高等教育机械类自学考试教材

高等数学

下册

陆庆乐　邵济煦　编

西安交通大学出版社
光明日报出版社

高等教育机械类自学考试教材

高等数学

（下册）

西安交通大学自学教材编写组

陆庆乐　邵济煦　编

西安交通大学出版社

光明日报出版社

第二篇　向量代数　空间解析几何

第八章　向量代数

我们在中学物理学中已经遇到过向量，它是研究既有大小又有方向的量的一种有力工具。本章讲的主要内容是有关向量的代数运算，即所谓**向量代数**①. 向量代数是下章学习空间解析几何的重要工具，也是进一步学习向量分析的基础. 许多物理定律与数学公式都可以用向量形式来表示，所以向量在物理与数学中有着广泛的应用。不仅如此，向量在工程技术中也有它的应用。

8-1 向量概念　在中学物理学中我们已经知道物理量有两种：一种是只具有大小的量，称为**标量**，如时间、温度、功、能等；另一种是不仅具有大小而且还有方向的量，称为**向量**②，如速度、加速度、力、电场强度等。我们也已经知道，任何向量在几何上都可用带箭头的长短一定的线段（有向线段）来表示。

因为在许多几何学与物理学的问题中所遇到的向量往往与起点无关，所以我们把方向相同而长度相等的向量看作是相等的. 这也就是说，我们可以把一个向量在空间自由平行移动而使它的起点为空间的任意一点③。如果一个向量的起点与终点分别记作 A 与 B，那末这个向量便记作 $\overrightarrow{AB}$。但往往为了方便，只用一个字母加上箭号来表示，如 $\vec{a}$。在本书中，一般用黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 来代替 $\vec{a}$（图 8.1）。

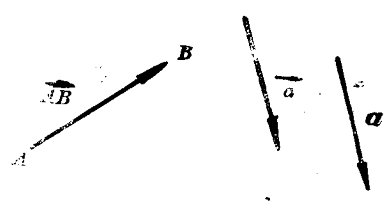

图 8.1

向量的长度称为向量的**模**或**绝对值**。记作 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$。模等于 1 的向量称为**单位向量**。模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\vec{0}$ 或 $\mathbf{0}$。零向量的方向不定。

8-2 向量的加减　在中学物理学中讲力学的时候，我们已经知道有所谓力的平行四边形法则。设 $\boldsymbol{P}_1$ 与 $\boldsymbol{P}_2$ 是作用于一物体而互成角度的两个力，那么它们的合力 $\boldsymbol{R}$ 就是以 $\boldsymbol{P}_1$ 与 $\boldsymbol{P}_2$ 为邻边所作出的平行四边形的对角线向量(图 8.2)。根据平行四边形的性质，我们也可以这样作出 $\boldsymbol{R}$：把 $\boldsymbol{P}_2$ 的起点移至 $\boldsymbol{P}_1$ 的终点，于是由 $\boldsymbol{P}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{P}_2$ 的终点的向量便是 $\boldsymbol{R}$（图 8.3）。

① 向量代数的奠基性工作主要是由哈密顿(W. R. Hamilton, 1805-1865)和格拉斯曼(H. G. Grassmann, 1809-1877) 在十九世纪中叶做出的。这里所采用的形式则是十九世纪末经过海维赛德(O. Heaviside, 1850-1925)和吉布斯(J. W. Gibbs, 1839-1903)努力而得到的结果.

② 向量又称矢量. 向量的加法定义见下节.

③ 这种向量称为自由向量；起点固定的向量称为固定向量；起点可以沿它所在的直线移动的向量称为滑动向量。今后如无特殊声明，在本书中所说的向量都是指自由向量。

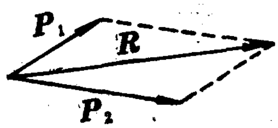

图 8.2

图 8.3

就在这个基础上产生了所谓**向量的加法**。

定义 **两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，就是，把 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至 $\boldsymbol{a}$ 的终点时，由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量。

根据这个定义，可知向量的加法满足交换律与结合律(见图 8.4，8.5)①：

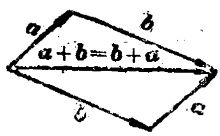

图 8.4

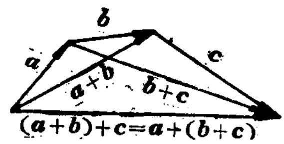

图 8.5

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} \tag{2}$$

定义 **两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差**，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，就是另一个与 $\boldsymbol{b}$ 相加后就变为 $\boldsymbol{a}$ 的向量。如果把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，那末 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量(图 8.6)。

这样，对于每一个向量 $\boldsymbol{a}$，有

0 与 $\boldsymbol{a}$ 的差：$0-\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的一个向量，记作 $-\boldsymbol{a}$，称为 $\boldsymbol{a}$ 的**逆向量**。这样，就有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

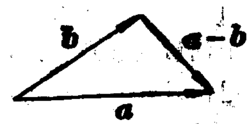

图 8.6

换句话说，减去一个向量同于加上这个向量的逆向量。

8-3 向量与数的乘法 如果我们把 n 个相等的向量连续相加，那末，根据加法的定义，所得到的和：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\cdots+\boldsymbol{a}$$

应该是一个模等于 $n|\boldsymbol{a}|$ 而方向依旧不变的向量，可记作 $n\boldsymbol{a}$。把这个观念推广，我们就有了向量与数的乘法。

定义 **一个向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积**，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}\lambda$，是模等于 $|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$ 的另一个向量，它的方向在 $\lambda>0$ 时与原向量的相同，在 $\lambda<0$ 时与原向量的相反。

