计算力学

王省哲　编著

兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

计算力学

王省哲 编著

兰州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

计算力学/王省哲编著 .—兰州:兰州大学出版社,2006.1

ISBN 7-311-02731-4

Ⅰ.计... Ⅱ.王... Ⅲ.计算力学 Ⅳ.0302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 004947 号

计　算　力　学

王省哲　编著

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水南路 222 号　电话:8912613　邮编:730000

E-mail:press@onbook.com.cn

http://www.onbook.com.cn

兰州大学出版社激光照排中心照排

兰州德辉印刷有限责任公司印刷

开本:787×1092　1/16　　印张:13.75

2006 年 2 月第 1 版　　2006 年 2 月第 1 次印刷

字数:335 千字　　印数:1~1000 册

ISBN7-311-02731-4/O·186　　定价:25.00 元

前　言

力学是土木工程、机械动力、航空航天等许多专业必修的基础课程。随着工程科学技术的发展，复杂大型力学问题日益增多，对于多数的工程实际问题，采用经典力学分析理论与对数学物理方程进行简化近似求解得到解析解的方法不能完全满足要求。很多工程问题即使在建立了物理的或数学的模型之后，由于求解过程的高度复杂性而长期得不到有效的求解方法。计算力学的出现和发展，为解决这些复杂问题提供了有效途径，并逐渐成为力学问题研究中继理论解析分析、实验测试之后的第三种主要方法。计算、实验、理论已构成当代科学发展的三大支柱。计算力学是计算机科学、计算数学与力学学科相结合的产物，它横贯力学各个分支学科，不断吸收数学和力学各分支学科的研究成果，借助于电子计算机这一强大工具，极大地提高了经典力学解决自然科学和工程问题的能力。随着现代计算机软硬件技术的飞速发展，计算力学也得到迅速发展，并向其它工程学科渗透、交叉，成为力学工作者和工程技术人员解决自然科学和工程问题的重要手段。计算力学将成为一门新兴学科在推动力学发展中起到越来越重要的作用。

数值计算方法中，最早出现的是有限差分法。有限差分法从数学的角度用差分代替微分，将力学中的微分方程转化为代数方程，从而大大拓展了力学学科的应用范围。20 世纪五六十年代有限元法的问世促进了计算力学的蓬勃发展。有限元法建立了计算模型、离散方法、数值求解和计算机程序实现的统一方法，通过变分原理（或采用加权残值法）将原问题转化为代数方程进行求解。到了 20 世纪 70 年代出现了边界元方法，对于分析某些实际问题，边界元方法具有突出的优点，并得到了迅速的发展。上述三种方法被称为计算力学的三大支柱。除此之外，计算力学还包括其它的分支，诸如加权残值法、半解析半数值方法等。尽管目前介绍各类计算方法的书籍已经很多，但大多数讲授的起点高，对于只学过材料力学、弹性力学等基础力学课程的本科生来说有一定的难度。本书力求在理工科本科生已有的基本力学知识的基础上来介绍计算力学中几种常用方法的原理、步骤和实现过程，注意由浅入深、循序渐进，使学生容易入门。

本书的第一章对计算力学的发展、研究内容以及与其它学科的关系进行简要阐述；第二章到第六章分别介绍了有限差分法、加权残值法、变分原理与变分近似法、以及边界元法的基本概念、理论、步骤与实现过程。作为计算力学，其内容必然要涉及到计算力学软件，在本书的最后一章主要介绍了目前几种比较重要的而且有着广泛应用的力学软件，特别是有限元大型商业软件的基本特征与特点。本书作者长期从事与计算力学相关的教学与科研工作，对书中内容的阐述方式充分反映了笔者对计算力学学科的体会、心得，以及所积累的教学经验。由于笔者学识和水平的有限，书中难免有所不足和错误之处，敬请读者不吝赐教。特别地，在本书定稿出版前有幸得到曾任全国计算力学专业委员会副主任、北京大学力学与工程科学系武际可教授对本书提出的意见与建议，在此表示真诚的感谢。

