高等
师专
教材

GAO DENG

主编 陈世兴　副主编 周鼎鼐

高等数学

（上册）

SHI ZHUAN
JIAOCAI

高 等 数 学

（物理、化学专业用）

上　　册

主　编：　　陈世兴

副主编：　　周鼎爾

编写人员（按姓氏笔划）

王灿照　陈世兴　周鼎爾

郁定国　高建筑

主　审：宋国栋

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上/陈世兴主编. 一上海：华东师范大学出版社，1991.6（2000.2 重印）
全国高等师范院校专业教材
ISBN 7-5617-0635-9

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学-师范大学-教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 13002 号

高 等 数 学

（上）

陈世兴 主编

华东师范大学出版社出版
（上海市中山北路 3663 号）
新华书店上海发行所发行 江苏昆山亭林印刷总厂印刷
开本：850×1168 1/32 印张：11.5 字数：280 千字
1991 年 6 月第一版 2000 年 2 月第 8 次印刷
印数：29 501—33 000 本

ISBN 7-5617-0635-9/N·046 定价：11.00 元

前　言

本书是根据二年制高师物理专业“数学分析”、“空间解析几何与线性代数”的教学大纳编写的。全书共有十二章、分上、下两册。上册内容包括一元微积分、常微分方程、无穷级数；下册包括“空间解析几何与线性代数”的主要内容以及多元微积分。作为教材，上册可花110学时左右，下册的教学时数在102学时左右，其中习题时数以占总教学时数的$\frac{1}{5}\sim\frac{1}{4}$为宜。

在本书的编写过程中，我们同时参考了二年制高师化学专业的“高等数学”教学大纲，并尽可能联系化学中的有关知识。因此，本书也可作为二年制高师化学专业“高等数学”的教材，只要在教学中按教学大纲的要求删去某些章节就可以了。

为了适应高师物理和化学专业教学的需要，本书在内容的取舍和安排上，既着眼于尽可能提供物理和化学专业各门课程需要用到的基本数学工具，又考虑到数学本身的系统性，同时在教材的深度、广度和难度方面，也充分注意到专科的特点。因此，我们在按照数学本身在系统展开教材时，对于概念的引入和例题的选择都尽量联系物理和化学中的有关知识，努力做到理论与实际相结合。为便于学生自学，本书的论述力求简明扼要，通俗易懂。

参加本书编写的有：苏州师专周鼎鼎（第一、二、三、四章），泉州师专陈世兴（第六、七章），巢湖师专高建筑（第五、十章），龙岩师专王灿照（第八、九章），绍兴师专都定国（第十一、十二章）。最后由陈世兴、周鼎鼎统一修改定稿。

华东师范大学数学系宋国栋副教授认真审阅了本书，并提出了许多宝贵意见，特此致谢。

由于水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

1990年5月1日

出 版 说 明

1986 年，我社受国家教委有关部门的委托，根据国家教委师范司制订的《二年制师范专科学校八个专业教学计划》的要求，与全国各省、市、自治区教委合作，共同组织编写了全国高等师范专科学校教材 20 余种；并与华东六省教委密切协作，编写了能反映华东地区师专教学和科研水平的、适应经济建设较为发达地区的师专教学需要的教材 40 余种，师专第一次拥有了比较符合自己培养规格、规律和教学要求而自成系统的教材。实践证明，师专教材建设对于提高师专教学水平，保证师专教学质量起到了重要作用。

近几年来，在邓小平同志建设有中国特色社会主义理论的指引下，我国的教育事业取得了很大发展。国家教委根据《中国教育改革发展纲要》的要求，针对高等师范专科学校的教育特点，颁发了《高等师范专科教育二、三年制教学方案》，进一步明确了高等师范教育面向 21 世纪的发展目标和战略任务，以及教学内容和教学结构的改革要求。

自出版第一本师专教材以来，我社多年来分阶段地对师专教材的使用情况进行了跟踪分析，又于 1995 年开展了较为系统的全面调查。调查中，教师普遍反映，现有师专教材尚不同程度存在着与当前师专教学实际相脱节的现象；对各学科中的新发现、新理论、新成果，未能加以必要的反映，已跟不上当前社会、经济、科技等发展的新形势。考虑到师专从二年制向三年制发展的现状和趋势，我社于 1996 年初与华东六省教委有关部门一起，邀集全国 48 所师专代表专门研讨了师专教材建设问题，随即开展了部分教材的修订和新编工作。1999 年，我社又进行了更大范围的实地调查，

发现不少地区已将对中学教师的培养提高到了本科水平，在专业设置、课程计划、教学要求等方面都有变化。为此，我们对部分教材作了进一步的修订，使其能够适应新世纪的师范教学需要，同时也可用于中学教师的职后培训。