容易证明，这种乘积满足下列结合律与分配律：

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a} \tag{3}$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a} \tag{4}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{a} \tag{5}$$

① 注意在图 8.5 中，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三个向量不一定在同一个平面内。

例如对于(5)式，根据定义，再利用相似三角形的对应边成比例这个性质，就可以证明(图 8.7)。

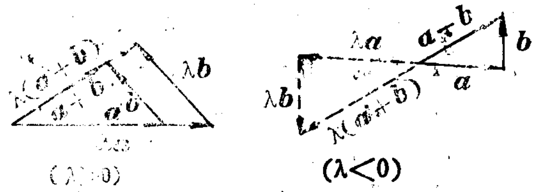

图 8.7

设 $\boldsymbol{a}^0$ 是方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同的单位向量，那末根据向量与数的乘法我们可以把 $\boldsymbol{a}$ 写成：

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \text{ 或 } \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \tag{6}$$

向量的加法、减法以及向量与数的乘法统称为向量的**线性运算**。

例 1 设 P_1 与 P_2 为数轴 Ox 上的任意两个不同的点，它们的坐标分别为 x_1 与 x_2。$\boldsymbol{i}$ 为数轴 Ox 方向上的单位向量。试证：

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$$

[证] 当 $x_2>x_1$ 时，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 Ox 轴同向。因为 $|\overrightarrow{P_1P_2}|=x_2-x_1$，所以，根据向量与数的乘积，有 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$。

当 $x_2<x_1$ 时，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 Ox 轴反向。因为 $|\overrightarrow{P_1P_2}|=x_1-x_2$，所以，$\overrightarrow{P_1P_2}=-(x_1-x_2)\boldsymbol{i}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$。

有些平面几何学中的问题，也可用向量去解决。

例 2 证明：三角形两边中点的连线必与其底平行且等于底边的一半。

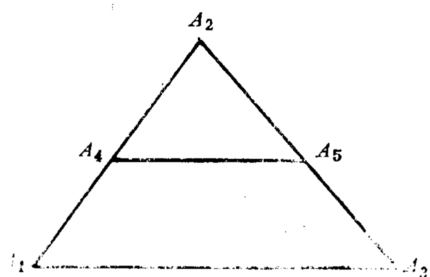

图 8.8

[证] 设 A_4 与 A_5 分别为边 A_1A_2 与 A_3A_2 的中点。由向量的加法可知

$$\overrightarrow{A_4A_5}=\overrightarrow{A_4A_2}+\overrightarrow{A_2A_5}$$

根据向量与数的乘积知

$$\overrightarrow{A_4A_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2},\quad \overrightarrow{A_2A_5}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_3}$$

所以

$$\overrightarrow{A_4A_5}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_3}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}) \quad \text{[参见(5)式]}$$

但

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{A_1A_3}$$

从而有

$$\overrightarrow{A_4A_5}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_3}$$

由此可知，$A_4A_5 \parallel A_1A_3$，$|A_4A_5|=\frac{1}{2}|A_1A_3|$，这就是欲证的结果。

习　　题　8—1～8—3

1. 回答下列各问题：

(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 有共同的起点，当向量 $\boldsymbol{a}$ 绕共同的起点转过一个角 α 后，恰与向量 $\boldsymbol{b}$ 重合，问 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 成立吗？为什么？

(2) 作用于同一点的两个力，它们合力的大小何时为零？设光滑的桌面上有一物体，力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 同时作用于物体上的一点 P 而物体不动，问 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}_2$，对吗？

(3) 从 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 是否可以推出 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$？反过来，从 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 是否可以推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$？

(4) 零向量与单位向量各有什么特征？试写出非零向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的单位向量。

(5) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 能否构成一个三角形？$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 能否构成一个三角形？

2. 证明：(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；(2) $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$。

3. 向量的线性运算满足些什么规律？利用线性运算化简下列各式：

(1) $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$；　　(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$。

8-4 向量在空间有向直线上的投影 以上各节我们是从几何的角度对向量及其线性运算进行讨论的。为了要用代数的方法对向量进行研究，需要引入向量坐标这一概念。建立这一概念的依据是向量在有向直线上的投影。

我们先来说明什么是空间两有向直线的夹角．设 L_1 与 L_2 是空间两条有向直线，如果它们相交，必在同一平面内。我们把 L_1 与 L_2 的夹角 θ 规定为它们正向之间不大于 π 的角，即 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，如果 L_1 与 L_2 不相交，那末在空间任意取定一点，通过该点作两条有向直线，分别与 L_1 和 L_2 平行且同向。我们把所作的两条相交有向直线的夹角作为 L_1 与 L_2 的夹角．如果 L_1 与 L_2 平行且方向相同，那末显然 $\theta=0$，方向相反时，$\theta=\pi$(图 8.9)。

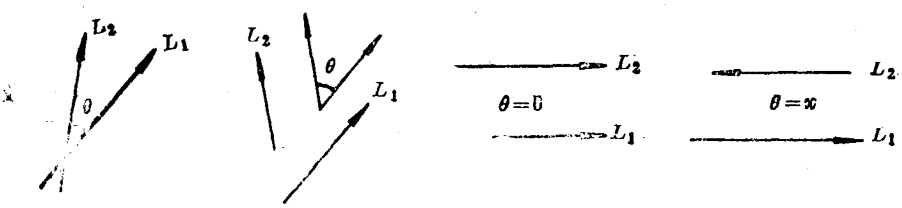

图 8.9

两个向量的夹角或一个向量与一条有向直线的夹角也作如上的规定。

下面我们来阐释向量在有向直线上的投影。

设在空间给定向量 $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$ 与一条有向直线 L。过 A 与 B 分别作 L 的垂直平面 p 与 q，交 L 于 A' 与 B'(图 8.10)。

