆时针旋转 90°，至 $\triangle CBE$ 处，这时由 Rt$\triangle CDQ\cong$ Rt$\triangle CBE$，而求出 $\triangle CQP\cong\triangle CEP$，得出：$\angle QCP=\angle ECP$，而 $\angle QCE=90°$，故 $\angle QCP$ 为 45°.

答案

解：将 $\triangle CDQ$ 绕 C 点旋转 90° 至 Rt$\triangle CBE$ 处，$\therefore\triangle CDQ\cong\triangle CBE$，$\therefore\angle DCQ=\angle BCE$. $\therefore\angle DCB=\angle QCE=90°$，∵正方形边长为 1，$\triangle APQ$ 的周长为 2，设 $AP=m$，$AQ=n$，则 $PQ=2-a-b$，而 $PE=1-a+1-b=2-a-b$. ∴在 $\triangle CPQ$ 与 $\triangle CPE$ 中

$$\begin{cases}CQ=CE & (\text{已证})\\ CP=CP & (\text{公用边})\\ PQ=PE & (\text{已证})\end{cases}$$

$\therefore\triangle CPQ\cong\triangle CPE(SSS)$

$\therefore\angle QCP=\angle ECP$ $\quad\because\angle QCE=90°$，而 $\angle QCE=\angle QCP+\angle ECP$

$\therefore\angle QCP=45°$

课课达标◇状元陪练

一、选择题

1.若正方形的面积是 25，则它的周长是(　　).

A.10　B.15　C.20　D.25

2.四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于 O，能判定它是正方形的题设是(　　).

A. $AO=BO=CO=DO$，$AC\perp BD$

B. $AO=CO$，$BO=DO$，$AC\perp BD$

C. $AO=CO=BO=DO$

D. $AO=CO$，$BO=DO$

3.矩形，菱形，正方形都具有的性质(　　).

A.对角线互相垂直

B.对角线相等

C.对角线互相平分

D.对角线平分一组对角

4.顺次连结四边形各边中点而得到的四边形是正方形时,原四边形的对角线需满足的条件是(　　).

A.对角线相等

B.对角钱垂直

C.一条对角线平分另一条对角线

D.对角线相等且垂直

5.如图 4.6-5,$ABCD$ 是正方形,E 是 CD 中点,P 是 BC 边上一点,在下列条件中,不能推出$\triangle ABP$ 与$\triangle ECP$ 的各角都对应相等的是(　　).

A.$\angle APB=\angle EPC$　B.$\angle BAP=\angle CEP$

C.P 是 BC 中点　D.$BP:BC=2:3$

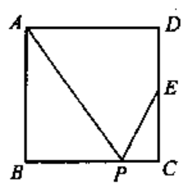


图 4.6-5

6.下列命题正确的是(　　).

A.四个角都相等的四边形是正方形

B.四边都相等的四边形是正方形

C.对角线相等的平行四边形是正方形

D.对角线互相垂直的矩形是正方形

7.如图 4.6-6,正方形的边长为 3,以 CD 为一边向两边作等边$\triangle CDM$ 和$\triangle CDN$,则 MN 的长为(　　).

A.$6\sqrt{3}$　B.$3\sqrt{3}$

C.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　D.$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

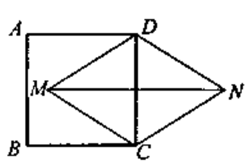


图 4.6-6

8.平行四边形的外角平分线能够围成一个(　　).

A.平行四边形　B.矩形

C.菱形　D.正方

9.矩形的内角平分线能够围成一个(　　).

A.平行四边形　B.矩形

C.菱形　D.正方形

10.下列命题正确的是(　　).

A.有一组邻边相等的四边形是菱形

B.对角线相等的四边形是矩形

C.对角线相等的菱形是正方形

D.对角线能平分一组对角的四边形是正方形

二、填空题

1.对角线________的四边形是正方形.

2.如图 4.6-7,E 是正方形 $ABCD$ 的边 BC 的延长线的一点,且 $CE=AC$,AE 交 CD 于 F,$\angle AFC=$________.

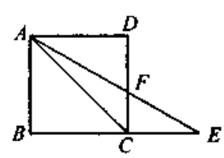


图 4.6-7

3.正方形 $ABCD$ 中,E 为 AB 上一点,且 $AE=1$,$DE=2$,那么正方形的面积为________.

4.正方形 $ABCD$ 中,E 为 BC 的中点,$EF\perp AE$ 交 CD 于 F,则 $FC:AB=$________.

5.已知 E、F 是正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的任意两点,连接 ED、EB、FD、FB,则图中的全等三角形有________对.

6.如图 4.6-8,已知 E 为正方形 $ABCD$ 内的一点,且$\triangle BCE$ 为等边三角形,则$\angle AED$ 的度数为________.

7.正方形 $ABCD$ 的边长是 4,E 为 BC 边上的一点,且 $BE=1$,P 为 AC 上的一点,则 $PE+PD$ 的最小值为________.

8.如图 4.6-9,正方形 $ABCD$ 和正方形 $A'B'C'D'$ 的边长均为 1,点 O 为 AC、BD 交点,则阴影部分面积为________.

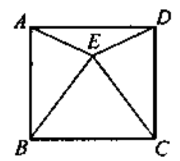


图 4.6-8

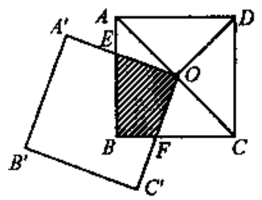


图 4.6-9

9. 在 Rt△ABC 中 $\angle C=90°$，分别以 AC、BC 为边向外作正方形的面积分别是 3 cm^2 和 4 cm^2，则以 AB 为边的正方形面积为________.

