



俄罗斯数学
教材选译

数学分析

(第二卷)(第4版)

- B. A. 卓里奇 著
- 蒋铎 钱珮玲 周美珂 邝荣雨 译
- 周美珂 校



高等教育出版社
Higher Education Press



俄罗斯数学
教材选译

017

84=2

:2

2006

● 数学天元基金资助项目

数学分析

(第二卷)(第4版)

- B. A. 卓里奇 著
- 蒋铎 钱珮玲 周美珂 邝荣雨 译
- 周美珂 校



高等教育出版社

Higher Education Press

图字: 01-2006-2806 号

В. А. Зорич, Математический анализ, Часть II.

Четвертое издание, исправленное.

МЦНМО. Москва, 2002.

Originally published in Russian under the title

Mathematical Analysis by V. A. Zorich

(Part II, 4th corrected edition, Moscow 2002)

MCCME (Moscow Center for Continuous Mathematical Education Publ.)

Copyright © 2002 by V. A. Zorich

All Rights Reserved

图书在版编目(CIP)数据

数学分析.第2卷:第4版/(俄罗斯)卓里奇著;蒋
铎等译. —北京:高等教育出版社,2006.12

ISBN 7-04-020257-3

I. 数… II. ①卓… ②蒋… III. 数学分析—高等学
校—教材 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 139633 号

策划编辑 张小萍 责任编辑 崔梅萍 封面设计 王凌波
版式设计 张 岚 责任校对 朱惠芳 责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京民族印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com

开 本	787 × 1092 1/16	版 次	2006年12月第1版
印 张	37.75	印 次	2006年12月第1次印刷
字 数	750 000	定 价	69.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 20257-00

内 容 提 要

本书是作者在莫斯科大学力学-数学系讲授多遍数学分析的基础上写成的. 本书自 1981 年第 1 版出版以来, 至今已经修订为第 4 版. 在内容方面, 作者力图使其平行的以及后继的分析、代数和几何方面的现代数学课程之间联系更加紧密, 把重点移到一般数学中最有本质意义的那些概念和方法上, 并改进语言的叙述, 使之与现代数学科学文献的语言适当接近; 另一方面, 在保持数学一般理论叙述严谨性的同时, 对反映其自然科学源泉和应用的要求也有充分体现.

全书共二卷, 第二卷的内容包括: 连续映射的一般理论、赋范空间中的微分学、重积分、 \mathbb{R}^n 中的曲面和微分形式、曲线积分和曲面积分、向量分析与场论、流形上微分形式的积分法、级数和含参变量函数族的一致收敛性及基本分析运算、含参变量积分、傅里叶级数与傅里叶变换、渐近展开等. 与常见的分析教科书相比, 本卷的内容相当新颖, 系统地引进了现代数学(包括泛函分析、拓扑学和现代微分几何等)的基本概念、思想和方法, 有关应用的内容也更加贴近现代自然科学.

本书可供综合大学和师范大学数学、物理、力学及相关专业的教师和学生参考使用, 工科大学应用数学系也可当作教材或主要参考书.

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材.这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才.到了 60 年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用.客观地说,从解放初一直到文化大革命前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的.

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益.但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,引进却基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机.今年初,在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版.这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视.会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订,本系列中所列入的教材,以莫斯科大学的教材为主,也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材.有大学基础课程的教材,也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书.有些教材虽曾翻译出版,但经多次修订重版,面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴.这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序.

李大潜
2005年10月

再版序言

在第四版改正了已经发现的印刷错误.

B. 卓里奇
莫斯科, 2002 年

第三版与第二版的区别只是一些局部的修改 (只有一处的证明作了修正), 还补充了一些我认为有益的习题.

B. 卓里奇
莫斯科, 2001 年

本书第二版与第一版的区别, 除改正了已经发现的第一版的印刷错误外, 主要特点如下: 某些问题(例如, 涉及到级数和傅里叶变换的问题) 重写了; 有些重要定理(例如, 一般的有限增量定理) 的证明变得更加简洁明晰; 增加了一些新的应用例子和新的内容丰富的练习, 它们与相应章节的理论有关, 有时显著地延伸了这些理论的内容; 书末给出了考试大纲以及口试提纲和参考题; 参考文献索引也扩充了.

关于本书第二卷的取材和特点, 在第一版序言中有进一步的说明.

