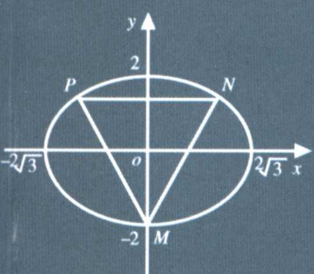
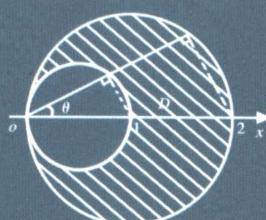
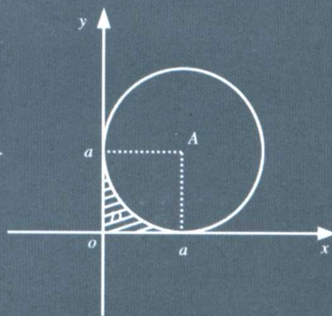
GAO DENGSHUXUE XUEXIZHIDAO

高等数学学习指导

陶玉娟 陈 端 刘 莉 编著







哈尔滨地图出版社

高等数学学习指导

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

陶玉娟　陈　端　刘　莉　编著

哈尔滨地图出版社

·哈尔滨·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/陶玉娟，陈端，刘莉编著. —哈尔滨:哈尔滨地图出版社,2005.12
ISBN 7-80717-226-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①陶…②陈…③刘… Ⅲ.高等数学-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第155450号

哈尔滨地图出版社出版、发行
(地址:哈尔滨市南岗区测绘路2号 邮编:150086)
哈尔滨海天印刷设计有限公司印刷
开本:850 mm×1 168 mm 1/32 印张:12.678 5 字数:350千字
2005年12月第1版 2005年12月第1次印刷
印数:1~500 定价:29.50元

内容提要

本书是与四川大学数学系高等数学教研室编写的《高等数学》(物理类专业用第三版,第一、二册)配套的学习指导用书,主要作为学习本课程的课后复习和提高之用。本书按节编写,每节包含:内容提要、教学要求、释疑解惑、范例解析、习题选解,每章后附有测试题。本书切合实际,结构严谨,注意提高学生对高等数学的基本概念、基本定理、基本计算的理解和应用。本书通俗易懂,便于自学,可作为物理类专业的大学生的复习指导书,也可用作其他理科专业开设《高等数学》课程学生的学习参考书。

前　言

高等数学是高等院校工科类专业和师范院校物理类专业的一门重要的基础课程。本书是与四川大学数学系高等数学教研室编写的《高等数学》第三版(第一、二册)相配套的学习指导用书,主要作为学习高等数学课程的学生课后复习和提高之用,并希望对任课教师也有参考价值。

本书按节编写,每节内容包括如下五部分:

一、内容提要

提纲挈领地归纳本节的主要内容,具体的概念、定理、公式等一般不再列出,由读者自行复习。

二、教学要求

主要是根据教学大纲的要求,阐述学生在学习每节内容后应达到的目标。对教学要求的层次,按"理解"、"了解"、"掌握"、"熟练"的次序表示程度上的差异。

三、释疑解惑

通过一系列问题与解答,用以解释高等数学的学习过程中的某些疑难问题,主要包括:对课程中某些较难概念的理解;重要定理的条件分析和使用要领;典型方法和技巧的总结;对某些似是而非的论断的辨析。

四、范例解析

在每节中选择了 3 ~ 5 个中等或中等以上难度的例题,通过分析、求解、介绍与该例题有关的典型解题方法和计算技巧,有些问题的解答还对教学内容进行了补充和提高,以供一些学有余力的学生阅读参考。

五、习题选解

对每节中较难的习题给出适当的解答，希望读者能够正确对待这部分内容，坚持“先做后看”的原则，才能取得事半功倍的效果。

本书在各章后设有测试题，作为学完各章内容后检测自已掌握知识的程度之用，在书末附有测试题的答案或解答。

本书的内容一共分为十一章，其中第一、二章和第七、八、九章由陶玉娟编写；第三、四章和第六章由陈端编写；第五章和第十、十一章由刘莉编写。陶玉娟负责全书的统稿，在编书过程中得到了很多同仁的热心帮助，在此表示衷心感谢。