10. 如图 4.6-10，已知 P 为正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上一点，$PE \perp AB$ 于 E，$PF \perp BC$ 于 F，若 $AC=\sqrt{2}$，则四边形 $PEBF$ 的周长为________.

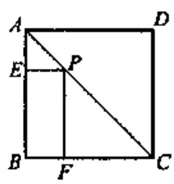


图 4.6-10

三、解答题

1. 如图 4.6-11，已知 E、G、F、H 分别在正方形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA，且 $EF \perp GH$，求证：$EF=GH$.

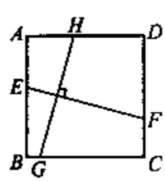


图 4.6-11

2. 如图 4.6-12，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于 O，E 为 OB 上的一点，$DF \perp CE$ 于 F 交 OC 于 G，求证：$OE=OG$.

3. 如图 4.6-13，E 为正方形 $ABCD$ 的边 CD 的中点，F 为 BC 上一点，且 $AF=AB+CF$，求证：AE 平分 $\angle DAF$.

4. 如图 4.6-14，已知 P 是正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上的一点，$PE \perp DC$，$PF \perp BC$，E、F 分别为垂足，求证：$AP=EF$.

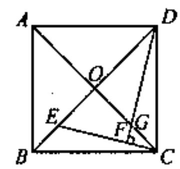


图 4.6-12

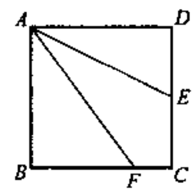


图 4.6-13

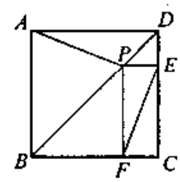


图 4.6-14

5. 如图 4.6-15，已知△ABC 中，以 AB、AC 为边向外分别作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$，求证：(1) $BG=CE$，(2) $BG \perp CE$.

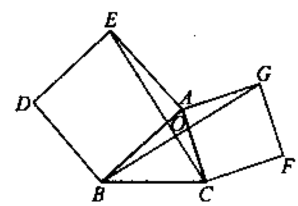


图 4.6-15

6. 如图 4.6-16，正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 在 CD 的延长线上，且 $DE=DA$，$DF=DB$，H、G 分别为 BF 和 DA、AE 的交点，求证：$HG=GF$.

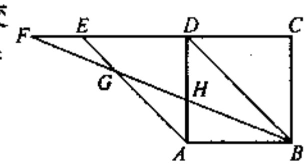


图 4.6-16

7. 如图4.6-17，△*ABC* 中，以 *AB*、*AC* 为边向外作正方形 *ABDE*、*ACFG*，$AH\perp BC$ 于 *H*，延长 *HA* 交 *EG* 于 *M*，求证：$EM=MG$

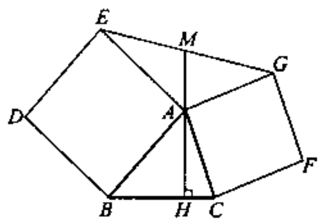


图 4.6-17

8. 如图 4.6-18，正方形 *ABCD* 中 *E*、*F* 分别是 *CD*、*AD* 的中点，*BE* 与 *CF* 交于点 *P*，求证：$AP=AB$.

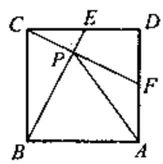


图 4.6-18

9. 如图4.6-19，点 *M* 是正方形 *ABCD* 内一点，且$\angle MCD=\angle MDC=15^\circ$，求证：△*MAB* 是等边三角形.

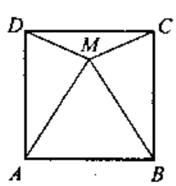


图 4.6-19

10. 如图 4.6-20，△*ABC* 中，$\angle C=90^\circ$，∠*A*、∠*B* 的平分线交于点 *D*，$DE\perp BC$ 于 *E*，$DF\perp AC$ 于 *F*. 求证：*CEDF* 是正方形.

11. 如图 4.6-21，已知正方形 *ABCD* 的边长为 1，*M*、*N* 分别在 *AB*、*CD* 的边上，若△*CMN* 为等边三角形，求这个三角形的边长.

12. 如图 4.6-22，在正方形 *ABCD* 的边 *CD* 上取一点 *P*，使 $AP=PC+BC$，*Q* 为 *CD* 的中点，求证：$\angle BAP=2\angle QAD$.

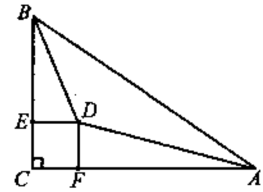


图 4.6-20

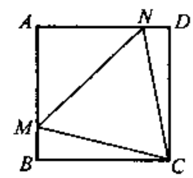


图 4.6-21

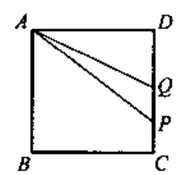


图 4.6-22

13. 如图 4.6-23，*M* 是正方形 *ABCD* 的边 *BC* 上的一点，$AM\perp ME$，$\angle DCE=45^\circ$，求证：$AM=ME$.

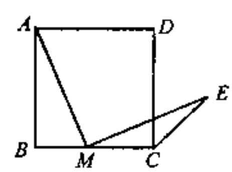


图 4.6-23

14. 如图 4.6-24，正方形 *ABCD* 中，在对角线 *BD* 上取 $BE=BC$，连 *CE*，*M* 为 *CE* 上一点 $MN\perp BC$ 于 *N*，$MK\perp BD$ 于 *K*，求证：$MN+MK=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$.

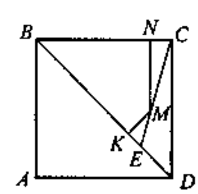


图 4.6-24