B. 卓里奇
莫斯科, 1998 年

第一版序言

在第一卷的序言中,对全书的特点已经作了足够详细的介绍,因此,我在这里只对第二卷的内容作一些说明.

作为这一卷的基本内容一方面有重积分,曲线积分和曲面积分,直到一般的斯托克斯公式及其应用例子;另一方面又有级数和含参变量积分的全部材料,其中包括傅里叶级数,傅里叶变换和渐近展开的知识.

因此,这一卷基本上符合综合大学数学系二年级的教学大纲.

为了不致使上述两大题材的前后顺序生硬地按学期固定下来,我实际上是把它们独立叙述的.

第九章和第十章,即这本书开头的两章,实质上用一般形式简要地重写了第一卷中关于连续函数和可微函数的几乎全部最重要的内容.它们都标以星号*,并且是作为第一卷的补充写的.但是,其中的许多概念已经是当今向数学系学生叙述分析时必须提到的.在这两章,叙述了形式化抽象理论之后常给出大量例子和启发性注释,在第一卷中,它们是摆在形式化抽象理论叙述之前的.如果读者有足够的训练,在读这两章时能跳过这些例子和启发性注释,那么,第二卷在形式上就几乎与第一卷无关.

这本书中关于多变量函数积分学的主要的新内容是从第十一章开始的.其实,在读过本教程第一卷之后可以从这一章开始读第二卷,并不影响对内容的理解.

在叙述曲线和曲面积分理论时,讲述并使用了微分形式的语言.首先,基于初等的材料引进全部基本几何概念和分析结构,然后,由它们构成通往一般斯托克斯公式的抽象定义阶梯.

第十五章是流形上微分形式积分法的一个综合性叙述.我认为它是对第十一至

十四章中,就具体对象叙述和阐明的那些必须学习的材料,所作的非常合适、非常系统的补充.

在有关级数和含参变量积分部分,除给出传统材料外,还给出(第十九章)了渐近级数和积分的渐近式的初等理论,由于它们都是有效的分析工具,这样做无疑是非常有益的.

为了理解的方便,补充材料或第一次阅读可以跳过去的部分,都用星号标了出来.

本书各章和插图是继已经出版的第一卷(卓里奇:数学分析,第一卷,莫斯科,科学出版社,1981年)编号的.

关于参考资料,这里只给出那些在第一卷中没有提到的学术文献.

为了读者的方便和简化书写,同过去一样,证明的开始和结尾分别以记号 \blacktriangleleft 和 \blacktriangleright 表示. 只要方便,定义的引进都使用了据定义相等的专门符号 $:=$ 或 \equiv , 其中双点放在被定义的对象一边.

这本书继续保持了第一卷的风格,无论对数学结构本身的简洁性和逻辑的严密性,还是对如何展示理论在自然科学中的各种应用,都给予了很大重视.

B. A. 卓里奇
莫斯科, 1982年

目 录

《俄罗斯数学教材选译》序

再版序言

第一版序言

*第九章 连续映射 (一般理论)	1
§1 度量空间	1
1. 定义和例子 (1) 2. 度量空间中的开集和闭集 (4) 3. 度量空间的子空间 (6)	
4. 度量空间的直积 (7) 练习 (8)	
§2 拓扑空间	9
1. 基本定义 (9) 2. 拓扑空间的子空间 (12) 3. 拓扑空间的直积 (12) 练习 (13)	
§3 紧集	14
1. 紧集的定义和一般性质 (14) 2. 度量紧集 (15) 练习 (17)	
§4 连通的拓扑空间	17
练习 (18)	
§5 完备的度量空间	19
1. 基本定义和例子 (19) 2. 度量空间的完备化 (22) 练习 (25)	
§6 拓扑空间的连续映射	26
1. 映射的极限 (26) 2. 连续映射 (28) 练习 (30)	