师范院校教材建设并不是一个孤立的系统，它必须服务于师范教育的总体规划。它已经历了从“无”到“有”的过程，并将逐步实现从“有”到“优”的目标。我们相信，通过各方面的努力，修订和新编的师范院校教材将充分体现基础与能力相结合，理论与实践相结合，当前与未来相结合的特色，日臻完善和成熟。

这次编写和修订工作得到了有关省市教委的大力支持，我们谨在此深表谢忱，并向为师范院校教材建设付出辛勤劳动的各地师范院校领导和所有参加编写、修订和审稿的专家、学者等致以衷心的谢意。

华东师范大学出版社

2000 年 1 月

总 目 录

上 册

下 册

目　录

第一章　函数与极限

客观世界是在不停地运动和变化着的，客观事物的运动变化又往往是相互联系、相互依赖的。数学上如何来反映这种不停地运动变化、又彼此相互联系的客观现象呢？17世纪，首先就是因为研究运动的需要，而把变量引入了数学，从而促使高等数学的一个重要部分——数学分析的形成和进一步的发展。数学分析是以极限为基本工具，分析研究变量间的依赖关系(即函数关系)，以及通过这些关系所表现出来的重要性质的一门学科。

作为讨论数学分析的准备，首先必须掌握函数、极限和连续这些基本概念。本章将在复习和加深中学里学过的函数和数列极限等有关知识的基础上，着重阐明函数的极限和函数的连续性等问题。

§1.1　函　　数

数学分析（甚至是整个高等数学）研究的基本对象是函数，函数刻划了变量之间的依赖关系。在本课程中，除特殊说明外，变量都在实数范围内取值。因此，本节教材自然地要按实数、变量、变量之间的关系（即函数关系）这样的顺序来展开。

一、实数

1.　实数概述　实数分为有理数和无理数两大类。**有理数**包括正、负整数，零和正、负分数。每一个有理数都可用分数形式 $\frac{p}{q}$（其中 q 是自然数，p 是整数，且 p、q 互质）表示，也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示。由于有限十进小数可

写成以0或以9为循环节的无限十进循环小数，因此可以说，任一有理数都能表示为无限十进循环小数。另外，我们把每一个无限十进不循环小数（如$\sqrt{2}$，π等）称为**无理数**。于是，任一实数都可用无限十进小数形式来表示。

现举实数的两个重要性质：

(1) 有理数的稠密性　任给两个有理数a、b $(a<b)$，则在a、b之间至少还可以找到一个有理数。例如a、b的算术平均数$c=\dfrac{a+b}{2}$就是a、b之间的一个有理数。同样，在a、c之间也至少可再找到一个有理数。依此类推，可知a、b之间可以找到无穷多个有理数。所谓**有理数的稠密性**是指：不论有理数a、b相差多么小，在a、b之间总可以找到无穷多个有理数。

我们还可以论证，无理数和实数也具有稠密性。

(2) 实数的连续性　我们在中学数学中知道，引进数轴以后，实数与数轴上的点之间存在着一一对应关系，即任一实数都对应数轴上唯一的一点；反之，数轴上的每一点总是代表一个实数①。可见，实数充满数轴，而没有“空隙”，这就叫做实数的连续性。有理数虽然稠密，但并不具有连续性。例如，$\sqrt{2}$、π这些无理数就是有理数中的“空隙”。任意两个有理数之间都有无穷多个这种“空隙”。

实数的连续性是实数的一个根本的性质，它是数学分析的理论基础。

2. 绝对值　一个**实数a的绝对值**，记为$|a|$，定义如下：

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

如前面所述，每一个实数a，在数轴上恰有一点a与之对应，那么点a不论在原点的左方或右方，实数a的绝对值$|a|$表示点a与原点间的距离。例如，$|a|=4$，表示a点到原点的距离

①正由于全体实数与数轴上的点有着一一对应关系，所以在今后叙述中，将把“实数a”与“数轴上的点a”两种说法看作有相同的含义，而不加以区别。

等于4，如a点在原点之右，即$a>0$，由定义知$a=4$，如a点在原点之左，即$a<0$，则$a=-4$。也就是说，在数轴上距离原点为4的点有两个：$a=4$，$a=-4$。同样，$|a-1|=2$表示a点到1的距离等于2，由绝对值的定义知，这样的点有两个：$a=3$，$a=-1$。

