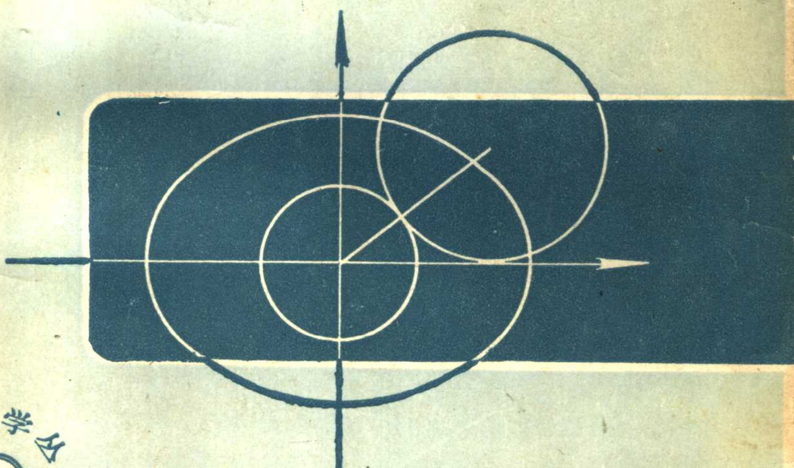
平面解析几何双基训练

主编 翟 连 林



数学自学丛书

中国农业机械出版社

数 学 自 学 丛 书

平面解析几何双基训练

主编　翟连林

编者　段云鑫　乔家瑞

　　　马国璋　张国旺

审阅　何履端

中 国 农 业 机 械 出 版 社

内容简介

本书是“数学自学丛书”之一。它系统扼要地归纳了平面解析几何的基本概念、公式和定理，并通过典型例题的解题思路的分析，总结了解题的各种方法和技巧。对综合题，本书不但分析了思路，而且对问题的深化进行了探讨。

本书共有九章（第九章为训练题解答）。为加强双基训练，每章均配有训练题，第八章是难度稍大的综合训练题。

本书可供自学青年、青年职工补课学习和复习平面解析几何使用，亦可供数学教师参考。

平面解析几何双基训练

主编　翟连林

*

中国农业机械出版社出版

北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号

冶金工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

*

787×1092 32 开 16 12/16 印张 371 千字

1982年12月北京第一版·1982年12月北京第一次印刷

印数：00,001—96,000　　定价：1.40 元

统一书号：7216·41

前　　言

为了使我们伟大的社会主义祖国尽早地实现四个现代化的宏伟目标，需要培养和造就大批又红又专的各种人才。诚然，通过各级各类学校的教育是培养人才的主要渠道；但是，通过自学也是培养人才的一个不可忽视的重要途径。

为了帮助广大自学青年学好中学数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们参照现行普通中学数学教材、工农业余中学数学教材，结合青年自学的特点，编写了这套“数学自学丛书”。

这套丛书包括：《初中代数双基训练》、《高中代数双基训练》、《平面几何双基训练》、《立体几何双基训练》、《平面解析几何双基训练》、《平面三角双基训练》、《概率统计与逻辑代数双基训练》和《一元微积分双基训练》共八本。

青年自学时，一般没有教师指导，因此，我们在这套丛书的各册中，首先帮助读者系统地归纳和总结数学基础知识；然后通过对典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法和技巧，分析并纠正易犯的错误；最后通过各种类型的基本训练题和综合训练题的演算，帮助读者巩固概念，熟悉定理、公式和法则，提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及运用数学来分析和解决实际问题的能力。为了便于自学，我们在书末还附有训练题的解答或提示。

这套丛书是由北京、福建、江苏、河北、河南、吉林等省、市的二十多位在大学讲授基础课的教授、讲师，在中学具有多年教学经验的数学教师和教研室的教研员共同编写的。

由于我们的水平有限，编写的时间也仓促，书中的缺点、错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

1982年7月

目　　录

第一章　直角坐标系

一、有 向 线 段

规定了起点和终点的线段，也就是规定了正、负方向的线段叫做有向线段．从起点到终点的方向就是一条有向线段的方向，表示有向线段，我们规定起点的字母写在前面，终点的字母写在后面．如有向线段AB，A是起点，B是终点；有向线段BA，则B是起点，A是终点．在解析几何中，除特别声明外，所讨论的线段都是有向线段．

我们规定，数轴上的有向线段，当它的方向和数轴的方向相同时为正，和数轴的方向相反时为负．

有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，叫做有向线段的数量．如果不考虑有向线段的方向，仅指有向线段的长度，则叫做有向线段的绝对值．有向线段AB的长度记为$|AB|$．

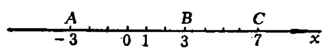


图 1-1

数轴上的有向线段的数量，等于它的终点坐标减去起点坐标．如果AB是数轴上的有向线段，A、B的坐标分别是x_1和x_2，那么

$$AB=x_2-x_1,\quad BA=x_1-x_2.$$

例 1　如图1-1，数轴上有三点A、B、C，它们的坐标分别是-3、3和7，试求AB、BA、BC、AC、$|AB|$、$|BA|$、

$|AC|$ 的值。

解： $AB=3-(-3)=6$；

$BA=(-3)-3=-6$；

$BC=7-3=4$；

$AC=7-(-3)=10$；

$|AB|=|3-(-3)|=6$；

$|BA|=|(-3)-3|=6$；

$|AC|=|7-(-3)|=10$.