§7 压缩映像原理	31
练习 (36)	
*第十章 线性赋范空间中的微分学	38
§1 线性赋范空间	38
1. 分析中一些线性空间的例子 (38) 2. 线性空间中的范数 (39) 3. 向量空间中 的数量积 (41) 练习 (44)	
§2 线性和多重线性算子	45
1. 定义和例子 (45) 2. 算子的范数 (48) 3. 连续算子空间 (52) 练习 (56)	
§3 映射的微分	57
1. 在一点可微的映射 (57) 2. 微分法的一般法则 (58) 3. 一些例子 (59) 4. 映 射的偏导数 (65) 练习 (66)	
§4 有限增量定理和它的应用的一些例子	69
1. 有限增量定理 (69) 2. 有限增量定理应用的一些例子 (71) 练习 (74)	
§5 高阶导映射	75
1. n 阶微分的定义 (75) 2. 沿向量的导数和 n 阶微分的计算 (76) 3. 高阶 微分的对称性 (78) 4. 若干评注 (79) 练习 (81)	
§6 泰勒公式和极值的研究	81
1. 映射的泰勒公式 (81) 2. 内部极值的研究 (82) 3. 一些例子 (84) 练习 (88)	
§7 一般的隐函数定理	90
练习 (98)	
第十一章 重积分	100
§1 n 维区间上的黎曼积分	100
1. 积分定义 (100) 2. 函数黎曼可积的勒贝格准则 (102) 3. 达布准则 (106) 练习 (108)	
§2 集合上的积分	109
1. 容许集 (109) 2. 集合上的积分 (110) 3. 容许集的测度 (体积) (111) 练习 (112)	
§3 积分的一般性质	113
1. 作为线性泛函的积分 (113) 2. 积分的可加性 (113) 3. 积分的估计 (114) 练习 (116)	
§4 化重积分为累次积分	117
1. 富比尼定理 (117) 2. 一些推论 (119) 练习 (123)	
§5 重积分中的变量替换	125
1. 问题的提出和变量替换公式的预期结论 (125) 2. 可测集和光滑映射 (126) 3. 一维情形 (128) 4. \mathbb{R}^n 中最简微分同胚的情形 (130) 5. 映射的复合和变量	

替换公式 (131) 6. 积分的可加性和积分变量替换公式证明的完成 (131) 7. 重积分变量替换公式的一些推论和推广 (132) 练习 (135)	
§6 反常重积分	138
1. 基本定义 (138) 2. 反常积分收敛性的控制判别法 (140) 3. 反常积分中的变量替换 (143) 练习 (145)	
第十二章 \mathbb{R}^n 中的曲面及微分形式	148
§1 \mathbb{R}^n 中的曲面	148
练习 (155)	
§2 曲面的定向	156
练习 (161)	
§3 曲面的边界及其定向	162
1. 带边曲面 (162) 2. 曲面定向与边界定向的和谐性 (164) 练习 (167)	
§4 欧氏空间内曲面的面积	168
练习 (172)	
§5 微分形式初步	175
1. 微分形式, 定义及例子 (175) 2. 微分形式的坐标记法 (179) 3. 外微分形式 (181) 4. 在映射下, 向量的转移与形式的转移 (184) 5. 曲面上的形式 (187) 练习 (188)	
第十三章 曲线积分与曲面积分	191
§1 微分形式的积分	191
1. 原始问题, 启发性想法, 例子 (191) 2. 形式沿定向曲面积分的定义 (197) 练习 (200)	
§2 体积形式, 第一型积分与第二型积分	204
1. 物质曲面的质量 (204) 2. 作为形式的积分的曲面面积 (205) 3. 体积形式 (206) 4. 在笛卡儿坐标下体积形式的表示 (207) 5. 第一型与第二型积分 (208) 练习 (210)	
§3 分析的基本积分公式	213
1. 格林公式 (213) 2. 高斯 - 奥斯特罗格拉德斯基公式 (217) 3. \mathbb{R}^3 中的斯托克斯公式 (220) 4. 一般的斯托克斯公式 (221) 练习 (224)	
第十四章 向量分析与场论初步	229
§1 向量分析的微分运算	229
1. 数量场与向量场 (229) 2. \mathbb{R}^3 中的向量场与形式 (229) 3. 微分算子 $\mathbf{grad}, \mathbf{rot}, \mathbf{div}$ 及 ∇ (232) 4. 向量分析的一些微分公式 (235) *5. 曲线坐标下的向量运算 (237) 练习 (245)	