根据绝对值定义，可知

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|。$$

因此，当$|a|\leqslant b(b>0)$时，又可以把它表示成

$$-b\leqslant a\leqslant b。$$

绝对值还有如下一些性质：

1° $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$；

2° $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0)$；

3° $|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

4° $|a-b|\geqslant|a|-|b|$；

性质1°、2°成立，极其明显。下面来证明性质3°和4°。

证3° 因为$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$，$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$，将两式逐项相加，得$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant(|a|+|b|)$，故

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|。$$

证4° 设$c=a-b$，则$a=b+c$，根据性质3°可知

$$|a|=|b+c|\leqslant|b|+|c|=|b|+|a-b|,$$

故 $$|a-b|\geqslant|a|-|b|。$$

二、变量与区间

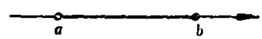
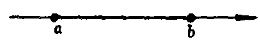
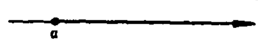
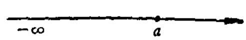
所谓**变量**，是指在某个过程中可取不同数值的那些量。**常量**则是指在一个过程中保持数值不变的量。通常用字母x，y，z，…表示变量，用字母a，b，c…表示常量。

必须指出，一个量究竟是常量还是变量，往往与具体问题有

关。同一个量，在某个过程中可以认为是常量，而在另一个过程中可能是变量。例如，重力加速度通常都认为是常量，其实也是变化的，只不过变化得很小就是了。当我们计算地球卫星的轨道时，地心引力的变化就不很小，不能把它看作常量。这时，重力加速度就应看成是变量了。

一个变量允许取值的范围，称为变量的**变域**。变量的变域是一个集合。关于集合的初步知识，读者在中学数学中已经学过了，本书不再重述。

实数全体组成的集合称为**实数集**，表为 R。本书所说的“数集”都是指实数集R 的子集。区间是特殊的实数集的子集。现将各种区间的定义、名称、符号及图象列表如下（a 与 b 是两个实数，且$a<b$）：

定　义	名　称	符　号	图　象
$\{x \mid a<x<b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x \mid a<x\leqslant b\}$	半开区间	$(a, b]$	
$\{x \mid a\leqslant x<b\}$	半开区间	$[a, b)$	
$\{x \mid a<x\}$	无限区间	$(a, +\infty)$	
$\{x \mid a\leqslant x\}$	无限区间	$[a, +\infty)$	
$\{x \mid x<b\}$	无限区间	$(-\infty, b)$	
$\{x \mid x\leqslant a\}$	无限区间	$(-\infty, a]$	

区间$(-\infty, +\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$

即实数集。

开区间$(a-\delta, a+\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$，其中$\delta$是某个正数，称为$a$的**邻域**（或$a$的$\delta$邻域），记为$U(a, \delta)$，或$U(a)$。

在a的邻域$(a-\delta, a+\delta)$内去掉a，即：$\{x|0<|x-a|<\delta\}$称为a的**空心邻域**，记为$U^{\circ}(a, \delta)$，或$U^{\circ}(a)$。

三、函数

1. **函数概念** 先考察几个例子：

例1 自由落体的路程s与时间t由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

联系着，t的值确定了，s的值就随之确定。设落体着地的时刻为T，则当t取0到T之间任何值时，由(1)就计算得s为0到$\frac{1}{2}gT^2$之间的某一值。

例2 在气象观察站的百叶箱内，气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上，如图1.1所示的曲线。根据这个图形，我们就能知道这一天内时间t从0点到24点气温T的变化情形。

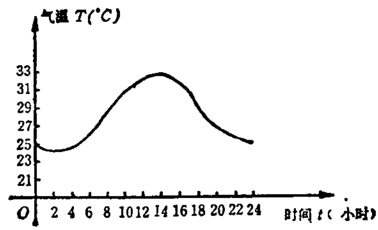


图 1.1

例3 在标准大气压下，水的温度T与体积V互相联系着，实测如下表：

温度（百度表）	0	2	4	6	8	10	12	14
体积（cm^3）	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

上述三个实例，实际意义完全不同。但是，从数学角度看，却有共同的特征：都有两个数集和一个对应法则，并且，其中一个数集中的任意数，按照对应法则，都对应着实数集R中的唯一的数。于是，我们把这些共同特性概括起来，就有如下的函数概念。

定义 A是给定的一个数集，f是一个确定的对应法则，如果对于A中每一个数x，通过f，都有R中一个唯一的数y与之对应，则称f是确定在数集A上的一个**函数**，记作

$$f:\quad A\to \mathbf{R},$$

其中，A称为函数的**定义域**，A中任一数x根据法则f所对应的y，记作$f(x)$，称为f在x的**函数值**，全体函数值集合

$$f(A)=\{y|y=f(x),\ x\in A\}\subset \mathbf{R}$$

称为函数f的**值域**。

在这里要注意：

（1）在定义域中，x是A中的任意一数，因此它是一个变量，y是R中的一个数，也是一个变量，只不过它是随x的给定而确定的，所以，我们称x为**自变量**，y为**因变量**。

