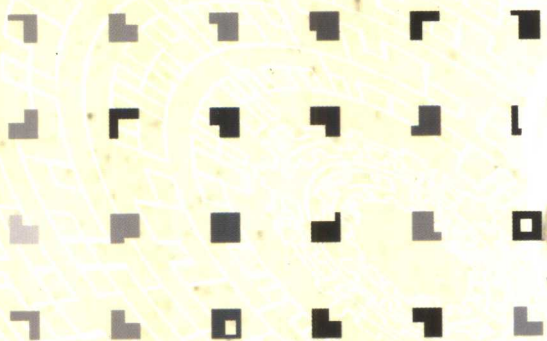
 七彩数学


姜伯驹 主编

Q I C A I S H U X U E

# 迭代 浑沌 分形

李 忠□著



 科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)



七彩数学

姜伯驹 主编

Q I C A I S H U X U E

# 迭代 浑沌 分形

李忠□著



科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是一本为大学生写的数学通俗读物。它以浅显的语言,通过函数迭代,特别是复变函数的迭代,介绍动力系统中混沌现象的产生及其数学含义,介绍复迭代中所产生的复杂几何图形——分形,并介绍受到广泛关注的 Mandelbrot 集合。

本书读者对象为理工科及师范院校的大学生、研究生、教师及一般科技工作者。具有微积分基本知识的人能读懂书中的大部分内容。

### 图书在版编目(CIP)数据

---

迭代 混沌 分形/李忠著. —北京:科学出版社,2007

(七彩数学)

ISBN 978-7-03-017884-8

I. 迭… II. 李… III. ①混沌学-通俗读物②分形理论-通俗读物  
IV. ①0415.5-49②0189.12-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 099665 号

---

责任编辑:吕虹 陈玉琢 莫单玉 / 责任校对:纪振红

责任印制:赵德静 / 封面设计:王浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

涿海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2007年3月第一版 开本:A5(890×1240)

2007年3月第一次印刷 印张:4

印数:1—5 000 字数:52 000

定价:15.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)



### 李 忠

北京大学数学科学学院教授，博士生导师。1936年8月出生。1960年毕业于北京大学数学力学系，之后一直在北京大学任教。其研究领域为基础数学复分析，对拟共形映射与黎曼曲面的模空间理论有系统的研究，其研究成果曾获得国家教委科技进步奖（一等奖），并两次获得国家自然科学奖（三等奖）。1991年被国家人事部与国家教委评为“有突出贡献的中青年专家”。1993年被国家教委评为“国家优秀教师”。

李忠教授曾任北京大学数学系主任，中国数学会常务理事兼秘书长及北京数学会理事长。



七彩数学

姜伯驹 主编

《数学走进现代化学与生物》

姜伯驹 钱敏平 龚光鲁 著

《数论与密码》

冯克勤 著

《迭代 浑沌 分形》

李忠 著

《数学的力量——漫话数学的价值》

李文林 任辛喜 著

《古希腊名题与现代数学》 张贤科 编著

## 丛书序言

2002年8月,我国数学界在北京成功地举办了第24届国际数学家大会.这是第一次在一个发展中国家举办的这样的大会.为了迎接大会的召开,北京数学会举办了多场科普性的学术报告会,希望让更多的人了解数学的价值与意义.现在由科学出版社出版的这套小丛书就是由当时的一部分报告补充、改写而成.

数学是一门基础科学.它是描述大自然与社会规律的语言,是科学与技术的基础,也是推动科学技术发展的重要力量.遗憾的是,人们往往只看到技术发展的种种现象,并享受由此带来的各种成果,而忽略了其背后支撑这些发展与成果的基础科学.美国前总统的一位科学顾问说过:“很少有人认识到,当前被如此广泛称颂的高科技,本质上是数学技术”.