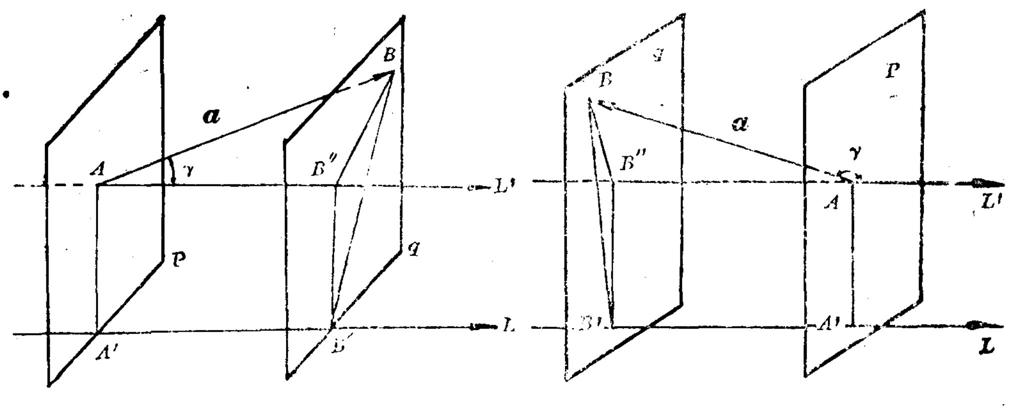

图 8.10

点 A' 与 B' 分别称为点 A 与 B 在 L 上的投影。

定义 设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 与终点 B 在有向直线 L 上的投影分别为 A' 与 B'，L 上的有向线段 $A'B'$ 的长度用 $|A'B'|$ 表示，那末 $A'B'$ 的值，即当 $A'B'$ 与 L 同向时等于 $|A'B'|$，反向时等于 $-|A'B'|$，称为 $\boldsymbol{a}$ 在 L 上的**投影**，记作 $(\boldsymbol{a})_L$，即

$$(\boldsymbol{a})_L=\begin{cases} |A'B'|, & \text{当 } A'B' \text{ 与 } L \text{ 同向}① \\ -|A'B'|, & \text{当 } A'B' \text{ 与 } L \text{ 反向}\end{cases}$$

根据这个定义，可知向量在有向直线上的投影是一个数量。为了方便，常常把 $(\boldsymbol{a})_L$ 简记为 a_L。

我们有两条关于投影的定理。

定理一 向量 $\boldsymbol{a}$ 在有向直线 L 上的投影是

$$\boxed{(\boldsymbol{a})_L=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma} \tag{7}$$

其中 γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与有向直线 L 的夹角。

[证] 过 A 作与 L 平行且同向的有向直线 L'，与平面 q 相交于 B''（图 8.10）。由于 L 与 L' 平行，所以 L' 也垂直于平面 q。直角三角形 $AB''B$ 位于 $\boldsymbol{a}$ 与 L' 所决定的平面内。

当 $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ 时，由图 8.10(a) 可知 $(\boldsymbol{a})_L=|A'B'|=|AB''|$。但在直角三角形 $AB''B$ 内，$|AB''|=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$，从而有

$$(\boldsymbol{a})_L=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$

当 $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$ 时，由图 8.10(b) 可知 $(\boldsymbol{a})_L=-|A'B'|=-|AB''|$，但在直角三角形 $AB''B$ 内，$|AB''|=|\boldsymbol{a}|\cos(\pi-\gamma)=-|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$，从而也有

$$(\boldsymbol{a})_L=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$

当 $\gamma=0$ 时，显然有 $(\boldsymbol{a})_L=|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$；当 $\gamma=\frac{\pi}{2}$ 时，$(\boldsymbol{a})_L=0=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$；当 $\gamma=\pi$ 时，$(\boldsymbol{a})_L=-|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$。

所以(7)式成立。

定理一中的有向直线 L 可用一个向量 $\boldsymbol{b}$ 去代替，这时 γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。我们把 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影记作 $(\boldsymbol{a})_b$ 或简记为 a_b，即有 $a_b=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$。同样，$b_a=|\boldsymbol{b}|\cos\gamma$。

定理二 有限个向量的和在有向直线 L 上的投影等于每个向量在 L 上投影的和，即

$$\boxed{(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)_L=(\boldsymbol{a}_1)_L+(\boldsymbol{a}_2)_L+\cdots+(\boldsymbol{a}_n)_L} \tag{8}$$

[证] 由图 8.11 可知

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)_L=(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}B})_L=(\overrightarrow{AB})_L=A'B'$$

又，
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_1)_L+(\boldsymbol{a}_2)_L+\cdots+(\boldsymbol{a}_n)_L&=(\overrightarrow{AA_1})_L+(\overrightarrow{A_1A_2})_L+\cdots+(\overrightarrow{A_{n-1}B})_L\\&=A'A_1'+A_1'A_2'+\cdots+A_{n-1}'B' \text{（有向线段结合法则）}\\&=A'B'\end{aligned}$$