作 者

2005 年 8 月于兰州大学

目 录

第一章 绪论

计算力学是根据力学中的理论，利用现代电子计算机和各种数值方法，解决力学中的实际问题的一门新兴学科；其也是随着计算机的发展，计算机技术、计算数学和力学相互交叉而产生的一门新的学科分支。计算力学横贯于力学的各个分支，并且不断地扩大了各个领域中力学的研究和应用范围，同时也在逐渐发展自己的理论和方法。计算机技术提供的可能性和来自工业和其他科学部门，如航空航天技术中流场计算以及原子弹、氢弹引爆过程和爆炸效应的计算需要，极大地推动着计算力学的飞速发展。而计算力学已经取得的成就，数值计算方法与实验，以及理论分析成为力学工作者解决工程和科学中的力学问题的三大支柱，在推动力学学科自身发展中也起着越来越重要的作用。钱学森指出过："今日的力学要充分利用计算机和现代计算技术去回答一切宏观的实际科学技术问题，计算方法非常重要；另一个辅助手段是巧妙设计的实验"。对于力学工作者来说，今天的计算力学已经成为他们通向工程的桥梁，为国民经济建设和国防建设服务的不可缺少的手段，也是力学学科和高新技术的结合点。

§ 1.1 计算力学的发展简史

近代力学的基本理论和基本方程在 19 世纪末 20 世纪初已基本完备了，后来的力学家大多致力于寻求各种具体问题的解。但由于许多力学问题相当复杂，很难获得解析解，用数值方法求解也遇到计算工作量过于庞大的困难。通常只能通过各种假设把问题简化到可以处理的程度，以得到某种近似的解答，或是借助于实验手段来谋求问题的解决。

第二次世界大战后不久，第一台电子计算机在美国出现，并在以后的 20 年里得到了迅速的发展。20 世纪 60 年代出现了大型通用数字电子计算机，这种强大的计算工具的出现使复杂的数字运算不再成为障碍，为计算力学的形成奠定了物质基础。与此同时，适用于计算机的各种数值方法，如矩阵运算、线性代数、数学规划等也得到相应的发展；椭圆型、抛物型和双曲型微分方程的差分格式和稳定性理论研究也相继取得进展。

1960 年，美国克拉夫首先提出了有限元法（Finite Element Method），为把连续体力学问题化作离散的力学模型开拓了宽广的途径。有限元法的物理实质是：把一个连续体近似地用有限个在节点处相连接的单元组成的组合体来代替，从而把连续体的分析转化为单元分析加上对这些单元组合的分析问题。有限元法和计算机的结合，产生了巨大的威力，应用范围很快从简单的杆、板结构推广到复杂的空间组合结构，使过去不可能进行的一些大型复杂结构的静力分析变成了常规的计算，固体力学中的动力问题和各种非线性问题也有了各种相应的解决途径。

另一种有效的计算方法——有限差分方法（Finite Difference Method）也差不多同时在流体力学领域内得到新的发展，有代表性的工作是美国哈洛等人提出的一套计算方法，尤其是其中的质点网格法(即 PIC 方法)。这些方法往往来源于对实际问题所作的物理观察与考虑，然后再采用计算机作数值模拟，而不讲究数学上的严格论证。1963 年哈洛和弗罗姆成功地用电子计算机解决了流体力学中有名的难题——卡门涡街的数值模拟。

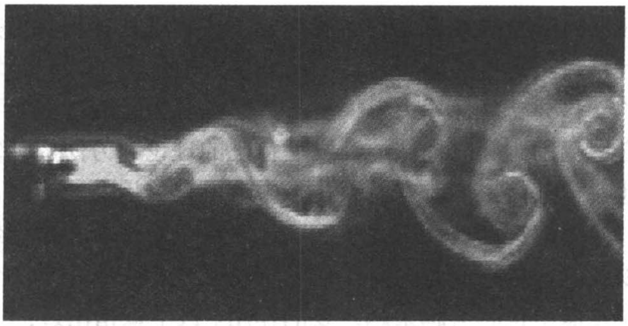

图 1 卡门涡街的数值模拟结果

无论是有限元法还是有限差分方法，它们的离散化概念都具有非常直观的意义，很容易被工程师们接受，而且在数学上又都有便于计算机处理的计算格式。计算力学就是在高速计算机产生的基础上，随着这些新的概念和方法的出现而形成的。