（2）由上述定义可知，决定一个函数必须知道定义域A，对应法则f和函数值所在的集合M。函数值是由$x\in A$通过f而唯一确定的实数，通常把M取为全体实数$(-\infty,\ +\infty)$。于是定义域A和对应法则f就成为确定函数的两个要素。从而记号：

$$y=f(x),\quad x\in A$$

也就表达了一个函数。如果一个函数的对应法则是用数学式子来表达的，其定义域就是使这一式子有意义的自变量所取值的全体①，这时定义域A也可以省略不写。因此，表示一个函数，最主要的就是对应法则f。今后在不致于引起混淆的情形下，一般

---

①涉及某实际问题的函数关系，其定义域是使该问题有意义的自变量所取值的全体。

可不提A，简单地说"函数$y=f(x)$"或"函数$f(x)$"。在中学里，我们也称"y是x的函数"，其含义是指自变量x和因变量y之间存在一种确定的对应法则，而不能理解为"y是函数"，因为离开了x和f，孤立地讲函数y是没有意义的。

（3）一个函数，在其定义域的不同部分也可以用不同的式子表示，如

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(0,\ +\infty),\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ -x+1, & x\in(-\infty,\ 0).\end{cases}$$

这种形式的函数，称为**分段函数**，在数学分析中时常见到。其对应法则是：若自变量的值在$(0,\ +\infty)$内，则其函数值为$f(x)=x^2$；若$x=0$，则有$f(0)=\dfrac{1}{2}$；若x在$(-\infty,\ 0)$内取值，则其函数值为$f(x)=-x+1$。

（4）有些函数不能用我们在中学里已经知道的三种方法（公式法，如例1；列表法，如例3；图象法，如例2）来表示，只能给予描述，如定义在$[0,\ 1]$上的狄利克雷(Dirichlet)函数：

$$D(x)=\begin{cases}1，\text{当 } x \text{ 为有理数}，\\ 0，\text{当 } x \text{ 为无理数}。\end{cases}$$

和定义在$[0,\ 1]$上的黎曼(Riemann)函数：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}，\text{当} x=\dfrac{p}{q}\ (p、q\text{为正整数}，p、q\text{互质})，\\ 0，\text{当} x=0，1\text{及无理数}。\end{cases}$$

等等。

2．函数的图象和简单性质

设$y=f(x)$是定义在$[a,\ b]$上的一个函数。在平面上取定直角坐标系后，对每个$x\in[a,\ b]$都可确定平面上一点$M(x,\ y)$

$=M(x, f(x))$。当 x 取遍 $[a,b]$ 上所有值时，点 $M(x, y)$ 便构成平面上的一个图形，这个图形称为函数 $y=f(x)$ 的**图象**。通常函数的图象是一条曲线（图1.2）。

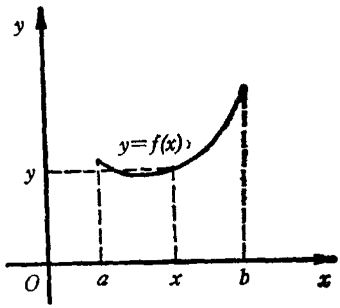


图 1.2

图象具有直观性的特点，一旦画出了函数的图象，就对该函数的变化方式及发展趋势一目了然，这样，我们有可能运用几何方法来研究运动和变化过程。

根据函数的特性来讨论它的图形的几何特性，是作好函数图形的必不可少的步骤。这里介绍今后经常接触到的几种函数。

（1）有界函数

设 f 是定义在数集 A 上的函数，若存在某常数 M，使得对于一切 $x\in A$，有

$$f(x)\leqslant M \qquad (f(x)\geqslant M),$$

则称 f 在 A 上有上（下）界，数 M 为它的一个上（下）界。易知，若 M 为 f 在 A 上的一个上（下）界，则任何大（小）于 M 的数也是 f 在 A 上的一个上（下）界。

若函数 f 在 A 上既有上界，又有下界，则称 f 为 A 上的**有界函数**。因此，若 f 为 A 上有界函数，则必存在某正数 M，使得对一切 $x\in A$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M。$$

如果这样的数 M 不存在，则称 f 在 A 上无界。

有界函数图象的特点是它完全落在平行于 x 轴的两直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间。

例如，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$ 在整个数轴上是有界的，因为对一切 $x\in(-\infty, +\infty)$，恒有