例 2 A、B、C是数轴上的任意三点，试证明

（1）$AB=-BA$或$AB+BA=0$；

（2）$AB+BC=AC$.

证明： 设A、B、C的坐标分别为x_1、x_2和x_3，则

（1）$AB=x_2-x_1=-(x_1-x_2)=-BA$.

即 $AB+BA=0$.

（2）$AB+BC=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)=x_3-x_1$

$=AC$.

即 $AB+BC=AC$.

上述两个结论，今后可以做为公式直接使用.

二、平面直角坐标系

平面内，有公共原点并且互相垂直的两条数轴，构成平面直角坐标系. 建立了直角坐标系的平面叫做坐标平面.

在平面内建立了直角坐标系后，对于坐标平面内的任意一个点都有唯一的一对有序实数和它对应. 反过来，对于任意一对有序实数，都能确定坐标平面内唯一的一个点. 这样坐标平面内的点和一对有序实数之间就建立了一一对应关

系．因此平面内关于点的几何问题，就可以转化成关于这些点的坐标的数的问题来进行研究．平面解析几何就是从这一基本观念出发，用代数方法来研究平面几何问题的一门数学分科．

例 3 分别求点 $A(a、b)$ 关于 x 轴、y 轴和原点的对称点．

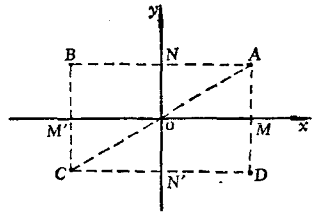


图 1-2

解： 为方便起见，不妨设 $A(a、b)$ 是第一象限内的点，根据平面几何知识，可以作以 A 为一个顶点，o 为中心的一个矩形 $ABCD$（图1-2），则 A 点关于 x 轴、y 轴和原点对称的点分别是 D、B 和 C．

（1）$\because\ |MD|=|MA|$，且 MD 与 MA 的方向相反，

$\therefore\ MD=-MA=-b$，

又 $\because\ N'D=oM=a$，

因此 D 点坐标是 $(a,\ -b)$．

（2）$\because\ oM'=-oM=-a$，

$M'B=MA=b$，

因此 B 点坐标是 $(-a,\ b)$．

（3）$\because\ N'C=oM'=-oM=-a$，

$M'C=MD=-MA=-b$，

因此 C 点坐标是 $(-a,\ -b)$．

例 4 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=DC=a, BC=AD=b$，根据下述条件分别建立直角坐标系，然后求各顶点的坐标．

（1）各顶点的坐标都是正值；

（2）各顶点的坐标都是非负值，并且要有尽量多的

零；

（3）各顶点的坐标具有对称性；

（4）各顶点的坐标具有对称性，并且各顶点的纵坐标是非负值.

解：

（1）可如图1-3建立直角坐标系，且设 A 点坐标为 (x_0, y_0)，则 B、C、D 的坐标分别为 (x_0+a, y_0)、(x_0+a, y_0+b)、(x_0, y_0+b).

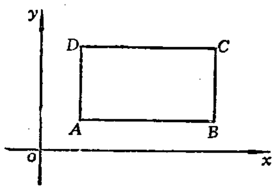


图 1-3

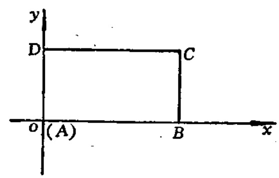


图 1-4

（2）可如图 1-4 建立直角坐标系，则各顶点坐标为 $A(0, 0)$、$B(a, 0)$、$C(a, b)$、$D(0, b)$.

（3）可如图1-5 建立直角坐标系，则各顶点坐标为 $A\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$、$B\left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$、$C\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$、$D\left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

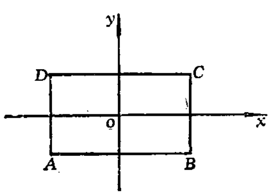


图 1-5

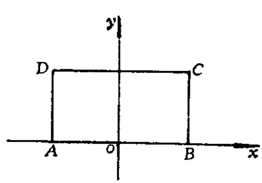


图 1-6

（4）可如图1-6建立直角坐标系，则各顶点坐标为 $A\left(-\frac{a}{2},0\right)$、$B\left(\frac{a}{2},0\right)$、$C\left(\frac{a}{2},b\right)$、$D\left(-\frac{a}{2},b\right)$.

由例4可以看出，在解析几何中，建立直角坐标系是非常重要的一项工作，因为它将影响点的坐标的繁简．因此，在建立直角坐标系时，要尽量考虑给定图形的对称性和利用图形中的直角，从而使坐标中出现零或相反数，这样就可以简化所讨论的问题.