由于我们对编写学习指导书缺乏经验，再加之我们水平有限，因此难免有不足和错误之处，恳请同行和读者批评指正。

编　者

2005 年 12 月

目 录

第一章 函数与极限 …… 1

第一节 函数 …… 1

第二节 极限 …… 6

第三节 连续函数 …… 20

测试题一 …… 30

第二章 微分学 …… 31

第一节 导数及其运算 …… 31

第二节 微分 …… 45

第三节 中值定理——导数的应用 …… 50

测试题二 …… 73

第三章 不定积分 …… 75

第一节 不定积分的概念与运算法则 …… 75

第二节 积分法 …… 79

测试题三 …… 103

第四章 微分方程初步 …… 104

第一节 微分方程的基本概念 …… 104

第二节 一阶微分方程 …… 108

第三节 二阶微分方程 …… 127

测试题四 …… 154

第五章 定积分 …… 155

第一节 基本概念 …… 155

第二节 定积分的计算 …… 166

第三节 定积分的应用 …… 176

测试题五 …… 192

第六章　空间解析几何和矢量代数 …………………………… 194
第一节　空间直角坐标和矢量代数 ………………………… 194
第二节　空间中的平面与直线 …………………………… 205
第三节　二次曲面 ……………………………………… 214
测试题六 ……………………………………………… 222
第七章　多元函数微分学 ………………………………… 224
第一节　多元函数 ……………………………………… 224
第二节　偏导数的应用 ………………………………… 241
测试题七 ……………………………………………… 253
第八章　重积分 ………………………………………… 254
第一节　二重积分 ……………………………………… 254
第二节　三重积分 ……………………………………… 270
测试题八 ……………………………………………… 280
第九章　曲线积分、曲面积分 …………………………… 281
第一节　曲线积分 ……………………………………… 281
第二节　曲面积分 ……………………………………… 305
测试题九 ……………………………………………… 323
第十章　级数 …………………………………………… 325
第一节　数项级数 ……………………………………… 325
第二节　幂级数 ………………………………………… 342
第三节　傅里叶级数 …………………………………… 355
测试题十 ……………………………………………… 363
第十一章　广义积分和含参变量积分 …………………… 364
第一节　广义积分 ……………………………………… 364
第二节　含参变量的积分 ……………………………… 371
测试题十一 …………………………………………… 376
测试题提示与解答 ……………………………………… 377

第一章　函数与极限

第一节　函　　数

一、内容提要

1. 函数的定义及函数的表示法。
2. 函数的几种特性:单调性,有界性,奇偶性,周期性。
3. 复合函数与反函数。
4. 初等函数。

二、教学要求

1. 理解函数概念及函数的几种特性。
2. 理解反函数和复合函数概念。
3. 理解初等函数的概念,掌握基本初等函数的性质。
4. 了解函数的几种表示法,特别是分段函数的表示法。

三、释疑解惑

1. 设狄利克雷函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

$g(x)=\dfrac{1}{x}$,$|x|>1$,试问复合函数$f\circ g$和$g\circ f$是否存在?

答　设有两函数

$$y=f(u),u\in D,u=g(x),x\in E,$$

记$E^*=\{x|g(x)\in D\}\cap E$,若$E^*\neq\phi$,则$f$与$g$可以复合成函数

$$y=f(g(x)),x\in E^*。$$

(1)对$f(u)=\begin{cases}1,u\text{ 为有理数},\\ 0,u\text{ 为无理数},\end{cases}$　$D=R,g(x)=\dfrac{1}{x}$,

$|x|>1,E=\{x\mid |x|>1\}$,有$E^*=\{x|g(x)\in D\}\cap E=E\neq\phi$,于是$f$与$g$可以复合成$f\circ g$,其定义域为$E$。

(2)对$g(u)=\dfrac{1}{u},D=\{u\mid |u|>1\}$

$$f(x)=\begin{cases}1, x \text{ 为有理数}, \\ 0, x \text{ 为无理数},\end{cases} \quad E=R, E^{*}=\{x \mid f(x) \in D\} \cap E=\phi,$$

于是 g 与 f 不能复合为 $g \circ f$。

2. 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在数集 X 上都无界，那么 $f(x)g(x)$ 在 X 上也一定无界吗？

答 不一定。例如，$f(x)=\tan x, g(x)=\cot x$ 在 $X=(0,\frac{\pi}{2})$ 上都无界，但 $f(x)g(x) \equiv 1, x \in X$，因而 $f(x)g(x)$ 在 X 上是有界的。

四、范例解析

例 1 设函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, \text{当} |x| \leqslant 1, \\ 0, \text{当} |x|>1,\end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases}2-x^{2}, \text{当} |x| \leqslant 2, \\ 2, \quad \text{当} |x|>2。\end{cases}$$

试求 $y=\varphi(\psi(x))$。

解 首先观察到函数 ψ 的值域包含在 φ 的定义域中，因而 φ 与 ψ 可以复合。

先求集合 $\{x \mid |\psi(x)| \leqslant 1\}=\{x \mid |2-x^{2}| \leqslant 1\}$，解不等式 $|2-x^{2}| \leqslant 1$ 可得 $1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{3}$，此时有 $\varphi(\psi(x))=1$。