在这里，值得一提的是我国力学工作者对这一领域的贡献。中国计算力学的发展可以追溯到 20 世纪 60 年代初，当时钱令希和陈百屏等就已注意使用矩阵表示结构力学的基本方程，在计算机上求解大规模的结构力学问题。由于文革的原因，我国科学发展出现了一个时期的停滞。中国计算机力学快速发展是在文化大革命的后期，一批中国力学工作者敏锐地注意到了国际计算力学的发展，并作出了快速的反应。这一段时期，张佑启和 Zienkiewicz 合作的介绍有限元的教材被翻译介绍到国内，徐芝纶出版了介绍有限元方法的教材并附有程序，普及这一新方法和向工程界介绍这一新方法成为力学界当时的热点。之后，平均每四年召开一次的全国计算力学大会，在力学界吸引了一大批人投入这个新兴的领域，而且在中国力学学会下成立了计算力学分委员会，1981 年中国建立了学位制度，在力学一级学科下设立了计算力学二级学科，全国的计算力学硕士学位点也发展到数十个。经过各方面的努力，出版了《计算结构力学及其应用》杂志，最近又被批准更名为《计算力学学报》，为计算力学研究工作者提供了出版和交流的园地，由此计算力学这门新兴的学科在中国逐步确立了地位。计算力学提供的手段大大增强了力学工作者解决工程和科学中力学问题的手段，相对地说容易得到社会和企业的理解和支持，计算力学已在各个高校里成为力学学科中最活跃并与工程实际结合最紧密的分支之一。

§ 1.2 计算力学的研究内容

计算力学主要进行数值方法的研究，如对有限差分方法、有限元法、变分法、加权残值法等作进一步深入研究，对一些新的方法及基础理论问题进行探索等等。计算力学的应用范

围已由最初的结构力学扩大到固体力学、岩土力学、水力学、流体力学、生物力学、微电子/微结构/纳米结构力学等等领域。

计算结构力学是研究结构力学中的结构分析和结构综合问题。结构分析指在一定外界因素作用下分析结构的反应，包括应力、变形、频率、极限承载能力等。结构综合是指在一定约束条件下，综合各种因素进行结构优化设计，例如寻求最经济、最轻或刚度最大的设计方案。

计算流体力学主要研究流体力学中的无粘性绕流和粘性流动。无粘性绕流包括低速流、跨声速流、超声速流等；粘性流动包括端流、边界层流动等。

计算力学已在应用中逐步形成自己的理论和方法。有限元法和有限差分方法是比较有代表性的方法，这两种方法各有自己的特点和适用范围。有限元法主要应用于固体力学，有限差分方法则主要应用于流体力学。近年来这种状况已发生变化，它们正在互相交叉和渗透，特别是有限元法在流体力学中的应用日趋广泛。

计算力学对于各种力学问题的适应性强，应用范围广，它能详细给出各种数值结果，通过图像显示还可以形象地描述力学过程。它能多次重复进行数值模拟，比实验省时省钱。但计算力学也有弱点，例如，它不能给出函数形式的解析表达式，因此比较难以显示数值解的规律性。许多非线性问题由于解的存在和唯一性缺乏严格证明，数值计算结果须作一些验证。

§1.3 计算力学和其他学科的关系

计算力学横贯各个力学分支，为它们服务，促进它们的发展，同时也受它们的影响。计算力学曾揭示出一些前所未知的物理现象，如两个非线性孤立波在相遇和干扰后仍能保持原有的振幅和波形，就是首先从数值计算中发现，以后才由实验证实的。计算力学也推动了变分方法等基本力学方法和计算方法的研究。计算力学对力学实验提出了更高的要求，促进了实验的发展。在计算力学帮助下，对实验过程中测点的最佳位置、测量最佳时刻的确定有了更可靠的理论指导。