§2 场论的积分公式	246
1. 用向量表示的经典积分公式 (246) 2. $\text{div}, \text{rot}, \text{grad}$ 的物理解释 (248) 3. 一些进一步的积分公式 (252) 练习 (254)	
§3 势场	256
1. 向量场的势 (256) 2. 势场的必要条件 (257) 3. 向量场具有势的判别准则 (258)	
4. 区域的拓扑结构与势 (260) 5. 向量势、恰当形式与闭形式 (262) 练习 (265)	
§4 应用例子	268
1. 热传导方程 (268) 2. 连续性方程 (270) 3. 连续介质动力学基本方程 (271)	
4. 波动方程 (272) 练习 (273)	
*第十五章 流形上微分形式的积分	276
§1 线性代数准备知识	276
1. 形式代数 (276) 2. 斜对称形式代数 (277) 3. 线性空间中的线性映射及共轭空间中的共轭映射 (280) 练习 (281)	
§2 流形	283
1. 流形的定义 (283) 2. 光滑流形与光滑映射 (287) 3. 流形及其边界的定向 (289)	
4. 单位分解及流形以 \mathbb{R}^n 中曲面的形式的实现 (292) 练习 (295)	
§3 微分形式及其在流形上的积分	296
1. 流形在其一点的切空间 (296) 2. 流形上的微分形式 (299) 3. 外微分 (301)	
4. 形式在流形上的积分 (302) 5. 斯托克斯公式 (303) 练习 (305)	
§4 流形上的闭形式与恰当形式	310
1. 庞加莱定理 (310) 2. 同调与上同调 (313) 练习 (317)	
第十六章 一致收敛性, 函数项级数与函数族的基本分析运算	319
§1 逐点收敛与一致收敛	319
1. 逐点收敛 (319) 2. 基本问题的提出 (320) 3. 依赖于参数的函数族的收敛性和一致收敛性 (322) 4. 一致收敛的柯西准则 (325) 练习 (326)	
§2 函数项级数的一致收敛性	327
1. 级数一致收敛性的基本定义和判别准则 (327) 2. 级数一致收敛的魏尔斯特拉斯检验法 (329) 3. 阿贝尔 - 狄利克雷检验法 (330) 练习 (334)	
§3 极限函数的函数性质	334
1. 问题的具体化 (334) 2. 两个极限过程可交换的条件 (335) 3. 连续性与极限过渡 (336) 4. 积分法与极限过渡 (339) 5. 微分法与极限过渡 (341) 练习 (345)	
*§4 连续函数空间的紧子集和稠密子集	348
1. 阿尔采拉 - 阿斯柯利定理 (348) 2. 度量空间 $C(K, Y)$ (350) 3. 斯通定理 (351) 练习 (353)	

第十七章 含参变量的积分	356
§1 含参变量的常义积分	356*
1. 含参变量积分的概念 (356) 2. 含参变量积分的连续性 (357) 3. 含参变量积分的微分法 (358) 4. 含参变量积分的积分法 (361) 练习 (361)	
§2 含参变量的反常积分	363
1. 反常积分关于参数的一致收敛性 (363) 2. 反常积分号下取极限和含参变量的反常积分的连续性 (369) 3. 含参变量的反常积分的微分法 (371) 4. 含参变量的反常积分的积分法 (373) 练习 (377)	
§3 欧拉积分	380
1. β 函数 (380) 2. Γ 函数 (381) 3. β 函数和 Γ 函数的联系 (385) 4. 一些例子 (385) 练习 (387)	
§4 函数的卷积和广义函数的初步知识	391
1. 物理问题中的卷积 (启发性想法) (391) 2. 卷积的一些一般性质 (393) 3. δ -型函数族和魏尔斯特拉斯逼近定理 (396) *4. 分布的初步概念 (401) 练习 (410)	
§5 含参变量的重积分	414
1. 含参变量的常义重积分 (415) 2. 含参变量的反常重积分 (415) 3. 具变奇异性的反常积分 (416) *4. 高维情形的卷积, 基本解和广义函数 (420) 练习 (429)	
第十八章 傅里叶级数与傅里叶变换	434
§1 一些主要的与傅里叶级数有关的一般概念	434
1. 正交函数系 (434) 2. 傅里叶系数和傅里叶级数 (440) *3. 分析中正交函数系的一个重要来源 (449) 练习 (452)	
§2 傅里叶三角级数	457
1. 经典傅里叶级数收敛性的基本形式 (457) 2. 傅里叶三角级数逐点收敛性的研究 (461) 3. 函数的光滑性和傅里叶系数的下降速度 (469) 4. 三角函数系的完全性 (473) 练习 (479)	
§3 傅里叶变换	486
1. 函数的傅里叶积分表示 (486) 2. 函数的微分性质和渐近性质与其傅里叶变换的联系 (497) 3. 傅里叶变换的最重要的演算性质 (500) 4. 应用举例 (504) 练习 (509)	
第十九章 渐近展开	515
§1 渐近公式和渐近级数	517
1. 基本定义 (517) 2. 渐近级数的一般知识 (521) 3. 渐近幂级数 (525) 练习 (527)	
§2 渐近积分 (拉普拉斯方法)	530
1. 拉普拉斯方法的基本思想 (530) 2. 拉普拉斯积分的局部化原理 (533) 3. 典型积分及其渐近式 (534) 4. 拉普拉斯积分的渐近主项 (537) *5. 拉普拉斯积分的	