又当 $|x|<1$ 或 $|x|>\sqrt{3}$ 时，有 $|\psi(x)|>1$，于是 $\varphi(\psi(x))=0$，这就得到

$$\varphi(\psi(x))=\begin{cases}1, 1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{3} \\ 0, |x|<1 \text{ 或 } |x|>\sqrt{3}。\end{cases}$$

例 2 证明关于取整函数 $y=[x]$ 的如下不等式：

(1) 当 $x>0$ 时，$1-x<x[\frac{1}{x}] \leqslant 1$；

(2) 当 $x<0$ 时，$1 \leqslant x[\frac{1}{x}]<1-x$。

证 (1) 当 $x>0$ 时，$\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}] \leqslant \frac{1}{x}$，即 $1-x<x[\frac{1}{x}] \leqslant 1$，

(2) 当 $x<0$ 时，$\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\leqslant\frac{1}{x}$，因为 $x<0$，所以

$$1\leqslant x[\frac{1}{x}]<1-x。$$

例3 求下列函数的反函数:

(1) $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc)\neq 0$;

(2) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$。

解 (1) 先判定反函数存在。

设 $x_1\neq x_2$，且 $cx_i+d\neq 0(i=1,2)$，则

$$\frac{ax_2+b}{cx_2+d}-\frac{ax_1+b}{cx_1+d}=\frac{(ad-bc)(x_2-x_1)}{(cx_1+d)(cx_2+d)}\neq 0。$$

这说明所给函数是单射的，存在反函数。

由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\frac{b-dy}{cy-a}$ 或 $y=\frac{b-dx}{cx-a}$。

(2) 因为 $y=\frac{2^x}{2^x+1}=1-\frac{1}{2^x+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，且 $0<y<1$。当 $x\to+\infty$ 时，$y\to 1$；当 $x\to-\infty$ 时，$y\to 0$，所以，所给函数存在反函数，且反函数的定义域为 $(0,1)$。

由 $y=1-\frac{1}{2^x+1}$ 解得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$ 或 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$，$x\in(0,1)$。

五、习题选解 (教材第一册，习题 1.1 第 21 页)

1. 解下列不等式(用区间表示)

(4) $-2<\frac{1}{x+2}<2$，(6) $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$

解 (4) 因为 $x+2\neq 0$，所以原不等式等价于下面的两个不等式

$$-2<\frac{1}{x+2}<0, 0<\frac{1}{x+2}<2。$$

由 $-2<\frac{1}{x+2}<0$，得 $x+2<-\frac{1}{2}$，有 $x<-\frac{5}{2}$；由 $0<\frac{1}{x+2}<2$

得$x+2>\frac{1}{2}$,有$x>-\frac{3}{2}$,所以原不等式的解集为$(-\infty,-\frac{5}{2})$,$(-\frac{3}{2},+\infty)$。

(6)只有当$x^2-3x+2<0$时,才有$|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$,所以原不等式等价于

$$\begin{cases}x^2-3x+2<0\\|x^2-3x+2|>x^2-3x+2。\end{cases}$$

解得不等式的解集为(1,2)。

8. 证明$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数

证 设$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,对于任意的$x\in R$,都有$x+\sqrt{1+x^2}>0$,所以该函数的定义域为R。

若$x\in R$,则$-x\in R$,且$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x})=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)^{-1}=-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x)$,所以该函数为奇函数。

9. 设$f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$内的任意函数,证明

$F_1(x)=f(x)+f(-x)$为偶函数,$F_2(x)=f(x)-f(-x)$为奇函数。

证明 $F_1(x)$与$F_2(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,则

$F_1(-x)=f(-x)+f(x)=f(x)+f(-x)=F_1(x)$

$F_2(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-F_2(x)$,所以$F_1(x)=f(x)+f(-x)$为偶函数,$F_2(x)=f(x)-f(-x)$为奇函数。

11. 证明$y=x-[x]$为周期函数,并求它的最小正周期。

证明 函数$f(x)=x-[x]$的定义域是R,对于$x\in R$,且$\exists l>0$,l是整数,有

$$\begin{aligned}f(x+l)&=x+l-[x+l]\\&=x+l-[x]-l\\&=x-[x]\\&=f(x),\end{aligned}$$

所以函数$f(x)=x-[x]$是以正整数l为周期的周期函数，它的最小正周期为1。

15. 作下列函数的图形

(1)$y=[x]$,(2)$y=|x|$,

$$(3)\ y=\begin{cases}x^2+1, & x>0,\\ 0, & x=0\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$$