计算力学也为实际工程项目开辟了优化设计的前景。过去，工程师们虽有追求最优化设计的愿望，但是力不从心。现在，由于有了强有力的结构分析方法和工具，便有条件研究改进设计的科学方法，逐步形成计算力学的一个重要分支——结构优化设计。计算力学在应用中也提出了不少理论问题，如稳定性分析、误差估计、收敛性等，吸引许多数学家去研究，从而推动了数值分析理论的发展。

§1.4 计算力学的一般研究方法

一般说来，从一个力学问题或工程问题出发的定解问题的原始形成到得到合理的数值结果，大致有下列几个步骤：

第一，物理处理：根据各种物理定律建立起各种物理量之间的关系式，其中包括正确地提出各种定解条件，用工程和力学的概念和理论建立计算模型。

第二，数学提法：通常对第一步骤所建立起的各种关系式进行极限处理，从而表达为一个微分方程（或积分方程）的定解问题。

第三，离散逼近：采用各种方法把微分方程（或积分方程）的定解问题离散化。

第四，解算方法：主要是用直接法或迭代法求解由离散逼近后所导致的线性或非线性的代数方程组。

第五，上机计算实施：把解算方法编成计算机语言——程序，并用电子计算机进行计算，最后得到数值计算结果。

第六，结果评估：运用工程和力学的概念判断和解释所得的结果和意义，作出科学结论。

以上几个环节是密切联系的，一个实际问题的完善解决，往往要在这些步骤之间往复多次。

第二章 有限差分方法

许多物理现象或其运动、演化过程可以用一个微分方程的定解问题来描述，例如无限长细弦的自由振动向题可归结成二阶双曲型方程的初值问题，而弦对平衡位置的偏移就是方程的解。但是，绝大多数偏微分方程定解问题的解通常并不能用显式的公式来表达，有时即使可用公式表示，也往往因为过于复杂，而需要采用各种近似方法来计算它的解。差分方法就是求解（偏）微分方程定解问题的常用近似方法之一。Courant, Friedrichs, Lewy (1928) 首次对偏微分方程的差分方法作了完整的论述。第二次世界大战以来，快速电子计算机的诞生为差分方法提供了强有力的工具，从而促使这一数值分析方法迅速地发展起来。

有限差分法的基本思想是用离散的、只含有限个未知数的差分方程去代替连续变量的微分方程和定解条件。对于求解的偏微分方程定解问题，有限差分方法的主要步骤如下：利用网格线将定解区域化为离散点集；在此基础上，通过适当的途径将微分方程离散化为差分方程，并将定解条件离散化，这一过程叫做构造差分格式，不同的离散化途径一般会得到不同的差分格式；建立差分格式后，就把原来的偏微分方程定解问题化为代数方程组，通过解代数方程组，得到出定解问题的解在离散点上的近似值组成的离散解，应用插值方法可从离散解得到定解问题在整个定解区域上的近似解。由此可见，有限差分方法有大体固定的模式，它有较强的通用性。但是，不能误认为不去了解这种逼近方法的基本知识，只是单纯模仿，便能轻易获得满意的结果。因为在应用这种逼近方法时会发生许多重要的但有时还是相当困难的数学问题，包括精度、稳定性与收敛性等。

