

S
Gaozhi Jiaoyu
全国高职、高专教育高等数学系列教材

Gaozhi Jiaoyu

高等数学 (上册)

主 编	刘书田	
副主编	胡显佑	高旅端
编著者	刘书田	侯明华

北京大学出版社

全国高职、高专教育高等数学系列教材

高等数学

(上册)

主 编 刘书田
副主编 胡显佑 高旅端
编著者 刘书田 侯明华

北京

• 北 京 •

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/刘书田,侯明华编著. —北京:北京大学出版社,2001.6

全国高职高专教育高等数学系列教材

ISBN 7-301-05054-2

I. 高… II. ①刘… ②侯… III. 高等数学-高等学校:技术学校-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 031067 号

书 名: 高等数学(上册)

著作责任者: 刘书田 侯明华 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-05054-2/O · 0509

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62754140 邮购部 62752019

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印刷者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

850×1168 32 开本 12 印张 300 千字

2001 年 6 月第 1 版 2003 年 7 月第 2 次修订

2003 年 9 月第 6 次印刷

印 数: 28001—33000 册

定 价: 15.50 元

内 容 简 介

本书是全国高等职业、高等专科学校教育“高等数学”基础课教材。本书依照教育部颁布的高职、高专“高等数学”教学大纲,并结合作者多年来为经济类、管理类和工科类高职、高专学生讲授“高等数学”课所积累的教学经验编写而成。全书分上、下两册,供经济类、管理类和工科类一年级学生两学期使用。上册共分五章,内容包括函数、极限、连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用;下册共分四章,内容包括微分方程,向量代数与空间解析几何,多元函数微积分,无穷级数。书中加“*”号的内容,对非工科类学生不讲授,仅对工科类学生讲授,有的内容任课教师可酌情选用。每章按节配置足够数量的习题,书末附有答案和必要的提示。为便于学生学习,书末附录给出了常用的数学公式、曲线图形。

本书作者长期为高职、高专学生讲授“高等数学”课,深知高职、高专学生在学习高等数学内容时的疑难与困惑,因此本书能针对学生的接受能力、理解程度按大纲要求讲述“高等数学”课的基本内容,叙述通俗易懂、例题丰富、图形直观、富有启发性,便于自学,注重对学生基础知识的训练和综合能力的培养。

本书可作为高等职业、高等专科学校经济类、管理类和工科类学生“高等数学”课的教材,也可作为参加自学考试、文凭考试(仅用本书上册)、职大师生讲授和学习“高等数学”课程的教材或教学参考书。对数学爱好者本书也是较好的自学教材。

修 订 说 明

根据教育部最新颁布的高等职业教育“高等数学课程教学基本要求”,以及使用本书的教师、同学反馈的意见,我们对全书内容进行了修订。此次修订主要是对部分重点内容进行调整,改写了一些定理的叙述和证明,增加了例题;对各节习题统一配置了“单项选择题”,并给出答案;删去了部分较难或繁琐的定理证明,给出直观的几何或物理解释。此次修订更正了原书中的排版、印刷错误。

编 者

2003年7月于北京

高职、高专教育高等数学系列 教材出版委员会

主 任：刘 林

副主任：关淑娟

委 员(以姓氏笔画为序)：

刘 林	刘书田	刘雪梅	田培源
关淑娟	林洁梅	周惠芳	胡显佑
赵佳因	侯明华	高旅端	

全国高职、高专教育高等数学系列教材

微积分(经济类适用)	刘书田等编著	定价 13.50 元
微积分学习辅导(经济类适用)	刘书田等编著	定价 13.50 元
高等数学(上册)	刘书田等编著	定价 15.50 元
高等数学(下册)	刘书田等编著	定价 12.00 元
高等数学学习辅导(上册)	刘书田等编著	定价 13.00 元
高等数学学习辅导(下册)	刘书田等编著	定价 11.00 元
线性代数	胡显佑等编著	定价 9.00 元
线性代数学习辅导	胡显佑等编著	定价 9.00 元
概率统计	高旅端等编著	定价 12.00 元
概率统计学习辅导	高旅端等编著	定价 10.00 元