解　这三个函数的定义域都是R，它们的图形如图1-1：

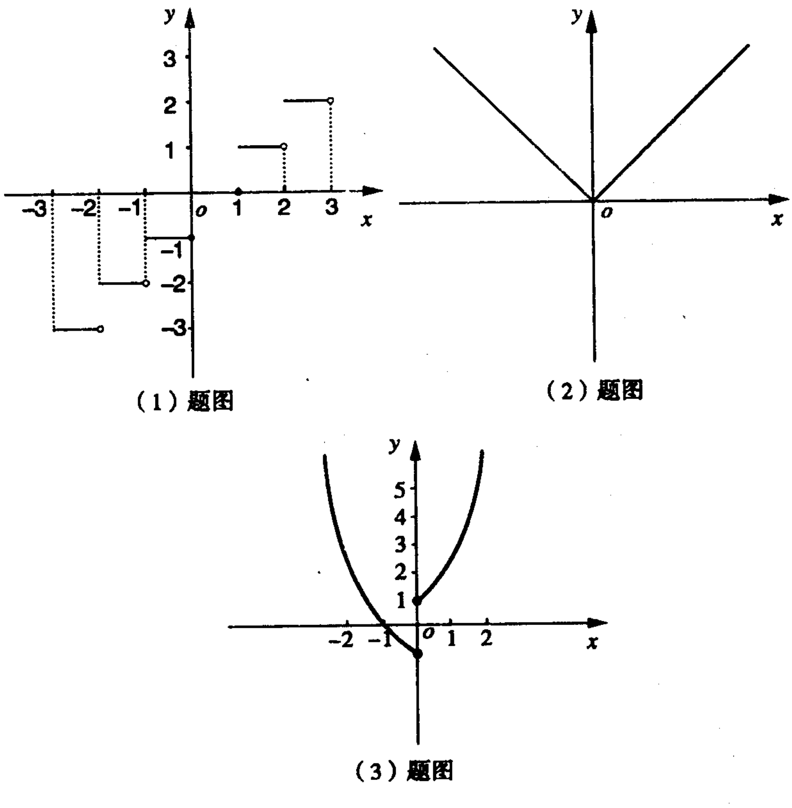


图1-1

第二节　极　　限

一、内容提要

1. 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的定义，收敛数列的性质：极限的惟一性、收敛数列的有界性、保号性以及收敛数列的子数列的性质。

2. 函数在有限点处的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的定义，函数在有限点处的左、右极限$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$的定义，函数在无穷大处的极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的定义。

3. 函数极限的性质：极限的惟一性，局部有界性，局部保号性以及函数极限与数列极限的关系。

4. 函数极限存在的两个准则：夹挤定理，柯西收敛准则，两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$。

5. 无穷大量与无穷小量的定义及相互关系，无穷小量的性质，无穷小量的比较。

二、教学要求

1. 理解数列极限的定义，了解收敛数列的性质。

2. 理解函数在有限点处以及在无穷大处的极限的定义，理解左、右极限的定义，会利用定义证明一些简单的函数的极限。

3. 理解极限存在的夹挤定理，了解单调有界收敛准则，会正确运用两个重要极限。

4. 了解高阶、同阶、低阶、k阶、等价无穷小的概念及无穷小的性质。

三、释疑解惑

1. 讨论函数极限时，在什么情况下，要考虑左、右极限？

答　一般地说，讨论$f(x)$在点x_0处的极限，都应先看一看单侧极限的情形。如果当$x\to x_0$时，$f(x)$在x_0两侧的变化趋势一致，那么就不必分开研究；如果$f(x)$在x_0两侧的变化趋势可能有差别，就应分别讨论左、右极限。例如，求分段函数在分段点处的极限时，必须

研究左、右极限；有些三角函数在特殊点的左、右极限不一样，例如，$\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处左、右极限不一样。

2. 如何从 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$ 推得存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$，使得 $|a_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon_0$？

答　这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$，于是 $\exists\,\varepsilon_0>0,\ \forall N>0,\ \exists\,n'>N$，使得

$$|a_{n'}-a|\geqslant\varepsilon_0。$$

取 $N=1$，$\exists\,n_1>1$，使得 $|a_{n_1}-a|\geqslant\varepsilon_0$，

取 $N=n_1$，$\exists\,n_2>n_1$，使得 $|a_{n_2}-a|\geqslant\varepsilon_0$，

……

取 $N=n_{k-1}$，$\exists\,n_k>n_{k-1}$，使得 $|a_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon_0$，