在我国,在不少人的心目中,数学是研究古老难题的学科,数学只是为了应试才要学的一门学科.造成这种错误印象的原因很多.除了数学本身比较抽象,不易为公众所了解之外,还有学



校教学中不适当的方式与要求、媒体不恰当的报道等等。但是,从我们数学家自身来检查,工作也有欠缺,没有到位。向社会公众广泛传播与正确解释数学的价值,使社会公众对数学有更多的了解,是我们义不容辞的责任。因为数学的文化生命的位置,不是积累在库藏的书架上,而应是闪烁在人们的心灵里。

20 世纪下半叶以来,数学科学像其他科学技术一样迅速发展。数学本身的发展以及它在其他科学技术的应用,可谓日新月异,精彩纷呈。然而许多鲜活的题材来不及写成教材,或者挤不进短缺的课时。在这种情况下,以讲座和小册子的形式,面向中学生与大学生,用通俗浅显的语言,介绍当代数学中七彩的话题,无疑将会使青年受益。这就是我们这套丛书的初衷。

这套丛书还会继续出版新书,我们诚恳地邀请数学家同行们参与,欢迎有合适题材的同志踊跃投稿。这不单是传播数学知识,也是和年青人分享自己的体会和激动。当然,我们的水平有限,未必能完全达到预期的目标。丛书中的不当之处,也欢迎大家批评指正。

姜伯驹

2007 年 3 月

## 序 言

这本书是写给大学生的一本数学通俗读物. 其目的是以函数的迭代为模型, 向读者介绍什么是浑沌和分形, 以及研究它们的意义. 具有微积分基本知识的读者均可读懂它的主要内容.

在 20 世纪 60 年代, Lorenz 在研究大气流动时发现了奇异吸引子的现象. 它告诉人们在一个确定性的系统中可能存在着某种不可预测的行为, 后来人们把这类混乱和无序的现象称为浑沌 (chaos). 分形 (fractal) 是指一类复杂而不规则的图形, 其 Hausdorff 维数大于其拓扑维数. 随着非线性科学的兴起, 近几十年来浑沌与分形广泛地出现在许多领域, 如天体力学、宇宙学、热力学、生命科学、流体力学、材料科学及各种应用科学. 浑沌与分形这两个词汇成为种种非线性科学中的一种语言, 并成为理解非线性过程中复杂现象的一条途径. 然而, 对于大多数非数学专业的工作者而言, 人们对于这两个时髦的名词充满着好奇、迷惑和某种神秘感. 通过一个简单的数学



模型,来解释混沌与分形的确切含义以及它们是怎样形成的,就是本书写作的初衷。

如果抛开具体的物理现象不谈,单从数学上看,混沌与分形的产生并不是一种很特别的事:一个简单的二次式的迭代就可能导致混沌与分形。早在1920年前后,数学家 Fatou 与 Julia 就系统地研究了复的多项式或有理函数的迭代。他们彼此独立地对这种复迭代在其不稳定集合(后来人们称之为 Julia 集)上的行为作了完整深刻的刻画。根据他们的研究结果,复迭代在其 Julia 集合上的复杂行为实际上就是当今被广泛谈论的混沌。在他们的研究工作的60年之后,Julia集被人们用电子计算机画成了图形。这些 Julia 集的图形出人意外的复杂和多样,并且十分美丽。绝大多数 Julia 集的图形都是分形,现在成了分形理论中的“经典”例子。这样,在20世纪80年代初,在 D. Sullivan 等人工作的影响下,关于复迭代的研究一下子又热乎起来,吸引了不少数学家进一步研究,并取得了重要进展。

这本小册子共分4章。第1章讨论关于一般映射的迭代,介绍什么是混沌,通过若干简单实例介绍非线性迭代怎样导致混沌。第2章介绍 Fatou 与 Julia 关于复迭代的基本结果及 Sullivan

的定理. 第 3 章阐述分形的定义和 Hausdorff 维数的计算. 第 4 章讨论与二次迭代有深刻联系的 Mandelbrot 集合, 介绍 Douady 与 Hubbard 的研究结果和尚未解决的问题.