所以等式(8)成立。

① 如果我们用有向线段 $A'B'$ 的记号同时也表示它的值，那末 $(\boldsymbol{a})_L=A'B'$。

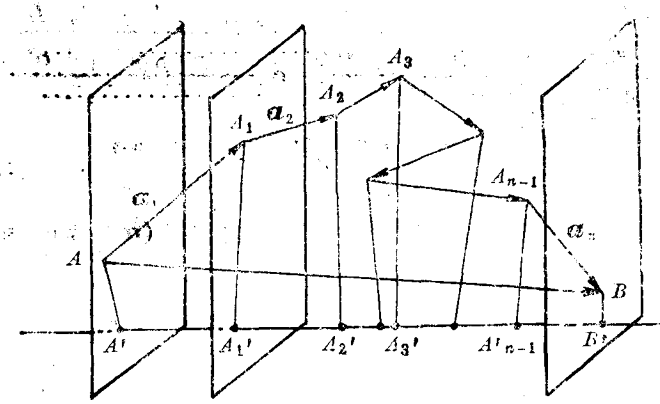

图 8.11

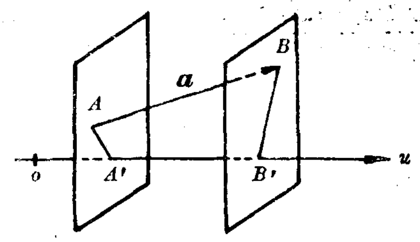

图 8.12

例 设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 的端点 A 与 B 在数轴 u 上的投影 A' 与 B' 的坐标分别为 u_A 与 u_B，试证：$(\boldsymbol{a})_u=u_B-u_A$。

［**证**］ 因为向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影就是 u 轴上有向线段 $A'B'$(图 8.12) 的值，而有向线段 $A'B'$ 的值：

$$A'B'=OB'-OA'=u_B-u_A$$

所以 $(\boldsymbol{a})_u=u_B-u_A$。

习 题 8—4

1． 向量在有向直线上的投影是向量还是数量？

2． 两个向量如果在给定的一条有向直线上的投影相等，问这两个向量是否相等？如果在两条有向直线上的投影都分别相等呢？如果在三条有向直线上的投影都分别相等呢？如果在任意一条有向直线上的投影都相等呢？

3． 证明：$(\lambda\boldsymbol{a})_L=\lambda(\boldsymbol{a})_L$。

8-5 空间直角坐标系 我们在中学里已经学过平面解析几何，它是用代数的方法来解决几何问题。我们知道，促成代数与几何的这样一种结合的，是坐标法。代数运算的基本对象是数，几何图形的基本元素是点。数与点本来是各不相涉的，但通过平面直角坐标系，却使两者发生了紧密的连系，即平面上的点与一对有序实数一一对应。在此基础上，使平面中的曲线与方程一一对应，从而我们可以应用代数方法去解决几何问题。

为了以后学习的需要，我们把这种方法运用到空间，建立空间直角坐标系。

在空间作三条互相垂直相交的数轴 Ox,Oy 与 Oz，它们有相同的长度单位，它们的交点 O 就是**坐标原点**(图 8.13)。Ox 称为**横轴**或 x **轴**，通常取从后到前的方向作为正向；Oy 称为**纵轴**或 y **轴**，通常取从左到右的方向作为正向；Oz 称为**竖轴**或 z **轴**，通常取从下到上的方向作为正向。Ox,Oy,Oz 统称为**坐标轴**。三个坐标轴两两决定互相垂直的三个平面 xOy，yOz，zOx，称为**坐标平面**。这三个平面把空间分为八个部分，**称为卦限**。各卦限可以逐一编号，以资区别。我们把在 xOy 坐标平面之上、yOz 坐标平面之前，zOx 坐标平面之右的卦限称为

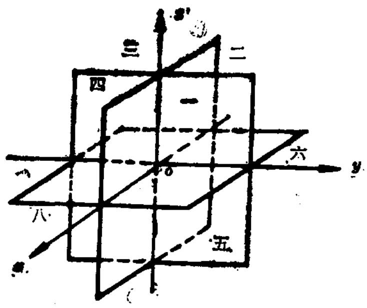

图 8.13

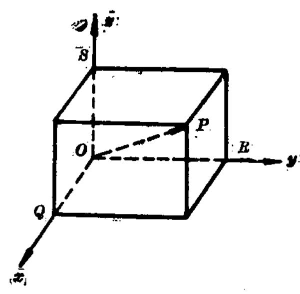

图 8.14

第一卦限。在 xOy 坐标平面之上的其余三个卦限，按逆时针方向依次称为第二，第三，第四卦限。在 xOy 坐标平面之下的四个卦限，在第一卦限下面的卦限称为第五卦限，其余按逆时针方向依次称为第六，第七，第八卦限(图 8.13)。

设在空间任取一点 P，以原点 O 为起点，P 为终点作向量 OP(图 8.14)。我们把 OP 在三条坐标轴上的投影，即有向线段 OQ，OR，OS 的值，也就是 Q，R，S 在各自坐标轴上的坐标，称为 P 点的**坐标**，分别记作 x，y，z，即

$$OQ=x,\ OR=y,\ OS=z,$$

并且合写在一个括号里，如 (x, y, z)。第一个数 x 叫作 P 点的**横坐标**或 x **坐标**；第二个数 y 叫作 P 点的**纵坐标**或 y **坐标**；第三个数 z 叫作 P 点的**竖坐标**或 z **坐标**。所以对应于空间的每一点 P，必有一组确定的坐标 (x, y, z)。

反之，已知一组实数 x，y 与 z，我们可以在 x 轴上作 $OQ=x$，在 y 轴上作 $OR=y$，在 z 轴上作 $OS=z$，然后通过 Q，R 与 S 分别作 x 轴，y 轴与 z 轴的垂直平面。这三个垂直平面的交点 P 便是具有坐标 (x, y, z) 的点(图 8.14)。所以对应于一组实数 (x, y, z) 必有空间的一个确定点 P。

这样，空间的点的集合就与一组三个有序的实数的集合构成一一对应的关系。这就是使空间的点与实数相结合的一种坐标法，使用这种坐标法时所取定的三条互相垂直相交的数轴，构成一个**空间直角坐标系**。