……

这样就选出 $\{a_n\}$ 的一个子列 $\{a_{n_k}\}$，满足

$$|a_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon_0。$$

3. 试对验证数列收敛和发散的一些充要条件或充分条件加以总结。

答　验证数列收敛的一些方法如下：

(1)按定义验证：

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N$，有 $|a_n-a|<\varepsilon$。

(2)用邻域形式验证：

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，在 $U(a,\varepsilon)$ 外最多只有数列 $\{a_n\}$ 中有限项。

(3)子列定理：

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\{a_{n_k}\}\subset\{a_n\}$，有 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$。

$\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow\forall\{a_{n_k}\}\subset\{a_n\}$，有 $\{a_{n_k}\}$ 收敛。

(4)柯西准则：

$\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n,m>N$，有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$。

(5)单调有界定理：

若 $\{a_n\}$ 单调有界 $\Rightarrow\{a_n\}$ 收敛。

(6)夹挤定理：若 $a_n\leqslant C_n\leqslant b_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=a$。

验证数列发散的一些方法如下：

(1)按极限定义的否定形式验证：

$$\{a_n\}\text{发散}\Leftrightarrow\forall a,\lim_{n\to\infty}a_n\neq a。$$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists n'>N,|a_{n'}-a|\geq\varepsilon_0$。

(2)用邻域形式验证：

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$，在 $U(a,\varepsilon_0)$ 外存在数列 $\{a_n\}$ 中无限多项。

(3)用子列验证：

若 $\exists\{a_{n_k}\}\subset\{a_n\},\{a_{n_k}\}$ 发散 $\Rightarrow\{a_n\}$ 发散。

若 $\exists$ 两个子列 $\{a'_{n_k}\}\subset\{a_n\},\lim\limits_{k\to\infty}a'_{n_k}=a'$，

$$\{a''_{n_k}\}\subset\{a_n\},\lim_{k\to\infty}a''_{n_k}=a'',$$

$a'\neq a''\Rightarrow\{a_n\}$ 发散。

(4)用柯西准则否定形式验证：

$\{a_n\}$ 发散 $\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists n_0,m_0>N,|a_{n_0}-a_{m_0}|\geq\varepsilon_0$。

(5)若数列 $\{a_n\}$ 无界 $\Rightarrow\{a_n\}$ 发散。

4. 在应用极限的四则运算法则时，初学者会写出“$\infty-\infty=0$，$\dfrac{\infty}{\infty}=1$”等式子，试问错在何处？

答 出现这类错误的主要原因是将符号“∞”误认为一个常数，对它施行了数的运算法则。事实上，“∞”不是一个常数，而是表示绝对值无限增大的变量。记号“$\infty-\infty$”表示两个绝对值无限增大的变量之差，仍是一个变量，这个变量可能出现各种不同的情形。同样地，记号“$\dfrac{\infty}{\infty}$”表示两个绝对值无限增大的变量之商，仍是一个变量。关于“$\infty-\infty$”、“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型极限的求法，在后面的洛必达法则中会详细介绍。

5. 下面的极限运算对吗？

$$\lim_{x\to\infty}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}x^2\cdot\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}=0。$$

答 结果正确,表达错误,这是因为$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在,不能利用积的极限运算法则。正确的做法是:因为$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$,$|\sin\frac{1}{x}|\leqslant 1$,所以$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$。

四、范例解析

例1 按$\varepsilon-N$定义证明

$$\lim_{n\to 0}\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}=\frac{5}{3}$$

证 对$\forall\varepsilon>0$,不等式

$$\left|\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}-\frac{5}{3}\right|$$

$$=\left|\frac{3n+4}{3(3n^2-2)}\right|$$

$$\leqslant\frac{4n}{3\cdot 2n^2}\quad(n>4)$$

$$=\frac{2}{3n}<\varepsilon。$$

解不等式 有$n>\frac{2}{3\varepsilon}$,取$N=\max\{[\frac{2}{3\varepsilon}+1],4\}$,当$n>N$时,有

$$\left|\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}-\frac{5}{3}\right|<\varepsilon$$

成立,即$\lim\limits_{n\to 0}\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}=\frac{5}{3}$。

注 扩大分式是采用扩大分子或缩小分母的方法。

例2 证明$\lim\limits_{n\to 0}(\sqrt{n^2+1}-n)=0$

证 $\forall\varepsilon>0$

$$|\sqrt{n^2+1}-n|=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\frac{1}{2n}<\varepsilon$$

解得$n>\frac{1}{2\varepsilon}$,取$N=[\frac{1}{2\varepsilon}]$,于是,当$n>N$时,有