作者过去曾以同样的题目多次向大学生作过通俗的演讲. 本书是在讲稿的基础上补充而成. 我们的重点依旧是放在对基本概念与重要结论的阐述上. 与教材和专著不同, 它不追求理论上的完整和形式的严谨. 我们将不得不省略某些较深的定理的形式证明, 以保证本书有较强的可读性.

每一章后面作者建议了一些练习, 其中包括一些计算机绘图. 通过这些练习, 读者将会对书中提到的理论有更具体的理解.

李 忠

2005 年 3 月于北京大学



# 目 录

## 序言

1 为什么要研究迭代 .....	001
§ 1 迭代及其轨道 .....	001
§ 2 Logistics 方程 .....	004
§ 3 什么是动力系统 .....	006
§ 4 轨道行为的复杂性 .....	011
§ 5 什么是混沌 .....	024
练习一 .....	032
2 有趣的复迭代 .....	036
§ 1 Cayley 问题 .....	037
§ 2 Fatou 与 Julia 的研究 .....	043
§ 3 美丽多样的 Julia 集 .....	045
§ 4 周期轨道 .....	052
§ 5 Julia 集上的混沌现象 .....	063
§ 6 稳定域 .....	068
练习二 .....	074
3 什么是分形 .....	076
§ 1 Hausdorff 维数 .....	076
§ 2 Hausdorff 维数的计算 .....	084

§ 3 自相似的分形 .....	087
§ 4 Julia 集与分形 .....	091
练习三 .....	093
4 Mandelbrot 集中的奥秘 .....	094
§ 1 什么是 Mandelbrot 集 .....	094
§ 2 Mandelbrot 集与二次式的迭代 .....	098
§ 3 双曲分支与双曲猜想 .....	101
§ 4 Mandelbrot 集的连通性与外射线 .....	107
§ 5 Mandelbrot 集的边界 .....	110
练习四 .....	112
参考书目 .....	113

# 1 为什么要研究迭代

我们先从一般映射的迭代讲起. 映射的迭代是一个有着广泛应用背景的数学模型, 有重要研究价值. 一个非线性函数的迭代可能导致出人意外的某种复杂的现象, 这便是人们所说的混沌. 本章的主要目的在于解释为什么要研究迭代, 并通过若干实例说明什么是混沌以及混沌在迭代中是怎样形成的.

## § 1 迭代及其轨道

在中学里我们经常遇到的序列是等差序列

$$a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \dots \quad (1.1)$$

和等比序列

$$a_0, a_0q, a_0q^2, \dots \quad (1.2)$$

这两个序列的共同之处则是,自第 2 项开始,每一项都是对其前一项作同一种运算(或加  $d$ , 或乘以  $q$ )而得来. 这种不断重复同一种运算的算法就是迭代.

在大学微积分学中,我们遇到过牛顿求根序列:

$$x_{n+1} = x_n - P(x_n)/P'(x_n) \quad (1.3)$$

$$n = 0, 1, \dots,$$

其中  $P(xn)$  是一个多项式. 在一定的条件下,由 (1.3) 确定的序列  $\{x_n\}$  的极限就是多项式  $P(xn)$  的根. 例如,当  $P(xn)$  是二次式  $x^2 - 2$  时,迭代关系式就是

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \quad n = 0, 1, \dots,$$

也即

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.4)$$

读者可以自己证明,任意取一个值  $x_0 \neq 0$  作为初始值,由 (1.4) 所决定的序列的极限一定是  $\sqrt{2}$ , 即  $x^2 - 2 = 0$  的根.

我们现在把上述这些例子一般化.

设  $f: A \rightarrow A$  是集合  $A$  到自身的一个映射, 其中集合  $A$  可以是某个实数集合或复数集合. 这个映射的一个特点是它将集合  $A$  映入自身. 这样, 我们可以考虑  $f$  对自己的复合映射:

$$p \mapsto f(f(p)), \quad \forall p \in A.$$

今后我们将这个复合映射记作  $f^2: A \rightarrow A$ . 这里请读者留意, 这里的  $f^2$  只是映射的一个记号, 而不是  $f$  的函数值的平方. 例如  $f(x) = \sin x$  时,  $f^2(x) = \sin(\sin x)$ .