本章的目的是介绍有限差分方法的一些基本概念和构造差分格式的基本方法，以及给出一些力学问题有限差分求解的全过程。

§2.1 有限差分的基本概念

在本节中，我们将首先针对单变量系统，基于 Taylor 展式导出若干有限差分表达式。接着，将所得结果推广到两个自变量以及多自变量函数系统。

§2.1.1 函数的表示

首先考虑单变量函数 $u(x)$ ，x 为自变量。我们将区域 x 离散化为一系列点（或节点，有时也称作结点）（如图 2.1.1），使得

$$u(x_r)=u(rh)=u_r\,,\quad (r=0,1,2,\cdots) \tag{2.1.1}$$

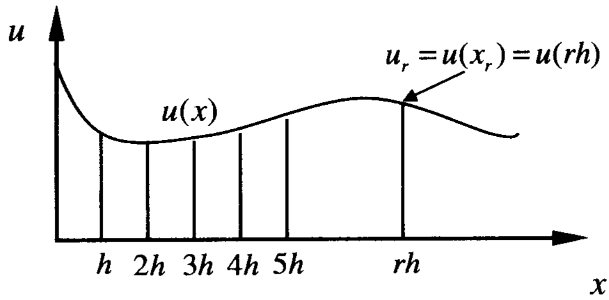

图 2.1.1 等格距 h 时函数 $u(x)$ 的离散化

在用 rh 代替 x_r 后，节点坐标就仅仅由整数 r 和格距 h 的乘积给定(这里不妨假设 h 为常数并规范化为小于 1)，其中 h 称为沿 x 方向的步长。整数 r 表示节点沿 x 坐标的位置，通常，当 $x=0$ 时 $r=0$。当 h 是常数时，$u(rh)$ 就可表示为 u_r。

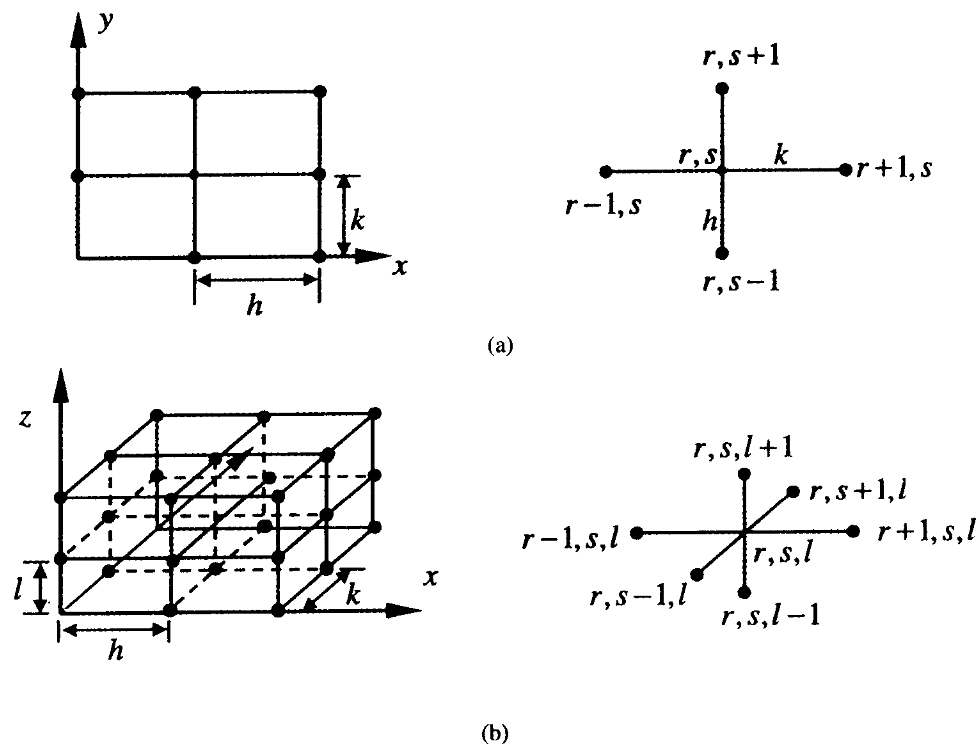

图 2.1.2 （a）二维有限差分离散网格；（b）三维有限差分离散网格

在二维情形下(图 2.1.2a)，函数 $u(x, y)$ 在任何节点位置的值可表示表示为

$$u(x_r, y_s) = u(rh, sk) = u_{r,s}, \quad (r = 0, 1, 2, \cdots;\ s = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.1.2}$$

其中 x 方向的格距为 h， y 方向的格距为 k （或者， h 称为沿 x 方向的步长， k 称为沿 y 方向的步长）；整数 r 和 s 分别表示函数 $u(x,y)$ 沿 x 和 y 坐标的位置。此外，对于与任意点 (r,s) 相邻的节点，我们可以表示如下

$$u_{r\pm1,s}=u[(r\pm1)h,sk] \quad 或 \quad u_{r,s\pm1}=u[rh,(s\pm1)k] \tag{2.1.3}$$