前 言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展,满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要,我们依照教育部颁布的高等职业教育“高等数学”教学大纲,为高职、高专经济类、管理类及工科类学生编写了本套高等数学系列教材.本套书分为教材三个分册:《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率统计》;配套辅导教材三个分册:《高等数学学习辅导》(上、下册)、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》,总共6分册.需要向任课老师和读者说明的是,《高等数学》(上、下册)是供经济类、管理类和工科类一年级学生两学期使用,上册需讲授64~68学时,下册需讲授32~36学时.书中加“*”号的内容,对非工科类学生可不讲授,仅对工科类学生讲授,这些内容任课教师也可酌情选用.《线性代数》讲授30~32学时,《概率统计》讲授36~40学时.以上建议仅供授课老师参考.

编写本套系列教材的宗旨是:以提高高等职业教育教学质量为指导思想,以培养高素质应用型人才为总目标,力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”.因此,我们综合了高等院校高职、高专经济类、管理类及工科类高等数学教学大纲的要求,在三个分册的主教材中分别系统介绍了“微积分”、“线性代数”、“概率统计”的基本理论、基本方法及其应用.本套系列教材具有以下特点:

1. 教材的编写紧扣教学大纲,慎重选择教材内容.既考虑到高等数学本学科的科学性,又能针对高职班学生的接受能力和理解程度,适当选取教材内容的深度和广度;既注重从实际问题引入基本概念,揭示概念的实质,又注重基本概念的几何解释、经济背景和物理意义,以使教学内容形象、直观,便于学生理解和掌握,并

达到“学以致用”的目的.

2. 为使学生更好地掌握教材的内容,我们编写了配套的辅导教材,教材与辅导教材的章节内容同步,但侧重点不同.辅导教材每章按照教学要求、内容提要与解题指导、自测题与参考解答三部分内容编写.教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点;内容提要要把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出提示,解题指导是通过典型例题的解法给出点评、分析与说明,指出初学者易犯的错误,教会学生数学思维的方法,总结出解题规律;自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题,目的是检测学生在理解本章内容提要与解题指导的基础上,独立解题的能力.教材与辅导教材相辅相成,同步使用,以达到培养学生的思维、逻辑推理能力,运算能力及运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

3. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性,便于自学;注意用语确切,行文严谨.教材每节后配有适量习题,书后附有习题答案和解法提示.辅导教材按章配有自测题并给出较详细的参考解答,便于教师和学生使用.

本套系列教材的编写和出版,得到了北京大学出版社的大力支持和帮助,同行专家和教授提出了许多宝贵的建议,在此一并致谢!

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正.

编 者

2001年5月于北京

目 录

第一章 函数·极限·连续	(1)
§ 1.1 函数	(1)
一、实数概述	(1)
二、函数概念	(5)
三、函数的几何特性	(13)
四、反函数	(19)
习题 1.1	(22)
§ 1.2 初等函数	(25)
一、基本初等函数	(25)
二、复合函数	(30)
三、初等函数	(33)
习题 1.2	(34)
§ 1.3 极限概念	(37)
一、数列的极限	(37)
二、函数的极限	(42)
三、无穷小与无穷大	(51)
四、极限的性质	(55)
习题 1.3	(55)
§ 1.4 极限运算	(58)
一、极限运算法则	(58)
二、两个重要极限	(64)
三、无穷小的比较	(71)
习题 1.4	(74)
§ 1.5 函数的连续性	(78)
一、连续性概念	(78)