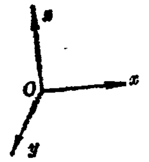

图 8.15

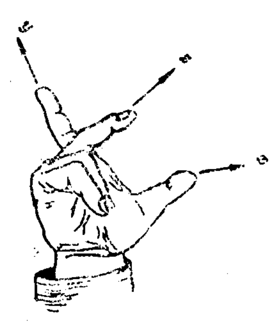

图 8.16

如果在图 8.14 中把 x 轴与 y 轴对调，即令 x 轴的正向朝右，y 轴的正向朝前，那末我们将得到另一种空间直角坐标系(图 8.15)。我们把图 8.14 的坐标系称**右手系**，因为如果我们用右手的拇指表示 x 轴的正向。食指表示 y 轴的正向，那末中指就是 z 轴的正向了(图 8.16).同样，图 8.15 的坐标系须用左手来表示，因而称为**左手系**.在本书中始终采用右手系。

习　题　8—5

1. 试把八个卦限内的点的坐标的正负填入下表：

卦　限	一	二	三	四	五	六	七	八
坐标的正负	(+,+,+)							

2. 画出下列各点在空间直角坐标系中的位置：
(3, 2, −1)；(0, 2, 1)；(3, 0, 0)；(−2, −1, 0)
3. 如果 P 点的坐标 (x,y,z) 具有下列条件时，它的位置在那里？
(1) $x=0$；　(2) $y=0$, $z=0$；　(3) $x=2$；　(4) $x=2$, $y=-1$；
(5) $y=x$；　(6) $x=a$, $z=b$。
4. 求出点 (a, b, c) 关于(1)原点；(2)坐标平面；(3)坐标轴对称的点的坐标。

8-6 两点间距离与定比分点公式　正象在平面内一样，我们现在可以利用空间直角坐标系来计算空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离 D 以及把线段 P_1P_2 分成定比的分点的坐标。

两点间的距离　以 P_1 与 P_2 的连线为对角线作平行六面体，那末 P_1 与 P_2 之间的距离就是向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模(图 8.17)：

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|^2=|P_1Q|^2+|P_1R|^2+|P_1S|^2$$

由于向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在三条坐标轴 Ox, Oy, Oz 上的投影分别为

$$Q_1Q_2=x_2-x_1,\quad R_1R_2=y_2-y_1,$$
$$S_1S_2=z_2-z_1$$

而 $|P_1Q|=|Q_1Q_2|$, $|P_1R|=|R_1R_2|$, $|P_1S|=|S_1S_2|$，所以所求 P_1 与 P_2 之间的距离为

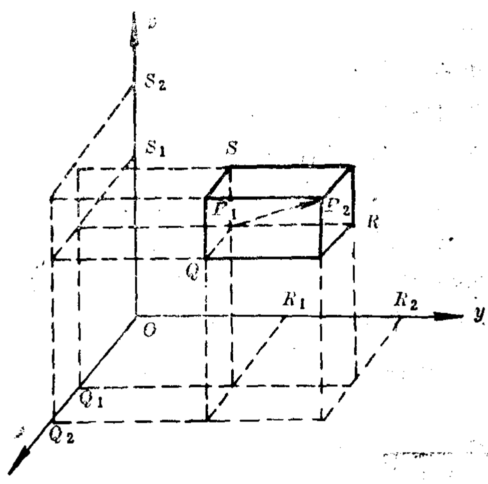

图 8.17

$$\boxed{D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}\qquad(9)$$

定比分点　设在连接 P_1 与 P_2 两点的直线上另有一点 $P(x,y,z)$(图 8.18)，使得有向线段 P_1P 与 PP_2 的值之比为 λ，但 $\lambda\neq-1$，即有

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$$

由于 $P_1P=\lambda PP_2$，所以

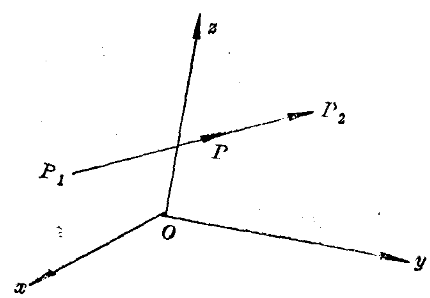

图 8.18

$$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$$

把上式两端的向量分别投影到三条坐标轴上，得[参见 8-4 习题 3]

$$(\overrightarrow{P_1P})_x=(\lambda\overrightarrow{PP_2})_x=\lambda(\overrightarrow{PP_2})_x$$
$$(\overrightarrow{P_1P})_y=(\lambda\overrightarrow{PP_2})_y=\lambda(\overrightarrow{PP_2})_y$$
$$(\overrightarrow{P_1P})_z=(\lambda\overrightarrow{PP_2})_z=\lambda(\overrightarrow{PP_2})_z$$

由第一式，得 $x-x_1=\lambda(x_2-x)$，解出 x，得

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}} \tag{10_1}$$

同样，由第二、第三式可得

$$\boxed{y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}} \tag{10_2}$$

当 $\lambda=1$ 时，$P_1P=PP_2$，所以 P 为线段 P_1P_2 的中点，它的坐标是

$$\boxed{x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\qquad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\qquad z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)} \tag{11}$$

例 1 设 P 点在 x 轴上，它到点 $P_1(0,2,3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍，求 P 点的坐标。

[解] 由于 P 点在 x 轴上，因此它的坐标可设为$(x,0,0)$，根据距离公式，有

$$|PP_1|=\sqrt{(x-0)^2+(0-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{x^2+13}$$
$$|PP_2|=\sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{x^2+2}$$