三、两点间的距离

如图1-7，已知平面内任意两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，用 d 表示它们之间的距离 $|P_1P_2|$，则

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

这就是两点间的距离公式．如果点的位置特殊时，两点间的距离公式可以简化为：

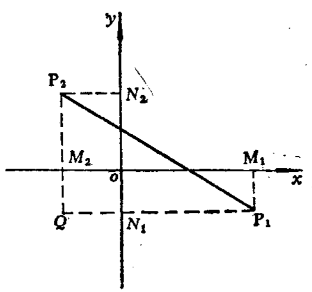


图 1-7

（1）假设 P_1P_2 平行于 x 轴，则 $y_1=y_2$，此时

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|.$$

（2）假设P_1P_2平行于y轴，则$x_1=x_2$，此时

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|y_2-y_1|.$$

（3）任一点$P(x, y)$到原点$(0, 0)$的距离公式是

$$d=|oP|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

例 5 有一条线段的长度是5，它的一个端点是$A(2, 1)$，另一个端点B的横坐标是-1，求这个端点的纵坐标(图1-8).

解：设B点的坐标是$(-1, y)$，

$\because$ $|AB|=5$,

$\therefore$ $(2+1)^2+(y-1)^2=25$,

$y^2-2y-15=0$.

解之，得$y_1=5$，$y_2=-3$.

因此所求点的纵坐标是5或-3.

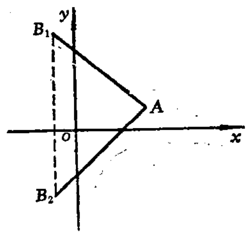


图 1-8

四、线段的定比分点

如果$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$是线段AB的端点，点P把线段AB分成AP和PB，且$\frac{AP}{PB}=\lambda$，那么，点P叫做分线段AB为定比λ的定比分点．当P点在线段AB的内部时，由于AP和PB的方向相同，所以$\lambda>0$，此分点叫内分点；当P点在线段AB的延长线上时，由于AP和PB的方向相反，所以$\lambda<0$（但$\lambda\neq-1$），此分点叫外分点．这里要特别注意A、B和P之间的顺序，也就是要分清P点分AB的比是$\frac{AP}{PB}$，而P点分BA的比是$\frac{BP}{PA}$，它们的共同规律是

$$\lambda=\frac{\text{起点到分点的线段的数量}}{\text{分点到终点的线段的数量}}.$$

定比分点P的坐标（x，y）可以用端点A、B的坐标表示如下：

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \qquad (\lambda\neq -1)$$

定比分点P和A、B两点的相对位置，与λ的取值范围的相互关系可归纳成表1-1。

表 1-1

定比分点P 的位置	$-\infty \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow \infty$ （x 轴）
λ 的取值范围	$-1 \nearrow 0 \nearrow 1 \nearrow \infty \mid -\infty \nearrow -1$

表中M为AB的中点，此时$\lambda=1$，则得线段AB的中点坐标公式：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

例 6 已知线段AB，它的端点坐标为$A(3,\ -4)$和$B(-9,\ 2)$，

（1）在线段AB内求一点P，使$|AP|$是$|AB|$的$\frac{1}{3}$；

（2） 在线段AB的延长线或反向延长线上求一点Q，使$|AQ|$是$|AB|$的$\frac{1}{3}$.

试求P、Q的坐标.

解：（1）依题意，$|AP|=\frac{1}{3}|AB|$，

即 $|AP|=\frac{1}{2}|PB|$，

则 $\lambda=\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$,

$$\therefore \quad \begin{cases} x_P=\dfrac{3+\frac{1}{2}\times(-9)}{1+\frac{1}{2}}=-1, \\ y_P=\dfrac{-4+\frac{1}{2}\times 2}{1+\frac{1}{2}}=-2. \end{cases}$$

即P点坐标为（-1，-2）.

（2）当Q在AB的延长线上时，$|AQ|>|AB|$，不可能出现$|AQ|=\frac{1}{3}|AB|$. 当Q在AB的反向延长线上时，则有可能出现$|AQ|=\frac{1}{3}|AB|$，此时 $|AQ|=\frac{1}{4}|QB|$.

$$\therefore \quad \lambda=\frac{AQ}{QB}=-\frac{1}{4}.$$

因此
$$\begin{cases} x_Q=\dfrac{3+\left(-\dfrac{1}{4}\right)(-9)}{1+\left(-\dfrac{1}{4}\right)}=7, \\ y_Q=\dfrac{-4+\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times 2}{1+\left(-\dfrac{1}{4}\right)}=-6. \end{cases}$$

即　Q点坐标为（7，-6）.

例 7　已知$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$是$\triangle ABC$的三个顶点，求它的重心G的坐标.

解： 设BC的中点为D，则它的坐标为

$$\begin{cases} x_D=\dfrac{x_2+x_3}{2}, \\ y_D=\dfrac{y_2+y_3}{2}. \end{cases}$$

又G是中线AD的内分点，且$\dfrac{AG}{GD}=2$，

∴　G点坐标为

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_1+2\times\dfrac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \\ y_G=\dfrac{y_1+2\times\dfrac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}. \end{cases}$$

∴　$\triangle ABC$的重心G的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$