类似地，同样可以对三维情形下（图 2.1.2b)函数 $u(x,y,z)$ 给出离散表示，在此不再详述。

§ 2.1.2 单变量函数的有限差分公式

Taylor 级数展开式对于有限差分公式的建立和分类具有十分重要的意义，而且一定程度上其对于许多函数的近似逼近也是如此。因此，在具体研究各种数值方法之前，有必要对有关 Taylor 级数的知识作一下简单回顾或阐述以方便对此不甚熟悉的读者。

单变量函数 $u(x)$ 在离散点 x_r 处的 Taylor 级数展开用我们前面所采用的记号可表示为

$$u(x_r+h)=u(x_r)+hu_x\big|_{x_r}+\frac{h^2}{2!}u_{xx}\big|_{x_r}+\frac{h^3}{3!}u_{xxx}\big|_{x_r}+\cdots \tag{2.1.4a}$$

或

$$u(x_r-h)=u(x_r)-hu_x\big|_{x_r}+\frac{h^2}{2!}u_{xx}\big|_{x_r}-\frac{h^3}{3!}u_{xxx}\big|_{x_r}+\cdots \tag{2.1.4b}$$

重新整理上两式后，可另写成

$$u_x\big|_{x_r}=\frac{u(x_r+h)-u(x_r)}{h}-\frac{h}{2!}u_{xx}\big|_{x_r}-\frac{h^2}{3!}u_{xxx}\big|_{x_r}-\cdots \tag{2.1.5a}$$

$$u_x\big|_{x_r}=\frac{u(x_r)-u(x_r-h)}{h}+\frac{h}{2!}u_{xx}\big|_{x_r}-\frac{h^2}{3!}u_{xxx}\big|_{x_r}+\cdots \tag{2.1.5b}$$

进而，在点 x_r 处的一阶导数的两个近似公式可由（2.1.5）给出

$$u_x\big|_{x_r}=(u_x)_r\approx\frac{u(x_r+h)-u(x_r)}{h}=\frac{u_{r+1}-u_r}{h} \tag{2.1.6a}$$

$$u_x\big|_{x_r}=(u_x)_r\approx\frac{u(x_r)-u(x_r-h)}{h}=\frac{u_r-u_{r-1}}{h} \tag{2.1.6b}$$

由于上式中级数被截断，因此这些近似公式肯定存在一定的误差 E_r。此截断误差可由级数被截部分的第一项（也是最大一项）表示出，即

$$E_r=\begin{cases}-\dfrac{h}{2}u_{xx}\big|_{x=\tilde{x}}=o(h), & (x_r<\tilde{x}<x_r+h)\\ \dfrac{h}{2}u_{xx}\big|_{x=\tilde{x}}=o(h), & (x_r-h<\tilde{x}<x_r)\end{cases} \tag{2.1.7}$$

我们称此误差$o(h)$与h同阶。对于足够小的步长h，误差$o(h)$的绝对值将小于Ah（A为一常数）。（2.1.6a）和（2.1.6b）分别称作函数$u(x)$关于自变量x的一阶向前差商和向后差商。

如果将（2.1.5a）与（2.1.5b）相加并求解$(u_x)_r$，则得

$$(u_x)_r = \frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h} \tag{2.1.8}$$

其被截去的第一项为

$$E_r = -\frac{h^2}{6} u_{xxx}\Big|_{x=\tilde{x}} = o(h^2), \qquad (x_{r-1} < \tilde{x} < x_{r+1}) \tag{2.1.9}$$

即截断误差为$o(h^2)$阶。（2.1.8）称作函数$u(x)$关于自变量x的一阶中心差商。

为了获得函数高阶导数的近似，例如二阶导数，我们将（2.1.5a）减去（2.1.5b）并求解$(u_{xx})_r$，得到

$$(u_{xx})_r = \frac{u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}}{h^2} \tag{2.1.10}$$