依题意

$$|PP_1|=2|PP_2|$$

所以

$$\sqrt{x^2+13}=2\sqrt{x^2+2}$$

解出 x，得

$$x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

所以在 x 轴上符合题意的点有两点，它们的坐标是：

$$\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\ 0,\ 0\right)\quad 与\quad \left(-\sqrt{\frac{5}{3}},\ 0,\ 0\right)$$

例 2 已知两点 $P_1(-2,5,9)$ 与 $P_2(7,-7,-12)$，求 P_1P_2 上两个三等分点的坐标。

[解] 设两个三等分点为 T_1 与 T_2，如图 8.19 所示。由于 $\frac{P_1T_1}{T_1P_2}=\frac{1}{2}$，所以对分点 T_1 来说，定比 $\lambda=\frac{1}{2}$。设 T_1 的坐标为(x,y,z)，那末由公式(10)得

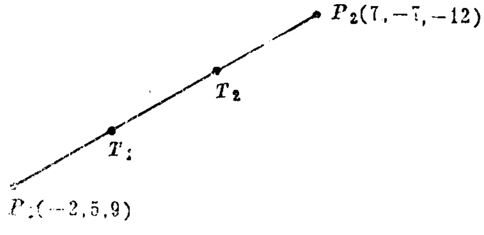

图 8.19

$$x=\frac{-2+\frac{1}{2}\times 7}{1+\frac{1}{2}}=1,\quad y=\frac{5+\frac{1}{2}(-7)}{1+\frac{1}{2}}=1,\quad z=\frac{9+\frac{1}{2}(-12)}{1+\frac{1}{2}}=2$$

即 T_1 的坐标为(1,1,2)。

对分点 T_2 来说， 定比 $\lambda=2$， 我们用同样的方法可求出它坐标。 但我们也可以把 T_2 看作 T_1 与 P_2 连线的中点．用中点公式得它的坐标为 $\left(\frac{1+7}{2},\ \frac{1-7}{2},\ \frac{2-12}{2}\right)$，即(4, −3, −5)。

习　题　8—6

1. 证明：$P_1(1,2,3)$，$P_2(2,3,1)$，$P_3(3,1,2)$ 为等边三角形的三个顶点。

2. 已知点 (0,0,0)，(2,0,0)，(0,−4,0)，(0,0,4) 在同一个球面上，试求该球的半径。

3. 已知三角形的三个顶点为 $P_1(2,5,0)$，$P_2(11,3,8)$，$P_3(5,1,12)$，求三角形重心的坐标。

8-7 向量的分解　现在我们来讨论向量的代数表示法，即坐标表示。在中学里，我们已经知道，利用平行四边形法则，不仅可以把两个互成角度的力合成一个力，而且可以把一个力分解为两个互成角度的分力，只要知道这两个分力的方向。对于一般向量我们也可以把它加以分解。

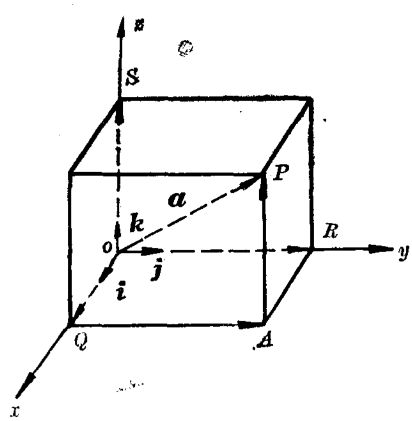

图 8.20

设在空间直角坐标系中有一向量 $\boldsymbol{a}$，把 $\boldsymbol{a}$ 的起点移到坐标原点，然后过 $\boldsymbol{a}$ 的终点 P 作三个与坐标轴垂直的平面，它们与三个坐标平面构成一个长方体(图8.20)。根据向量加法，

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AP}$$

但 $\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{OR}$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OS}$，所以

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}$$

这就是说，任何向量可以分解为三个与坐标轴平行的向量之和，这三个向量称为**沿坐标轴的分向量**。

我们令 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x 轴，y 轴，z 轴正向的单位向量，并且称它们为在直角坐标系中的**基本单位向量**。根据 8-3 节向量与数的乘法，得

$$\overrightarrow{OQ}=a_x\boldsymbol{i}\quad（参见 8\text{-}3 节例 1）$$

其中 a_x 是有向线段 OQ 的值，它的正负取决于 $\overrightarrow{OQ}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 的方向相同或相反。换句话说，a_x 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在横轴上的投影。同理，得

$$\overrightarrow{OR}=a_y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OS}=a_z\boldsymbol{k}$$

其中 a_y 与 a_z 分别为 $\boldsymbol{a}$ 在纵轴与竖轴上的投影。因此得向量 $\boldsymbol{a}$ 的**分解式**：

$$\boxed{\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}}\tag{12}$$

向量的坐标与方向余弦 我们知道，要确定一个向量就要知道它的模与方向。现在我们来讨论怎样从向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解式(12)来求 $\boldsymbol{a}$ 的模与方向。

由于分解式(12)中的 a_x，a_y，a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴 Ox，Oy，Oz 上的投影，所以由公式(9)得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{13}$$

其次，由 8-4 节投影定理一知

$$\boxed{a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\quad a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\quad a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma} \tag{14}$$

其中 α，β，γ 分别为 $\boldsymbol{a}$ 的方向与三条坐标轴 Ox,Oy,Oz 正向之间的夹角($0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant\pi$)称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**.方向角的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**。以(13)式代入(14)式。得