二、连续函数的运算性质	(83)
三、初等函数的连续性	(84)
四、闭区间上连续函数的性质	(85)
习题 1.5	(87)
§ 1.6 曲线的渐近线	(89)
习题 1.6	(92)
第二章 导数与微分	(93)
§ 2.1 导数概念	(93)
一、两个实例	(93)
二、导数概念	(96)
习题 2.1	(106)
§ 2.2 初等函数的导数	(108)
一、导数公式与运算法则	(108)
二、高阶导数	(117)
习题 2.2	(120)
§ 2.3 隐函数的导数 · 由参数方程 所确定的函数的导数	(126)
一、隐函数的导数	(126)
二、由参数方程所确定的函数的导数	(131)
习题 2.3	(133)
§ 2.4 微分	(135)
一、微分概念	(135)
二、微分计算	(139)
三、微分的应用	(141)
习题 2.4	(144)
§ 2.5 边际概念 · 函数的弹性	(145)
一、经济学中常见的几个函数	(146)
二、边际概念	(149)
三、函数的弹性	(152)
习题 2.5	(157)

第三章 中值定理·导数应用	(160)
§ 3.1 微分中值定理	(160)
习题 3.1	(166)
§ 3.2 洛必达法则	(167)
习题 3.2	(172)
§ 3.3 函数的单调性与极值	(174)
一、函数单调性的判别法	(174)
二、函数的极值	(177)
习题 3.3	(183)
§ 3.4 曲线的凹向与拐点·函数作图	(185)
一、曲线的凹向与拐点	(185)
二、函数作图	(190)
习题 3.4	(194)
§ 3.5 最大值与最小值及应用问题	(196)
一、函数的最大值与最小值	(196)
二、几何应用问题	(198)
三、经济应用问题	(201)
习题 3.5	(210)
*§ 3.6 曲线的曲率	(214)
一、曲线的曲率	(214)
二、曲率圆	(218)
习题 3.6	(220)
第四章 不定积分	(222)
§ 4.1 不定积分概念与性质	(222)
一、不定积分概念	(222)
二、不定积分的性质	(228)
三、基本积分公式	(228)
习题 4.1	(231)
§ 4.2 换元积分法	(233)
一、第一换元积分法	(233)

二、第二换元积分法	(240)
习题 4.2	(246)
§ 4.3 分部积分法	(250)
习题 4.3	(256)
第五章 定积分及其应用	(258)
§ 5.1 定积分概念与性质	(258)
一、两个实例	(258)
二、定积分概念	(263)
三、定积分的性质	(267)
习题 5.1	(272)
§ 5.2 定积分的计算	(274)
一、微积分学基本定理	(274)
二、定积分的换元积分法	(279)
三、定积分的分部积分法	(284)
习题 5.2	(287)
§ 5.3 广义积分	(292)
一、无限区间上的积分	(292)
二、无界函数的积分	(295)
习题 5.3	(298)
§ 5.4 定积分的应用	(299)
一、微元法	(300)
二、定积分的几何应用	(301)
三、定积分的物理应用	(313)
四、积分学在经济中的应用	(317)
习题 5.4	(322)
附录一 初等数学中的常用公式	(329)
附录二 双曲函数和反双曲函数	(334)
附录三 常见的一些曲线的图形	(335)
习题参考答案与提示	(339)

第一章 函数 · 极限 · 连续

函数是高等数学最基本的概念. 本章从讨论函数概念开始, 通过对一般函数特性的概括, 并引进本教材主要讨论的初等函数, 为学习“高等数学”打下基础.

极限与连续也是高等数学最基本的概念. 在高等数学中, 极限是深入研究函数和解决各种问题的基本思想方法. 为了便于理解和掌握极限概念, 我们从讨论一种最简单的情况——数列的极限入手, 进而讨论函数的极限. 函数的连续性与函数的极限密切相关, 这里要讨论函数连续性概念和连续函数的重要性质. 连续函数是高等数学中着重研究的一类函数.

§ 1.1 函 数

一、实数概述

高等数学主要在实数范围内研究函数, 我们先讲述学习本课程必须具备的一些实数知识.