其被截去的第一项为

$$E_r = -\frac{h^2}{12} u_{xxxx}\Big|_{x=\tilde{x}} = o(h^2), \qquad (x_{r-1} < \tilde{x} < x_{r+1}) \tag{2.1.11}$$

即式（2.1.10）的截断误差为$o(h^2)$阶。依次类推，我们不难得到更高阶（如：三阶、四阶）导数的近似表示公式。

虽然我们可以沿用上面的方式推导出更为复杂的公式，但运算过程十分复杂，这里我们介绍另外一种使用算子推导的方法。首先，定义如下的符号以及算子（如表 2.1.1）：

表 2.1.1　差分算子以及符号

符　号	算　子	差 分 表 示 式
Δ	向前差分	$\Delta u_r = u_{r+1} - u_r$
∇	向后差分	$\nabla u_r = u_r - u_{r-1}$
δ	中心差分	$\delta u_r = u_{r+1/2} - u_{r-1/2}$
E	移位	$Eu_r = u_{r+1}$
μ	平均	$\mu u_r = (u_{r+1/2} + u_{r-1/2})/2$
D	微分	$Du_r = (\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)_{x=x_r} = (u_x)_r$

利用所定义的算子，可以用一种简单的推导和表述方式将所有可能的微分式的有限差分形式表示出来，其所得结果与通过 Taylor 级数所导出的公式相同。由上表中定义的各种线性算子，在不同的算子间存在很多关系式，这里给出几个作为例证。

$$\Delta u_r = u_{r+1} - u_r = Eu_r - u_r = (E-1)u_r \;\Rightarrow\; \Delta = E - 1 \tag{2.1.12}$$

$$\nabla u_r = u_r - u_{r-1} = u_r - E^{-1}u_r = (1-E^{-1})u_r \;\Rightarrow\; \nabla = 1 - E^{-1} \tag{2.1.13}$$

$$\mu(\delta u_r) = \frac{\delta u_{r+1/2} + \delta u_{r-1/2}}{2} = \frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2} \tag{2.1.14}$$

$$\delta^2 u_r = \delta(\delta u_r) = \delta(u_{r+1/2} - u_{r-1/2}) = u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1} \tag{2.1.15}$$

$$\mu\delta^3 u_r = \frac{u_{r+2} - 2u_{r+1} + 2u_{r-1} - u_{r-2}}{2} \tag{2.1.16}$$

进一步，我们可将 Taylor 级数（2.1.4a）另表示为

$$\begin{aligned} u_{r+1} &= u_r + h(u_x)_r + \frac{h^2}{2!}(u_{xx})_r + \frac{h^3}{3!}(u_{xxx})_r + \cdots \\ &= (1 + hD + \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!} + \cdots)u_r = \exp(hD)u_r \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

但由前面的定义，$Eu_r = u_{r+1}$，故有

$$E = \exp(hD) \tag{2.1.18}$$

或者

$$hD = \ln E = \begin{cases} \ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \cdots \\ -\ln(1-\nabla) = \nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \cdots \end{cases} \tag{2.1.19}$$

同样地，容易证明

$$\delta = 2\sinh(\frac{hD}{2}) \tag{2.1.20}$$

其证明如下：

$$\begin{aligned} u_{r+1/2} &= u_r + (h/2)(u_x)_r + \frac{(h/2)^2}{2!}(u_{xx})_r + \frac{(h/2)^3}{3!}(u_{xxx})_r + \cdots \\ &= (1 + (h/2)D + \frac{(h/2)^2D^2}{2!} + \frac{(h/2)^3D^3}{3!} + \cdots)u_r = \exp(\frac{hD}{2})u_r \end{aligned} \tag{* 1}$$

$$\begin{aligned} u_{r-1/2} &= u_r + (-h/2)(u_x)_r + \frac{(-h/2)^2}{2!}(u_{xx})_r + \frac{(-h/2)^3}{3!}(u_{xxx})_r + \cdots \\ &= (1 + (-h/2)D + \frac{(-h/2)^2D^2}{2!} + \frac{(-h/2)^3D^3}{3!} + \cdots)u_r = \exp(\frac{-hD}{2})u_r \end{aligned} \tag{* 2}$$