渐近展开 (540) 练习 (550)

口试提纲	556
考试大纲	561
参考文献	564
基本符号索引	569
索引	573
补序	582
中文版修订者的话	584

*第九章 连续映射 (一般理论)

我们对数值函数和形如 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的映射已经建立的那些连续映射的性质, 在这一章中将以统一的观点加以推广和叙述. 同时将引进一系列简单的、但数学中广泛使用的重要概念.

§1 度量空间

1. 定义和例子

定义 1 称集合 X 上装备了度量或度量空间的结构, 或称 X 是度量空间, 如果指定了函数

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

且满足条件:

a) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$,

b) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ (对称性),

c) $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ (三角不等式), 其中 x_1, x_2, x_3 是 X 中的任意元素.

这时, 称函数 (1) 为 X 中的度量或距离.

因此, 度量空间是由集合 X 和在 X 上给定的度量组成的序对 $(X; d)$.

按照几何术语, 经常把集合 X 的元素称为点.

我们看到, 在三角不等式 c) 中如果假设 $x_3 = x_1$, 那么考虑到度量公理 a) 和 b), 便得到

$$0 \leq d(x_1, x_2),$$

也就是说, 满足公理 a), b), c) 的度量是非负的.

我们来看几个例子.

例 1 实数集 \mathbb{R} 成为度量空间, 如果对于数 x_1, x_2 规定 $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.

例 2 在 \mathbb{R} 上还可以引进许多其他的度量. 例如, 平凡度量, 在这种度量下任何不同两点间的距离都规定等于 1.

\mathbb{R} 上的下列度量包含丰富的内容. 假设 $x \mapsto f(x)$ 是对 $x \geq 0$ 定义的非负函数, 而且仅当 $x = 0$ 时它等于 0. 如果这个函数严格上凸, 那么对于 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 规定

$$d(x_1, x_2) = f(|x_1 - x_2|), \quad (2)$$

便得到 \mathbb{R} 上的度量.

这里, 公理 a), b) 显然满足, 而三角不等式可以从下列不难验证的事实推出: f 严格单调, 并且当 $0 < a < b$ 时满足不等式

$$f(a+b) - f(b) < f(a) - f(0) = f(a).$$

特别地, 可以规定

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 - x_2|}$$

或

$$d(x_1, x_2) = \frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2|}.$$

在后一种情况下, 任意两个不同点之间的距离是小于 1 的正数.

例 3 在 \mathbb{R}^n 中, 点 $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)$, $x_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n)$ 间除了通常的距离

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_1^i - x_2^i|^2} \quad (3)$$

外, 还可以引进距离

$$d_p(x_1, x_2) = \left(\sum_{i=1}^n |x_1^i - x_2^i|^p \right)^{1/p} \quad (4)$$

其中 $p \geq 1$. 由闵可夫斯基不等式 (见第 5 章 §4 第 2 段) 可以推知函数 (4) 满足三角不等式.

例 4 如果在印制的文件中遇到有印错某些字母的词, 假如错的不多, 那么纠正错误以恢复词的原意不会有特别的困难. 但是, 纠正错误和恢复词意的操作并不总是唯一确定的, 因此, 在其他条件相同的情况下, 必须优先采用那种修改量较少的译解. 根据这个道理, 在编码理论中, 在由 0 和 1 组成的长为 n 的所有序列的集合上采用 $p = 1$ 时的度量 (4).