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}} \tag{15}$$

由此可见，已知一个向量的投影，便可由(13)与(15)式确定向量的模与方向；反过来，知道了向量的模与方向，便可由(14)式确定向量的投影。因此，向量 $\boldsymbol{a}$ 与它的投影即三个数 a_x，a_y，a_z 之间成一一对应关系，犹如点与它的坐标 x，y，z 之间成一一对应关系一样，所以我们称分解式(12)中的三个数 a_x，a_y，a_z 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**，记作

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示式**。有时我们也称 a_x，a_y，a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**分量**。

由(15)式可知，单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 的坐标就是它的方向余弦：

$$\boldsymbol{a}^\circ=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$$

特别，基本单位向量的坐标是：

$$\boldsymbol{i}=\{1,\ 0,\ 0\},\quad \boldsymbol{j}=\{0,\ 1,\ 0\},\quad \boldsymbol{k}=\{0,\ 0,\ 1\}$$

以 $P_1(x_1,y_1,z_1)$为起点，$P_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量的坐标是：

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

把(15)式中的三个式子各自两边平方后再相加，得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{a_x^2+a_y^2+a_z^2}{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=1$$

所以任意一个非零向量的方向余弦的平方和等于 1，即

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1} \tag{16}$$

从方向角与方向余弦的定义可知，与向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$方向相反的向量 $-\boldsymbol{a}$ 的方向角为 $\pi-\alpha$，$\pi-\beta$，$\pi-\gamma$，从而方向余弦 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，$\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta$，$\cos(\pi-\gamma)=-\cos\gamma$ 都要改变正负号，由(14)式知，它的坐标也要改变正负号，即

$$-\boldsymbol{a}=\{-a_x,\ -a_y,\ -a_z\}$$

例 1 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ 的单位向量的分解式。

[**解**] 所求的单位向量有两个，一个与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，另一个与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反。

由于 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$，因此

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{6}{11}\boldsymbol{i}+\frac{7}{11}\boldsymbol{j}-\frac{6}{11}\boldsymbol{k}$$

$$-\boldsymbol{a}^{\circ}=-\frac{6}{11}\boldsymbol{i}-\frac{7}{11}\boldsymbol{j}+\frac{6}{11}\boldsymbol{k}$$

例 2 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，$|\overrightarrow{P_1P_2}|=2$，它与 x 轴与 y 轴的夹角为$\frac{\pi}{3}$与$\frac{\pi}{4}$。如果 P_1 的坐标为(1,0,3)，求 P_2 的坐标。

［解］ 首先，让我们来确定$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向，设 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向角为α,β,γ，于是 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，由(16)式知

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1$$

从而有 $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$，即 $\gamma=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$。所以这样的向量有两个。

设 P_2 的坐标为$(x,\ y,\ z)$，那末根据公式(14)，有

$$x-1=2\cos\frac{\pi}{3},\quad y-0=2\cos\frac{\pi}{4},\quad z-3=2\cos\frac{\pi}{3}$$

或

$$x-1=2\cos\frac{\pi}{3},\quad y-0=2\cos\frac{\pi}{4},\quad z-3=2\cos\frac{2\pi}{3}$$

由此得 P_2 的坐标为 $(2,\ \sqrt{2},\ 4)$或$(2,\ \sqrt{2},\ 2)$。

空间直线的方向数 跟向量一样，空间一条有向直线L的正向也与三条坐标轴的正向有三个夹角（在 0 与 π 之间）α，β，γ，它们的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为L的方向余弦，公式(16)也成立。

与这条有向直线L的方向余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 成比例的三个数A，B，C，称为直线L的**方向数**，即有

$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=A:B:C$$

由此可知，

$$A=k\cos\alpha,\quad B=k\cos\beta,\quad C=k\cos\gamma \tag{17}$$

其中 k 为不等于零的比例常数，这就是直线L的方向数。

显然，知道了一条有向直线的方向余弦，就可以知道它的方向数，而且由(17)式可知方向数有无穷多组。知道了方向余弦，直线的正向就完全确定。但反过来，如果知道了方向数，直线的正向却不能确定。因为由(17)式得

$$A^2+B^2+C^2=k^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=k^2$$

即

$$k=\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

于是得

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} \tag{18}$$

这里的正负号就表示直线的正向尚未确定。

一条空间直线可以有正反两个不同的方向，这两个方向称为这直线的方位。

从以上的讨论可知，由方向余弦可以完全确定有向直线的方向；而由方向数只能规定直线的方位，而不能确定它的方向。

例 3 设有向直线L平行于向量$\boldsymbol{a}=\{1, 1, -1\}$，且与$z$轴正向的夹角为锐角，求$L$的方向余弦。

[解] 设有向直线L的方向角为α, β, γ，由于L与$\boldsymbol{a}$平行，它们有相同的方位，因此$\boldsymbol{a}$的方向数就是L的方向数。但是，由公式(14)知，$\boldsymbol{a}$的坐标是与$\boldsymbol{a}$的方向余弦成比例的，所以$\boldsymbol{a}$的坐标就是L的一组方向数。于是根据(18)式，有

$$\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{3}}, \quad \cos\beta=\frac{1}{\pm\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma=\frac{-1}{\pm\sqrt{3}}$$

但γ是锐角，$\cos\gamma>0$，因此，分母应取负号，从而得L的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

向量的代数运算 利用向量的分解式，原来纯用几何方法来定义的向量线性运算就可以用代数运算来进行了。

设
$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

于是
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}+b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}\\&=(a_x\boldsymbol{i}+b_x\boldsymbol{i})+(a_y\boldsymbol{j}+b_y\boldsymbol{j})+(a_z\boldsymbol{k}+b_z\boldsymbol{k}) \qquad [\text{8-2 节公式(1)}]\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k} \qquad [\text{8-2 节公式(4)}]\end{aligned}$$