1. 实数与数轴

实数由有理数与无理数两大类组成. 有理数包括零、正负整数和正负分数. 有理数都可用分数形式 $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数, $q \neq 0$) 表示, 也可用有限小数或无限循环小数表示. 无限不循环小数是无理数. 全体实数构成的集合称为实数集, 记作 R .

若在一一直线上(通常画水平直线)确定一点为原点, 标以 O , 指定一个方向为正方向(通常把指向右方为正方向), 并规定一个单位长度, 则称这样的直线为**数轴**. 任一实数都对应数轴上惟一的一

点;反之,数轴上每一点都惟一地表示一个实数.正由于全体实数与数轴上的所有点有一一对应关系,所以在以下的叙述中,将把“实数 a ”与“数轴上的点 a ”两种说法看作有相同的含义,而不加以区别.

2. 实数的绝对值

设 a 是一个实数,则记号 $|a|$ 称为 a 的**绝对值**,定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

例如,数 0 的绝对值 $|0|=0$;数 $5(5>0)$ 的绝对值 $|5|=5$;数 $-5(-5<0)$ 的绝对值 $|-5|=-(-5)=5$.

数 a 的绝对值 $|a|$ 的**几何意义**:在数轴上, $|a|$ 表示点 a 到原点的距离.不论点 a 在原点的左侧($a<0$),还是点 a 在原点的右侧($a>0$),还是在原点($a=0$),都如此(图 1-1).

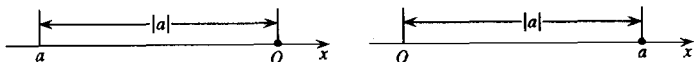


图 1-1

设 a, b 是两个实数,则由上述绝对值的定义可得

$$|a - b| = \begin{cases} a - b, & a \geq b, \\ b - a, & a < b. \end{cases}$$

由绝对值的定义,易得下列**绝对值的性质**:

- (1) $|a| = \sqrt{a^2}$;
- (2) $|a| = |-a| \geq 0$, 当且仅当 $a=0$ 时等号成立;
- (3) $-|a| \leq a \leq |a|$.

这是因为

当 $a<0$ 时,有 $-|a|=a<|a|$;

当 $a>0$ 时,有 $-|a|<a=|a|$;

当 $a=0$ 时,有 $-|a|=a=|a|$.

将上三式合并在一起,就是 $-|a| \leq a \leq |a|$.

(4) 设 $h > 0$, 则

$|a| < h$ 等价于不等式 $-h < a < h$;

$|a| > h$ 等价于不等式 $a < -h$ 或 $a > h$.

从绝对值的几何意义看(图 1-2), 这个性质是显然的. 因 $|a| < h$ 表示到原点的距离小于 h 的所有点 a 的集合; 而这正是不等式 $-h < a < h$ 的几何说明. 同样可解释后一个等价的两个关系式(图 1-3).

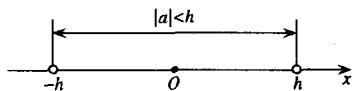


图 1-2

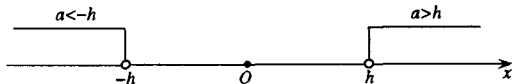


图 1-3

(5) 对实数 a, b 有不等式

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |a-b| \geq |a| - |b|,$$

即和的绝对值不大于各项绝对值的和, 差的绝对值不小于各项绝对值的差.

(6) 对实数 a 和 b , 有等式

$$|a \cdot b| = |a| |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0);$$

即乘积的绝对值等于绝对值的乘积, 商的绝对值等于绝对值的商.

例 1 解绝对值不等式 $|x-5| < 3$.

解 根据绝对值的性质(4), 由 $|x-5| < 3$ 得

$$-3 < x-5 < 3 \quad \text{即} \quad 2 < x < 8.$$

由图 1-4 知, $|x-5| < 3$ 的几何意义是, 表示数轴上与点 5 的距离小于 3 个单位的所有点 x 的集合.