对于映射  $f^2: A \rightarrow A$  又可以复合以  $f$  而得到一个新映射:  $p \mapsto f(f^2(p)), \forall p \in A$ , 并记之  $f^3: A \rightarrow A$ . 如此下去, 我们便得到一个映射的序列

$$f, f^2, f^3, \dots, f^n, \dots,$$

其中  $f^{n+1} = f(f^n), n=1, 2, \dots$ . 为了方便, 我们将映射  $f: A \rightarrow A$  记作  $f^1: A \rightarrow A$ ; 并且约定,  $A$  集合到自身的恒同映射:  $p \mapsto p$  记作  $f^0: A \rightarrow A$ . 这样, 我们便由给定的映射  $f: A \rightarrow A$  得到了一个完整的映射序列

$$f^0, f^1, f^2, \dots, f^n, \dots, \quad (1.5)$$

其中  $f^{n+1} = f(f^n), n=0, 1, \dots$ . 这个序列称为由  $f$  生成的**迭代序列**.

设  $\{f^n: A \rightarrow A | n=0, 1, \dots\}$  是  $f$  生成的一



个迭代序列. 对于任意一点  $x_0 \in A$ , 数列  $\{f^n(x_0) | n=0, 1, \dots\}$  称作  $x_0$  的轨道. 很容易看出, 等差序列(1.1)就是  $f(x) = x + d$  的迭代序列的  $a_0$  的轨道. 类似地, 将  $f(x)$  换成  $qx$  时我们便得到等比序列(1.2).

取  $f(x) = x - P(x)/P'(x)$  时, 它所生成的迭代序列就是牛顿求根序列.

## § 2 Logistics 方程

为什么要研究迭代呢? 因为它是许多实际事物的一个数学模型. 前面我们已经看到了, 牛顿近似求根法就是一个典型的迭代方法. 下面我们再举一个例子.

19 世纪初在西方曾经流行过 Malthus 人口论. 它断言一个地区的人口将以几何级数增长, 而该地区的粮食则以算术级数增长. 大家知道, 几何级数的增长速度远远大于算术级数的增长速度. 在这种情况下, 有人便依据这种理论认为, 战争与瘟疫是不可避免的.

后来人们有了更长时间的统计资料, 证明人口的演变并非像 Malthus 所说按照几何级数

增长.人口的演变依赖于许多复杂因素,特别是环境的因素,而 Malthus 的模型没有考虑环境因素. 1845 年荷兰数学家 Verhulst 对于 Malthus 的人口模型作了重要修正,并研究了一般种群数量的模型. 他认为在某个特定环境下一个种群的数量可以用下列迭代方程

$$x_{n+1} = ax_n(b - x_n) \quad (1.6)$$

来描述,其中  $x_n$  代表该种群在第  $n$  代(或第  $n$  个单位时间)的数量. 人们称(1.6)为 logistics 方程. 这个迭代模型已被深入地研究,并有着广泛的应用,比如用它来研究与预报某个地区中某类昆虫的数量,或实验室中一个器皿里某类细菌的数量. 这里 logistics 一词的原意是后勤供应. 为什么把(1.6)称作后勤方程呢? 让我们仔细分析一下这个方程.

迭代方程(1.6)告诉我们,由  $x_n$  决定  $x_{n+1}$  时要由两个因子决定,一个是因子  $ax_n$ ,另一个因子是  $(b - x_n)$ . 第一个因子的作用是告诉人们在忽略其他因素时,种群数量会按照一定比例增大. 而第二个因子则反映了种群的环境,特别是供应状况,对种群数量的影响. 这里的基本假定是种群环境的供应总量是固定的. 比如草原上的羊群,每年草原提供羊群的草的总量是一