这就是说，两向量之和的坐标就是原来两向量的相应坐标之和。

同理，两向量之差的坐标就是原来两向量的相应坐标之差：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}$$

又以数乘向量，就等于以这个数乘向量的所有坐标：

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}$$

以上运算如用向量的坐标表示，即为

$$\{a_x, a_y, a_z\}\pm\{b_x, b_y, b_z\}=\{a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\}$$
$$\lambda\{a_x, a_y, a_z\}=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

习　题 8—7

1. 在空间直角坐标系中，向量$\boldsymbol{a}$在三条坐标轴上的投影是指什么？它的分向量是指什么？向量$\boldsymbol{a}$的分量是指什么？

2. 什么是向量$\boldsymbol{a}$的方向余弦？与$\boldsymbol{a}$的坐标的关系如何？

3. 向量的方向余弦有什么性质？已知一个向量的模为3，它与y轴与z轴正向的夹角分别为30°与60°，问这个向量能否确定？为什么？如果把30°角改为45°角呢？

4. 设有向量$\boldsymbol{a}=7\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，已知它的终点为(1,2,3)，求起点的坐标；并求出$\boldsymbol{a}$的模与它的方向余弦。

5. 设$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，试写出$5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$的分解式与坐标表示式。

6. 设有向直线L平行于向量$\boldsymbol{a}=\{1, -1, 2\}$，指出下列各组数中哪些是$L$的方向数，哪些不是$L$的方向数：

(1) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$；　　(2) $(-5, 5, -10)$；

(3) $\left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$；　　(4) $(1, -1, 2)$。

8-8 两向量的标积 除了在8-3节中讲过的向量与数的乘积之外，在向量代数中尚有其他乘积。在这一节里，我们来讨论所谓两个向量的标积。先看一个实例。

在中学物理学里，我们已经知道常力作功的问题。设有物体作直线运动，作用在物体上的常力$\boldsymbol{F}$与物体的运动方向成角度α，如果物体的位移为$\boldsymbol{S}$(图8.21)，那末力$\boldsymbol{F}$所作的功为

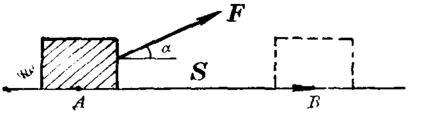

图 8.21

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\alpha$$

这就是说，功等于力向量的模、位移向量的模与两者夹角的余弦的乘积。

就在这类问题的基础上引进了所谓向量的标积。

定义 两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的标积①，记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，就是两者的模及其夹角$\varphi$的余弦的乘积：

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi} \tag{19}$$

这里由于所得的结果是一个标量，所以称为标积。

根据这个定义，可知：常力所作的功W等于力向量$\boldsymbol{F}$与位移向量$\boldsymbol{S}$的标积，即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}$$

按照上述定义，我们也可以说，两向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的标积是一个向量(如$\boldsymbol{a}$)的模乘上另一个向量(如$\boldsymbol{b}$)在前一向量(即$\boldsymbol{a}$)上的投影。如果把$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影记作a_b，就有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|b_a=|\boldsymbol{b}|a_b$$

根据这个定义，从(19)式立即可知标积满足交换律：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

容易证明标积还满足结合律：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{20}$$

事实上，当$\lambda>0$时，$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；当$\lambda<0$时，$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=(-\lambda)|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\varphi)=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$。

另外，根据投影定理二，可以推知标积也满足分配律：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \tag{21}$$

因为$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})_a=|\boldsymbol{a}|(b_a+c_a)=|\boldsymbol{a}|b_a+|\boldsymbol{a}|c_a=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。

根据标积的定义，基本单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$满足下列关系：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0 \tag{22}$$

① 标积也称数量积、点积或内积.

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1 \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{i}^2, \boldsymbol{j}^2, \boldsymbol{k}^2$ 分别表示 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$ 的简写。

标积的坐标表达式 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为 $\{a_x, a_y, a_z\}$，$\{b_x, b_y, b_z\}$，于是根据向量分解式，我们可以把标积写成：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}\\&\qquad+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \qquad [\text{公式}(21)]\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\&\qquad+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} \qquad [\text{公式}(20)]\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \qquad [\text{公式}(22),\ (23)]\end{aligned}$$

所以

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z} \tag{24}$$

这就是说，两向量的标积等于两向量的相应坐标的乘积之和。这样把标积由向量坐标表出，最便于运算。

两向量的夹角 设两向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ 均为非零向量，它们的方向余弦分别为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$；$\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'$，那末两者的夹角 φ 的余弦可以由下式表示：

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}} \tag{25}$$

或

$$\boxed{\cos\varphi=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'} \tag{26}$$

事实上，由标积的定义(19)及坐标表达式(24)，我们有

$$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

但由(13)式，

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},\quad |\boldsymbol{b}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}$$

代入上式并两端除以 $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$ 即得(25)式。又应用公式(15)，(25)式就成为(26)式。

两向量垂直的条件 设两向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ 均为非零向量。当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直时，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\cos\varphi=0$。所以，由(19)式，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；反之亦然。因此，两个非零向量互相垂直的充分与必要条件是它们的标积等于零①；再由(24)式可知，也就是 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$。

例1 已知 $\boldsymbol{a}=\{1, 1, -4\}$，$\boldsymbol{b}=\{1, -2, 2\}$，求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$； (2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角； (3) $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 a_b。

[解] (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times(-2)+(-4)\times2=-9$。

---

① 如果在这里我们把零向量看成与任何向量都是垂直的，那么这个结论对任何两个向量来说都是正确的.