一般言之, $|x-x_0|$ 表示两点 x 与 x_0 之间的距离; 而 $|x-x_0|$

$<h$ ($h>0$) 则表示数轴上到点 x_0 的距离小于 h 个单位的所有点 x 的集合(图 1-5).

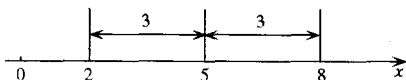


图 1-4

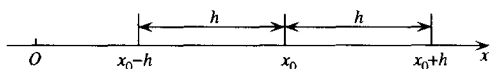


图 1-5

例 2 解绝对值不等式 $|x+1| \geq 2$.

解 根据绝对值的性质(4), 由 $|x+1| \geq 2$ 得

$$x+1 \leq -2 \quad \text{或} \quad x+1 \geq 2,$$

即

$$x \leq -3 \quad \text{或} \quad x \geq 1.$$

由上述结果表明, $|x+1| \geq 2$ 的几何意义是, 表示数轴上与点 -1 的距离不小于 2 个单位的所有点 x 的集合.

一般言之, $|x-x_0| \geq h$ ($h>0$) 表示数轴上到点 x_0 的距离不小于 h 个单位的所有点 x 的集合.

3. 区间

(1) 区间

区间可理解为实数集 $\mathbf{R}$ 的子集. 区间分为有限区间和无限区间.

有限区间 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$ (图 1-6).

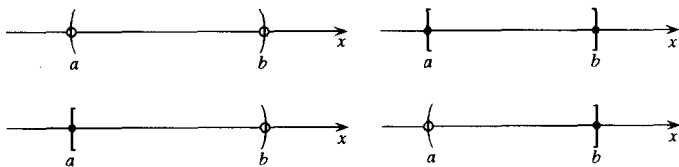


图 1-6

集合 $\{x | a < x < b\}$ 可记作 (a, b) , 称为以 a, b 为端点的开区间.

集合 $\{x|a \leq x \leq b\}$ 可记作 $[a, b]$, 称为以 a, b 为端点的闭区间.

集合 $\{x|a \leq x < b\}$ 和 $\{x|a < x \leq b\}$ 可记作 $[a, b)$ 和 $(a, b]$, 这是半开区间.

以上各有限区间的长度都为 $b-a$.

无限区间

集合 $\{x|a < x < +\infty\} = \{x|a < x\}$, 记作 $(a, +\infty)$, 这是无限区间; 类似的记号 $[a, +\infty), (-\infty, b), (-\infty, b]$ 都是无限区间; 实数集 R 记作 $(-\infty, +\infty)$.

本教材在以后的叙述中, 若我们所讨论的问题在任何一个区间上都成立时, 将用字母 I 表示这样一个泛指的区域.

(2) 邻域

设 δ 为某一个正数, 称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 邻域的长度为 2δ , 点 x_0 的 δ 邻域用不等式表示为 (图 1-7)

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \text{或} \quad |x - x_0| < \delta.$$

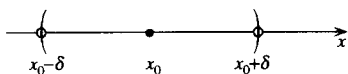


图 1-7

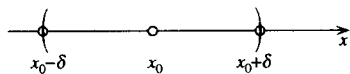


图 1-8

若把邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的中心点 x_0 去掉, 由余下的点构成的集合, 称为点 x_0 的空心邻域, 常表示为 (图 1-8)

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \quad \text{或} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

二、函数概念

1. 函数的定义

在我们的周围, 变化无处不在. 我们所看到的事物都在变化. 这些变化着的现象中的许多现象可以用数学有效地来描述. 其中, 有一些变化着的现象中存在着两个变化的量, 简称变量. 这两个变化着的量不是彼此孤立的, 而是相互联系、相互制约的. 观察下面